

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2017-2018

Compito di Fisica 2 (01/12/2017)

1

Una carica puntiforme q si trova a distanza x da una sfera conduttrice isolata di raggio a ($< x$) e che possiede la carica Q dello stesso segno di q .

- Risolvere il problema del potenziale elettrico, determinando in particolare il valore del potenziale sulla sfera (avendo posto potenziale nullo all'infinito).
- Calcolare la forza tra carica e sfera mostrando che essa diviene *attrattiva* a distanze opportune.
- Calcolare l'energia potenziale della carica puntiforme.

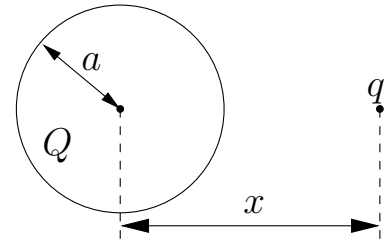


Figura 1

2

Due materiali omogenei di permittività dielettriche rispettivamente ε_1 e ε_2 riempiono rispettivamente i semispazi $x > 0$ e $x < 0$. Nel semispazio $x > 0$ il campo elettrico ha modulo E_1 e forma un angolo θ_1 con la normale alla superficie di separazione $x = 0$.

- Determinare il campo elettrico nella regione $x < 0$.
- Calcolare la densità di carica di polarizzazione sulla superficie $x = 0$.

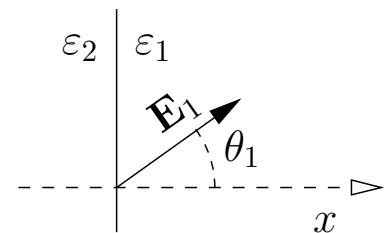


Figura 2

3

Sulla superficie esterna di una lamina cilindrica di materiale isolante, avente raggio a e altezza $h \gg a$, si trova la carica Q uniformemente distribuita con densità superficiale $\sigma = Q/(2\pi ah)$. La lamina è posta in rotazione con velocità angolare uniforme ω parallela all'asse della lamina.

Calcolare

- il campo magnetico all'interno della lamina, lontano dalle superfici di base;
- il campo magnetico all'esterno della lamina, a distanze molto maggiori di h ;
- i contributi del campo elettrico e del campo magnetico alla forza (per unità di superficie) esercitata sulla superficie cilindrica carica lontano dalle due estremità, valutando il loro rapporto.

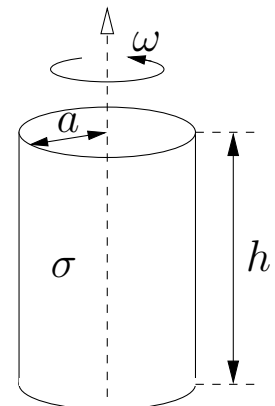


Figura 3

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni dell'elettrostatica e della magnetostatica

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (2)$$

Soluzione per il problema di una carica puntiforme q posta a distanza a da una sfera conduttrice di raggio $R < a$ connessa a terra (ovvero mantenuta a potenziale nullo): si pone una carica immagine $q' = -(R/a)q$ a distanza $b = R^2/a$ dal centro della sfera, lungo la congiungente con la posizione di q .

Forza magnetica su un elemento infinitesimo di corrente

$$d\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} d^3x. \quad (3)$$

Forza di Lorentz per unità di volume

$$d\mathbf{f} = (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) d^3x. \quad (4)$$

Equazioni dell'elettrostatica di un mezzo materiale lineare con permittività dielettrica ε

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_{\text{lib}} + \rho_{\text{pol}}), \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{lib}}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \quad (5)$$

SOLUZIONI

1

a) Il campo esterno alla sfera si risolve con il metodo delle immagini, ponendo una carica q' a distanza x' dal centro, come in Fig. 4, con

$$q' = -\frac{a}{x}q \quad \text{e} \quad x' = \frac{a^2}{x}, \quad (6)$$

oltre a una carica

$$-q' = \frac{a}{x}q \quad (7)$$

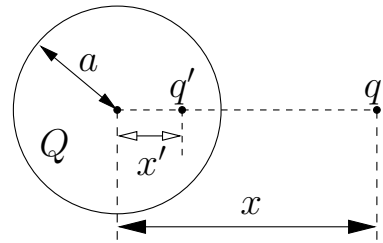


Figura 4

al centro della sfera per conservare la carica totale della sfera stessa.

