

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2020-2021

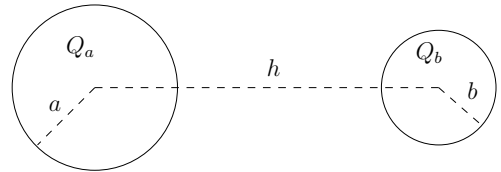
Compito di Fisica 2 (07/12/2020)

1

Due sfere conduttrici A e B aventi raggio rispettivamente a e b sono poste a distanza $h > a + b$ fra i propri centri. Le sfere sono isolate e posseggono rispettivamente le cariche Q_a e Q_b . Calcolare il potenziale di ciascuna sfera approssimato

a) all'ordine zero in a/h o b/h , trascurando gli effetti di induzione elettrostatica,

b) al primo ordine in a/h o b/h , considerando gli effetti di induzione.

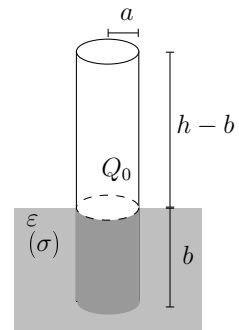


2

Un cilindro conduttore di raggio $a = 0.05$ m e lunghezza $h = 2$ m possiede inizialmente la carica $Q_0 = 10^{-7}$ C ed è immerso per un tratto $b = 0.5$ m in acqua di mare (permittività relativa $\epsilon_r \simeq 80$, conducibilità $\sigma \simeq 5 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$). Trascurando gli effetti di bordo, calcolare

a) il campo elettrico in funzione di Q e il suo valore iniziale (V/m) alla superficie del conduttore,

b) la legge temporale e il tempo caratteristico (in s) con cui il cilindro si scarica.

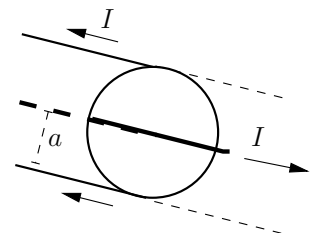


3

Un cavo coassiale è costituito da un conduttore cilindrico cavo di raggio a e un filo conduttore centrale sull'asse del cilindro. Una corrente d'intensità I scorre nel filo e, in verso opposto, nel cilindro esterno. Si assuma infinita la lunghezza dei conduttori e trascurabile il loro spessore. Calcolare

a) il campo magnetico all'interno e all'esterno del cavo coassiale,

b) la forza per unità di superficie sul conduttore esterno.

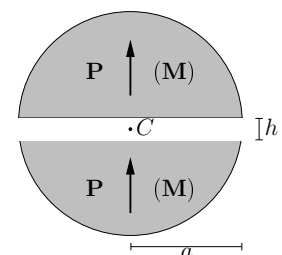


4

Da una sfera di raggio a , costituita di materiale uniformemente polarizzato, si "taglia" uno strato sottile di spessore $h \ll a$ lungo il piano equatoriale perpendicolare alla polarizzazione. Considerando sia il caso di densità di polarizzazione elettrica ($\mathbf{P}$) che magnetica ($\mathbf{M}$), calcolare rispettivamente i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ nel punto C al centro dell'interstizio, approssimati

a) all'ordine zero in h/a ,

b) al primo ordine in h/a .



FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Costanti fisiche

$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m} , \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 , \quad \mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2 , \quad (k_0 = 1/(4\pi\varepsilon_0)) . \quad (1)$$

Equazioni dell'elettrostatica dei mezzi

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_{\text{lib}} + \rho_{\text{pol}}) , & \nabla \times \mathbf{E} &= 0 , \\ \nabla \cdot \mathbf{P} &= -\rho_{\text{pol}} , & \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} , & \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_{\text{lib}} . \end{aligned} \quad (2)$$

Per mezzi lineari con polarizzazione indotta

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} , \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} , \quad \varepsilon_r = 1 + \chi_e \quad (3)$$

Equazioni della magnetostatica dei mezzi

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 , & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} = \mu_0 (\mathbf{J}_{\text{lib}} + \mathbf{J}_{\text{mag}}) , \\ \mathbf{J}_{\text{mag}} &= \nabla \times \mathbf{M} , & \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) , & \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_{\text{lib}} . \end{aligned} \quad (4)$$

Per mezzi lineari con polarizzazione indotta

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} , \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} , \quad \mu_r = 1 + \chi_m \quad (5)$$

