

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2019-2020

Compito di Fisica 2 (07/12/2019)

1

Un cavo coassiale è costituito da un conduttore cilindrico omogeneo interno di raggio a e da un (guscio) conduttore cilindrico esterno di raggio interno b , entrambi aventi lunghezza infinita. Sui conduttori interno ed esterno si trovano rispettivamente le densità di carica per unità di lunghezza $\pm\lambda$ e scorrono le intensità di corrente $\pm I$. Calcolare, nella regione interna ($b < r < a$) ed esterna ($r > b$) al cavo,

a) i campi elettrico e magnetico,

b) la forza per unità di superficie a $r = a$ e $r = b$ (si possono considerare carica e corrente come distribuite uniformemente sulle superfici).

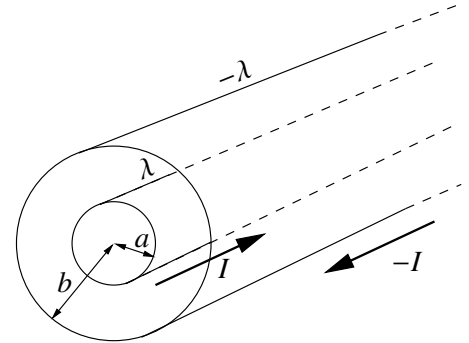


Fig. 1

2

Su un cilindro conduttore di raggio a e altezza $h \gg 2a$ si trova la carica Q . Il conduttore viene immerso per metà altezza in un liquido dielettrico di permittività dielettrica relativa ϵ_r . Gli effetti di bordo sono trascurabili.

a) Calcolare il campo elettrico alla superficie del conduttore.

b) Se il liquido ha anche una resistività finita ρ , calcolare la legge temporale con la quale il cilindro si scarica e il tempo caratteristico, stimando il valore per l'acqua di mare ($\rho \simeq 0.2 \Omega/\text{m}$, $\epsilon_r \simeq 80$).

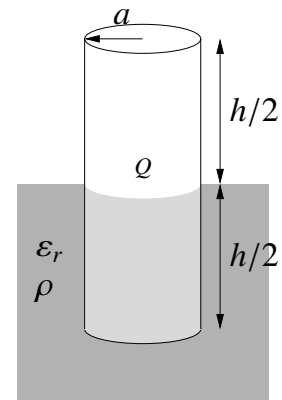


Fig. 2

3

Una sfera di raggio a ha magnetizzazione uniforme $\mathbf{M}$. Nella sfera viene praticata una cavità cilindrica di lunghezza $2a$ e raggio $b \ll a$. L'asse della cavità coincide con un diametro della sfera parallelo a $\mathbf{M}$.

a) Calcolare il campo magnetico $\mathbf{B}$ all'interno della cavità.

b) Si consideri una sfera con cavità analoga a quella del punto a), ma con polarizzazione elettrica permanente $\mathbf{P}$ anziché magnetica. Calcolare il campo elettrico $\mathbf{E}$ all'interno della cavità.

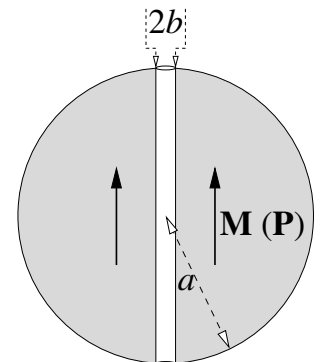


Fig. 3

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Costanti fisiche

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} , \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 , \quad \mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2 , \quad (k_0 = 1/(4\pi\varepsilon_0)) . \quad (1)$$

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (2)$$

Legge di Ohm microscopica (ρ resistività)

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{E}}{\rho} \quad (3)$$

Forza magnetica su un elemento infinitesimo di corrente

$$d\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} d^3x = I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} . \quad (4)$$

dove d^3x è l'elemento infinitesimo di volume e l'ultima eguaglianza vale per un elemento infinitesimo di circuito di spessore trascurabile per cui $\mathbf{J}d^3x = \mathbf{J}Sd\boldsymbol{\ell} = Id\boldsymbol{\ell}$.