Il potenziale elettrico fuori dalla sfera è così il potenziale generato da una carica $Q + qa/x$ posta al centro della sfera, dalla carica q' e dalla carica puntiforme reale q . Le cariche q e la sua immagine q' generano un potenziale nullo sulla sfera, il potenziale della superficie sferica vale così

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q + aq/x}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{a} + \frac{q}{x} \right), \quad (8)$$

essendo la sfera conduttrice, questo è il potenziale di tutta la sfera.

b) La forza esercitata dalla sfera sulla carica puntiforme q vale

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{qQ}{x^2} - \frac{qq'}{x^2} + \frac{qq'}{(x-x')^2} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{qQ}{x^2} + \frac{aq^2}{x^3} - \frac{axq^2}{(x^2-a^2)^2} \right], \quad (9)$$

repulsiva quando è positiva, attrattiva quando è negativa. Abbiamo sempre $x > a$, abbiamo poi

$$\lim_{x \rightarrow a} F = -\infty, \quad \text{quindi attrattiva}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F = 0^+, \quad \text{quindi repulsiva}, \quad (10)$$

perché il primo termine tra parentesi, positivo, decresce in modulo meno rapidamente dell'ultimo termine, attrattivo. Il punto in cui la forza cambia segno si ottiene risolvendo l'equazione *non banale*

$$qQx(x^2 - a^2)^2 + aq^2(x^2 - a^2)^2 - q^2ax^4 = 0. \quad (11)$$

c) L'energia potenziale della carica q può essere ottenuta calcolando il lavoro fatto dal campo elettrico quando la carica va da x all'infinito

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_x^\infty \frac{qQ}{x'^2} dx' + \int_x^\infty \frac{aq^2}{x'^3} dx' - \int_x^\infty \frac{ax'q^2}{(x'^2 - a^2)^2} dx' \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{qQ}{x} + \frac{aq^2}{2x^2} - \frac{aq^2}{2(x^2 - a^2)} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Allo stesso risultato si può arrivare considerando l'interazione tra la carica puntiforme q e la carica reale Q , più le due cariche immagine q' e $-q'$. I contributi delle cariche immagine hanno un fattore 1/2 rispetto al contributo che darebbero se fossero cariche reali.

2

a) Scelto l'asse y in modo che il campo elettrico sia nel piano xy , la legge sulla rifrazione delle linee di forza del campo elettrico alla superficie di separazione tra i due dielettrici è

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad \text{da cui} \quad \tan \theta_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tan \theta_1, \quad (13)$$

mentre

$$E_{2x} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{1x} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cos \theta_1 E_1, \quad E_{2y} = E_{1y} = \sin \theta_1 E_1. \quad (14)$$

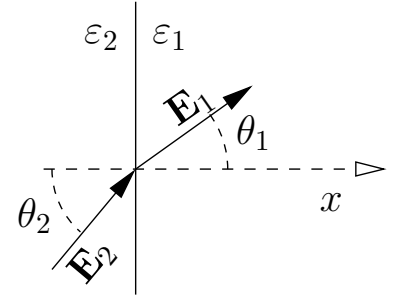


Figura 5

b) Abbiamo

$$\sigma_p = \sigma_{p2} + \sigma_{p1} = \varepsilon_0(\varepsilon_2 - 1)E_{2x} - \varepsilon_0(\varepsilon_1 - 1)E_{1x} = \varepsilon_0 \cos \theta_1 \left[(\varepsilon_2 - 1) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - (\varepsilon_1 - 1) \right] E_1. \quad (15)$$

3

a) Il campo interno è quello di un solenoide con prodotto nI pari alla densità superficiale di corrente $K = \sigma\omega a$, quindi lontano dalle estremità abbiamo

$$B = \mu_0 \sigma \omega a. \quad (16)$$

b) Un cilindro pieno magnetizzato uniformemente con magnetizzazione $\mathbf{M}$ parallela all'asse produce un campo pari a quello di una distribuzione superficiale di corrente $\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$. Quindi il nostro cilindro rotante è equivalente a un cilindro con magnetizzazione uniforme $M = \sigma\omega a$ diretta lungo l'asse, con un momento di dipolo magnetico complessivo

$$\mathbf{m} = \pi a^2 h \sigma \omega a \hat{\mathbf{z}}. \quad (17)$$

Il campo magnetico a distanze dal cilindro molto maggior di h è quindi uguale al campo di un dipolo di valore $\mathbf{m}$.

c) Il campo elettrico nella zona centrale vicina alla superficie è radiale in coordinate cilindriche e vale

$$E_{\text{int}} = 0 \quad \text{all'interno}, \quad E_{\text{ext}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{2\pi a \sigma}{r} = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0 r} \quad \text{all'esterno}. \quad (18)$$

La forza elettrica per unità di superficie vale così

$$P_{\text{el}} = \sigma \frac{1}{2} \left(0 + \frac{a\sigma}{\varepsilon_0 a} \right) = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}. \quad (19)$$

Sempre nella zona centrale vicina alla superficie il campo magnetico è nullo all'esterno, mentre all'interno è parallelo all'asse e dato dalla (16). La forza magnetica per unità di superficie è così

$$P_{\text{magn}} = \frac{\sigma}{2} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \sigma^2 a^2 \omega^2}{2}. \quad (20)$$

Ambedue le forze tendono a fare espandere il cilindro. Il rapporto tra i due contributi è

$$\frac{P_{\text{magn}}}{P_{\text{el}}} = \frac{a^2 \omega^2}{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{v^2}{c^2}, \quad (21)$$

ed è quindi trascurabile per velocità di rotazione piccole rispetto a c .