Equazione di continuità (ρ densità di carica, $\mathbf{J}$ densità di corrente)

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot \mathbf{J} . \quad (6)$$

In forma integrale, se Q è la carica contenuta in una superficie chiusa S ,

$$\frac{dQ}{dt} = -I = -\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} . \quad (7)$$

Forza magnetica su un elemento infinitesimo di corrente

$$d\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} d^3r = I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} . \quad (8)$$

dove l'ultima eguaglianza vale per un elemento infinitesimo di circuito di spessore trascurabile per cui $\mathbf{J} d^3r = \mathbf{J} S d\boldsymbol{\ell} = I d\boldsymbol{\ell}$.

Legge di Ohm (σ conducibilità)

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} . \quad (9)$$

Campo elettrico (magnetico) interno a una sfera con polarizzazione elettrica (magnetica) uniforme $\mathbf{P}$ ($\mathbf{M}$)

$$\mathbf{E}_{\text{int}} = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} , \quad \mathbf{B}_{\text{int}} = \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M} . \quad (10)$$

Campo magnetico al centro di una spira circolare di raggio a con asse lungo $\hat{\mathbf{z}}$ e percorsa dalla corrente I

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2a} \hat{\mathbf{z}} . \quad (11)$$

SOLUZIONI

1

a) Trascurando gli effetti di induzione, le cariche sono distribuite uniformemente sulle superfici delle sfere, così che campo e potenziale generati da ciascuna sfera sono analoghi a quelli che si avrebbero concentrando la carica al centro della sfera, ovvero

$$\phi_a(r_a) = k_0 \frac{Q_a}{r_a}, \quad \phi_b(r_b) = k_0 \frac{Q_b}{r_b}, \quad (12)$$

dove r_a e r_b sono le distanze dai centri delle due sfere; il potenziale totale in un punto è la somma dei due potenziali. Il valore del potenziale alla superficie di ciascuna sfera è quindi

$$V_a = V_a(a) = k_0 \frac{Q_a}{a}, \quad V_b = V_b(b) = k_0 \frac{Q_b}{b}. \quad (13)$$

b) Per considerare approssimativamente gli effetti di induzione, consideriamo la carica Q_b come puntiforme ai fini di calcolare le cariche indotte sulla sfera A dal campo generato dalla sfera B . Il problema sarebbe allora risolto ponendo una carica immagine $q_a = -(a/b)Q_b$ sulla congiungente dei centri, a distanza $a' = a^2/b$ dal centro della sfera A , e una carica immagine $Q_a - q_a$ al centro della sfera. Infatti, poiché la somma dei potenziali generati da Q_b e q_a si annulla sulla superficie della sfera A , il potenziale sulla superficie è dovuto alla sola carica al centro e ha il valore

$$V_a = k_0 \frac{Q_a - q_a}{a} = k_0 \frac{Q_a}{a} + k_0 \frac{Q_b}{b} \quad (14)$$

che è costante sulla superficie. Per il teorema di Gauss la carica totale sulla sfera A è la somma di tutte le cariche immagine ovvero $(Q_a - q_a) + q_a = Q_a$, quindi sono soddisfatte sia la condizione di sfera equipotenziale sia che la carica totale sia Q_a . Notare che il risultato ha anche un'interpretazione più banale: il potenziale totale è dato da quello della sfera A isolata più il potenziale generato da B su A nell'approssimazione in cui il potenziale sia uniforme sul volume della sfera.

In maniera del tutto analoga si considera l'effetto di A su B , ponendo le cariche immagine $q_b = -(b/a)Q_a$ a distanza b^2/a dal centro di B e $Q_b - q_b$ nel centro di B , ottenendo

$$V_b = k_0 \frac{Q_b - q_b}{b} = k_0 \frac{Q_b}{b} + k_0 \frac{Q_a}{a} \quad (15)$$

La soluzione è approssimata perché si trascurano le cariche indotte dal campo generato da q_a su B e da q_b su A , che danno termini di ordine superiore.

Riassumendo,

$$\begin{pmatrix} V_a \\ V_b \end{pmatrix} = k_0 \begin{pmatrix} 1/a & 1/b \\ 1/b & 1/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_a \\ Q_b \end{pmatrix} \quad (16)$$

dove la matrice simmetrica, costante k_0 a parte, è l'inversa della matrice di capacità del sistema.

