

Corso di Laurea in Fisica

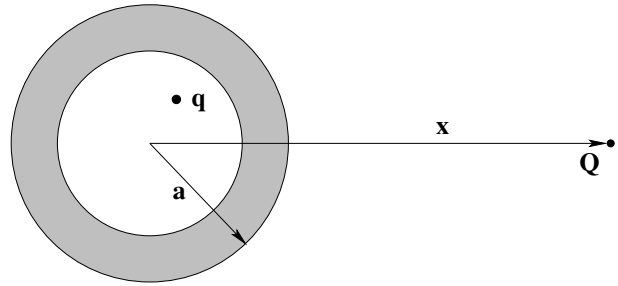
Anno Accademico 2018-2019

Compito di Fisica 2 (10/12/2018)

1

Una carica puntiforme Q si trova a distanza x dal centro di un guscio conduttore di raggio $a < x$. Il guscio è isolato e scarico e contiene nella cavità interna una seconda carica puntiforme q .

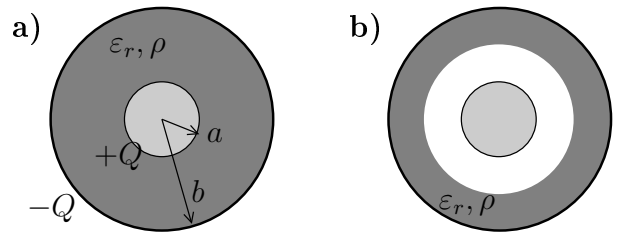
- a) Usando il metodo delle cariche immagine, determinare la forza sulla carica Q , discutendo perché essa non dipende dallo spessore del guscio e dalla posizione di q .
- b) Calcolare il lavoro necessario a spostare Q all'infinito.
- c) Calcolare il potenziale del guscio sferico.



2

Un condensatore cilindrico ha raggio interno a , raggio esterno $b > a$, altezza $h \gg b$ ed è riempito di un materiale avente permittività dielettrica relativa ϵ_r e resistività ρ . Il condensatore è isolato e sulle armature si trovano le cariche $\pm Q$, rispettivamente. Gli effetti ai bordi sono trascurabili.

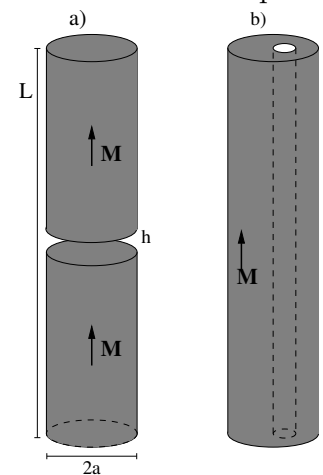
- a) Calcolare il campo elettrico all'interno del condensatore e il tempo in cui il condensatore si scarica.
- b) Si consideri ora il caso in cui il condensatore sia riempito dello stesso materiale dielettrico, ma solo nella regione $(a + b)/2 < r < b$, mentre per $a < r < (a + b)/2$ il condensatore rimane vuoto. Dopo aver caricato come nel caso precedente, le armature interne ed esterne del condensatore, si attende il raggiungimento di una situazione stazionaria. Si dica come è distribuita la carica in questa situazione stazionaria, e si calcoli il campo elettrico in tutto lo spazio.



3

Un cilindro di raggio a e altezza $L \gg a$ possiede una magnetizzazione permanente $\mathbf{M}$ parallela al proprio asse.

- a) A metà del cilindro si rimuove una “fetta” di altezza $h \ll a$: si stimi il campo magnetico al centro dell'intercapedine rimanente.
- b) Si rimuove dal cilindro un secondo cilindro di raggio $b < a$ avente asse parallelo a quello esterno, anche se non necessariamente coincidente, ma comunque interno al magnete: si stimi il campo magnetico all'interno della cavità rimanente.



NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (1)$$

Equazione di continuità della carica

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 . \quad (2)$$

Legge di Ohm microscopica

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{E}}{\rho} \quad (3)$$

Suggerimento: Soluzione per il problema di una carica puntiforme q posta a distanza a da una sfera conduttrice di raggio $R < a$ mantenuta a potenziale nullo: si pone una carica immagine $q' = -(R/a)q$ a distanza $b = R^2/a$ dal centro della sfera, lungo la congiungente con la posizione di q .

Equazioni dell'elettrostatica di un mezzo materiale lineare con permittività dielettrica ε

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{lib}} , \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\mathbf{D} \equiv \varepsilon \mathbf{E}) . \quad (4)$$

Equazioni della magnetostatica dei mezzi con densità di polarizzazione magnetica $\mathbf{M}$ in assenza di correnti “libere”

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \nabla \times \mathbf{H} = 0 , \quad \mathbf{B} \equiv \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) , \quad \mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} . \quad (5)$$