Equazioni dell'elettrostatica di mezzi con densità di polarizzazione elettrica $\mathbf{P}$ e densità di carica $\rho = \rho_{\text{lib}} + \rho_{\text{pol}}$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 , \quad \nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{lib}} , \quad \mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} , \quad \rho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{P} . \quad (5)$$

dove per mezzi dielettrici con suscettività χ ovvero con permittività $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_0(1 + \chi)$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} , \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0(1 + \chi) \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} . \quad (6)$$

Equazioni della magnetostatica dei mezzi con densità di polarizzazione magnetica $\mathbf{M}$ in assenza di correnti “libere”

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \nabla \times \mathbf{H} = 0 , \quad \mathbf{B} \equiv \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) , \quad \mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} . \quad (7)$$

Campo elettrico interno a una sfera con polarizzazione elettrica uniforme $\mathbf{P}$

$$\mathbf{E}_{\text{int}} = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} . \quad (8)$$

SOLUZIONI

1

a) Per la simmetria cilindrica del problema il campo è radiale, $\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}}$. Per determinarlo basta applicare il teorema di Gauss al flusso di $\mathbf{E}$ su una superficie cilindrica di raggio r coassiale al sistema. Si ottiene

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases} \quad (9)$$

Sempre per ragioni di simmetria il campo magnetico sarà azimutale, $\mathbf{B} = B_\phi(r)\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Calcolando la circuitazione su una linea di forza circolare a r costante si ottiene

$$B_\phi(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases} \quad (10)$$

b) Per trovare la forza dovuta al campo elettrico calcoliamo prima le densità di carica σ presenti per $r = a$ e $r = b$. La relazione tra densità di carica superficiale σ e lineare λ per una superficie cilindrica uniformemente carica di raggio r è $2\pi r\sigma = \lambda$, da cui

$$\sigma_a = \frac{\lambda}{2\pi a}, \quad \text{e} \quad \sigma_b = -\frac{\lambda}{2\pi b}. \quad (11)$$

Per la forza per unità di superficie abbiamo

$$P_a^{(e)} = \frac{1}{2}\sigma_a E(a) = \frac{\lambda^2}{8\pi\epsilon_0 a^2} = \epsilon_0 \frac{E^2(a)}{2}, \quad P_b^{(e)} = \frac{1}{2}\sigma_b E(b) = -\frac{\lambda^2}{8\pi\epsilon_0 b^2} = -\epsilon_0 \frac{E^2(b)}{2}, \quad (12)$$

dove il fattore $\frac{1}{2}$ è stato inserito per trovare il campo medio effettivo agente sulla distribuzione σ sui due conduttori. Tale forza tende ad avvicinare le due armature tra di loro, essendo $P_a^{(e)}$ diretta come $\hat{\mathbf{r}}$ e $P_b^{(e)}$ come $-\hat{\mathbf{r}}$.

Per la pressione magnetica abbiamo densità superficiali di corrente $\mathbf{K}_a = \hat{\mathbf{z}} I/(2\pi a)$ sul conduttore interno e $\mathbf{K}_b = -\hat{\mathbf{z}} I/(2\pi b)$ sul conduttore esterno. Questo corrisponde a forze per unità di superficie

$$\begin{aligned} P_a^{(m)} &= \frac{1}{2}\mathbf{K}_a \times \mathbf{B}(a) = -\hat{\mathbf{r}} \frac{\mu_0 I^2}{2(2\pi a)^2} \\ P_b^{(m)} &= \frac{1}{2}\mathbf{K}_b \times \mathbf{B}(b) = \hat{\mathbf{r}} \frac{\mu_0 I^2}{2(2\pi b)^2} \end{aligned} \quad (13)$$

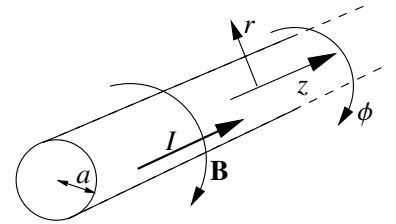


Fig. 4

Anche qui il fattore $1/2$ tiene conto del fatto che $\mathbf{B}$ è discontinuo attraverso la superficie. A differenza della pressione elettrostatica, la componente magnetica tende ad allontanare le due armature.