SOLUZIONI

1

a) Sappiamo che all'interno del conduttore il campo elettrico è nullo: pertanto, adoperando il teorema di Gauss, si trova che la carica totale contenuta all'interno di una qualsiasi sfera concentrica al guscio, e di raggio intermedio tra quello interno e quello esterno, deve essere nulla. Pertanto la carica totale distribuita sulla superficie interna sarà uguale a $-q$, e visto che la sfera nel complesso è neutra, sulla superficie esterna deve essere distribuita una carica totale q . Questo risultato non dipende né dallo spessore del guscio, né dalla posizione della carica q (né, tantomeno, dalla forma della cavità interna al guscio!). Consideriamo adesso il campo all'esterno del guscio: sappiamo che, per mantenere la sfera a potenziale nullo, dobbiamo inserire una carica immagine di valore $Q' = -Q \cdot a/x$ posta a distanza $x - a^2/x$ dalla carica Q , lungo la congiungente il centro alla carica stessa. Per ottenere inoltre una carica totale q mantenendo la superficie a potenziale costante, la carica residua $q - Q'$ deve essere distribuita uniformemente sulla superficie esterna: quindi il campo generato da quest'ultima è sempre uguale a quello che si avrebbe ponendo la stessa nel centro, indipendentemente dalla posizione reale all'interno del guscio. A causa dell'allineamento delle cariche e delle cariche immagine, la forza agente sulla carica q sarà radiale, e data dalla formula:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ'}{(x - a^2/x)^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot (q - Q')}{x^2} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^3}{x^3} \frac{a^2 - 2 \cdot x^2}{(x^2 - a^2)^2} + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} \quad (6)$$

b) Per calcolare il lavoro effettuato, è possibile integrare la forza tra x ed ∞ , oppure semplicemente osservare che, mentre la carica q non dipende dalla posizione della carica Q , così non è per la carica Q' , immagine di Q . Pertanto, è possibile calcolare il lavoro come variazione dell'energia potenziale del sistema di cariche, tenendo conto degli opportuni fattori $1/2$:

$$L = \Delta U = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x - a^2/x)} = \quad (7)$$

$$-\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} - \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{a}{x^2} + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{a}{(x^2 - a^2)} \quad (8)$$

c) La carica Q e la sua immagine Q' danno un contributo nullo al potenziale sulla superficie esterna del guscio sferico: pertanto gli unici termini sono quelli dovuti alla carica q e all'immagine Q' :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q - Q'}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q + Q \cdot a/x}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x} \quad (9)$$

2

a) Il campo elettrico tra le due armature è determinato solo dalla carica del cilindro interno, quindi

$$E_r = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r h} \cdot \quad (10)$$

Data la resistività ρ non infinita del dielettrico, in esso scorre una densità di corrente $\mathbf{J} = \mathbf{E}/\rho$. Per calcolare il tempo di scarica integriamo l'equazione di continuità su una superficie cilindrica coassiale di raggio r (con $b > r > a$) ottenendo

$$\frac{dQ}{dt} = -\Phi(\mathbf{J}) = -\int \frac{E_r}{\rho} dS = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r \rho h r} 2\pi r = -\frac{Q}{\rho \epsilon_0 \epsilon_r} \cdot \quad (11)$$

Otteniamo quindi

$$Q(t) = Q(0) e^{-t/\tau}, \quad \tau = \rho \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \quad (12)$$

b)

Poiché nella regione di vuoto non passa corrente, il condensatore non si scarica. In condizioni stazionarie il campo deve essere nullo all'interno del dielettrico con perdite a causa della resistività finita, quindi $E_r = 0$ per $r > (a + b)/2$. Per $r < (a + b)/2$ abbiamo invece

$$E_r = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h r}, \quad (13)$$

da cui otteniamo che per rispettare le condizioni di discontinuità alla superficie di $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, deve essere presente della carica libera all'interfaccia tra vuoto e dielettrico. Applicando il teorema di Gauss ad una superficie attorno all'interfaccia otteniamo (posto $r_i \equiv (a + b)/2$)

$$\sigma = -D_r(r_i^-) = -\epsilon_0 E_r(r_i^-) = -\frac{Q}{2\pi h r_i}, \quad (14)$$

da cui si vede subito che la carica totale sull'interfaccia è $-Q$, come deve essere (in un tempo abbastanza lungo tutta la carica migra dall'armatura del condensatore verso l'interfaccia).

3

a) Quando il cilindro è ancora integro, all'interno si ha $\vec{B} = \mu_0(\vec{M} + \vec{H})$. Sulla superficie laterale del cilindro è presente una corrente di magnetizzazione pari a $K = M$, diretta parallelamente alla superficie in verso antiorario rispetto alla direzione della magnetizzazione. Pertanto una soluzione approssimata è $\vec{B} = \mu_0\vec{M}$, $\vec{H} = 0$. Rimuovendo la fetta, all'ordine più basso nello sviluppo in h/a il campo $\vec{B}$ non cambia (la componente del campo perpendicolare alla superficie del taglio si conserva). Questa risposta è in genere sufficiente.

Volendo, è possibile dare una stima all'ordine superiore, considerando il cilindro col taglio come la sovrapposizione del cilindro originale, più un anello di corrente di raggio a e intensità $I = -K \cdot h = -M \cdot h$ posto intorno al centro della sbarretta, che cancella la corrente superficiale in quel punto: in questo caso, il campo al centro della "fetta" mancante sarà circa

$$\vec{B} = \mu_0\vec{M} - \hat{z}\frac{\mu_0 M h}{2a} \quad (15)$$

b) Rimuovendo un cilindro interno, sulla superficie interna del "tubo" risultante compare una corrente di magnetizzazione uguale ed opposta a quella presente sulla superficie esterna: per sovrapposizione, il campo risultante è nullo. Un modo alternativo di vedere la cosa è il seguente: all'interno del materiale magnetico il campo B è parallelo all'asse mentre il campo H è nullo. In corrispondenza della superficie interna, nel passaggio dal materiale alla cavità, risultano continue la componente ortogonale di B e la componente parallela di H : entrambe sono nulle, e pertanto il campo risultante è nullo. I primi termini diversi da zero sono dell'ordine di a/L , e quindi trascurabili nella approssimazione scelta.