2

a) Per la simmetria cilindrica del problema $\mathbf{E} = E(r, z)\hat{\mathbf{r}}$. Inoltre, essendo $\mathbf{E}$ parallelo alla superficie di separazione tra dielettrico e vuoto sarà continuo a tale superficie per cui $\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}}$. Calcolando il flusso del vettore $\mathbf{D} = \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E}$ su una superficie cilindrica coassiale al conduttore si ottiene

$$Q = \epsilon_0 2\pi r \frac{h}{2} E + \epsilon_0 \epsilon_r 2\pi r \frac{h}{2} E = \frac{E \epsilon_0 \pi r h (1 + \epsilon_r)}{2}, \quad \text{da cui} \quad E = \frac{2Q}{\pi \epsilon_0 (1 + \epsilon_r) h r} \quad (14)$$

b) Possiamo applicare l'equazione di continuità della carica alla stessa superficie cilindrica del punto precedente

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{-h/2}^0 \frac{1}{\rho} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{\rho} \pi r \frac{h}{2} \frac{2Q}{\pi \varepsilon_0 (1 + \varepsilon_r) h r} = -\frac{Q}{\rho \varepsilon_0 (1 + \varepsilon_r)} \equiv -\frac{1}{\tau} Q \quad (15)$$

che ha soluzione $Q(t) = Q(0)e^{-t/\tau}$. Numericamente

$$\tau \simeq 7 \times 10^{-11} \text{ s} \quad (16)$$

3

a) Possiamo considerare il sistema come sovrapposizione di una sfera uniformemente magnetizzata con magnetizzazione $\mathbf{M}$ e di un cilindro con magnetizzazione uniforme $-\mathbf{M}$.

Per analogia al corrispondente e noto caso elettrostatico, all'interno di una sfera uniformemente magnetizzata $\mathbf{H}_{int} = -\frac{\mathbf{M}}{3}$ da cui si ottiene

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}_{int} + \mathbf{M}) = \frac{2\mu_0\mathbf{M}}{3} \quad (17)$$

Il cilindretto di polarizzazione $-\mathbf{M}$ si comporta invece come un solenoide di corrente superficiale $nI = -M$, si ha infatti una densità superficiale di corrente

$$\mathbf{K} = -\mathbf{M} \times \hat{\mathbf{r}} = -M\hat{\phi} \quad (18)$$

e dunque un contributo al campo magnetico $\mathbf{B} = -\mu_0\mathbf{M}$.

Sommando i due contributi si ha all'interno della cavità un campo di intensità

$$\mathbf{B}_{tot} = \mathbf{B}_{sph} + \mathbf{B}_{sol} = -\frac{\mu_0\mathbf{M}}{3} \quad (19)$$

In accordo col fatto che, essendo i campi paralleli all'asse del cilindro, $\mathbf{H}$ deve essere continuo attraverso la superficie laterale del cilindro stesso.

b) Con ragionamento analogo al caso precedente per il campo elettrico dovuto solamente alla sfera uniformemente carica si ha

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} \quad (20)$$

Per effetto della polarizzazione $-\mathbf{P}$ del cilindro si ha una distribuzione di carica superficiale sulle due basi del cilindro

$$\sigma = -\mathbf{P} \cdot \pm \hat{\mathbf{r}} \simeq -\mathbf{P} \cdot \pm \hat{\mathbf{z}} = \mp P \quad (21)$$

Tale distribuzione porta delle correzioni al campo di ordine $(a/h)^2$ rispetto a quelle della sfera uniformemente carica, per cui il campo all'interno della cavità all'ordine leading é analogo a quello di una sfera uniformemente carica. Questo è in accordo con il fatto che $\mathbf{E}$ è parallelo all'asse del cilindro, quindi deve essere continuo tra dentro e fuori dal cilindro stesso.