2

a) La simmetria cilindrica del problema e il trascurare gli effetti di bordo impongono che il campo elettrico $\mathbf{E}$ abbia solo la componente radiale $E_r = E_r(r, z)$ con r la distanza dall'asse del sistema di coordinate cilindriche (coincidente con l'asse del cilindro). Il campo $\mathbf{E}$ risulta così perpendicolare alla

superficie del conduttore e parallelo alla superficie del dielettrico ($z = 0$). Le condizioni di raccordo impongono che la componente parallela del campo sia continua all'interfaccia vuoto-dielettrico, da cui concludiamo che il campo E_r non dipende da z ovvero $E_r = E_r(r)$ con la stessa espressione sia nella regione di vuoto ($z > 0$) che in quella del dielettrico ($z < 0$).

Nelle due regioni, per il vettore $\mathbf{D}$ si ha invece $D_r = \varepsilon_0 E_r$ per $z > 0$ e $D_r = \varepsilon E_r$ per $z < 0$. Applicando il teorema di Gauss per $\mathbf{D}$ ad una superficie cilindrica S coassiale al cilindro avente raggio r e altezza h , si ha

$$Q_0 = \int_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi r \left(\int_0^{h-b} D_r dz + \int_{-b}^0 D_r dz \right) = 2\pi r [\varepsilon_0(h-b) + \varepsilon b] E_r , \quad (17)$$

da cui ricaviamo

$$E_r = \frac{Q_0}{2\pi r [\varepsilon_0(h-b) + \varepsilon b]} . \quad (18)$$

Per $r = a$,

$$E_r(a) \simeq \frac{Q_0}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r a b} \simeq 900 \text{ V/m} \quad (19)$$

b) Nel mezzo, ovvero per $z < 0$, passa una densità di corrente $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ mentre $\sigma = 0$ e $\mathbf{J} = 0$ per $z > 0$. Quindi l'intensità totale di corrente, data dal flusso di $\mathbf{J}$ attraverso la stessa superficie S del punto precedente, è

$$I = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_s \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi r \sigma \int_{-b}^0 E_r dz = \frac{\sigma Q b}{\varepsilon_0(h-b) + \varepsilon b} . \quad (20)$$

L'equazione di continuità impone per $Q = Q(t)$

$$\frac{dQ}{dt} = -I = -\frac{Q}{\tau} , \quad \tau \equiv \frac{\varepsilon_0(h-b) + \varepsilon b}{b\sigma} = \frac{\varepsilon_0}{\sigma} \left[\left(\frac{h}{b} - 1 \right) + \varepsilon_r \right] , \quad (21)$$

con soluzione

$$Q(t) = Q(0) e^{-t/\tau} = Q_0 e^{-t/\tau} . \quad (22)$$

Numericamente $\tau \simeq \varepsilon_0 \varepsilon_r / \sigma \simeq 1.4 \times 10^{-10} \text{ s}$.

3

a)

Per la simmetria del problema, il campo $\mathbf{B} = B_\phi(r) \hat{\phi}$ in coordinate cilindriche con l'asse coincidente con l'asse del cavo. Le linee di forza sono quindi circonferenze centrate sull'asse e la circuitazione lungo di esse vale

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 2\pi r B_\phi(r) = \mu_0 I_c(r) , \quad (23)$$

dove la corrente concatenata vale

$$I_c(r) = \begin{cases} I & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases} , \quad (24)$$

essendo la corrente nel cilindro esterno esattamente opposta a quella nel filo interno. Si ottiene allora

$$B_\phi(r) = \begin{cases} \mu_0 I / 2\pi r & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases} , \quad (25)$$

b) La corrente superficiale $\mathbf{j}_s$ sul cilindro esterno si può scrivere come

$$\mathbf{j}_s = -\frac{I}{2\pi b} \hat{\mathbf{z}} . \quad (26)$$

La forza per unità di superficie $\mathbf{f}_s$ si può allora scrivere come

$$\mathbf{f}_s = \frac{1}{2} \mathbf{j}_s \times \mathbf{B}(a) , \quad (27)$$

dove l'1/2 rende conto della discontinuità di $\mathbf{B}(r)$ a $r = a$. Si ottiene allora

$$\mathbf{f}_s = \frac{1}{2} \frac{I}{2\pi a} B_\phi(a) \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{2\mu_0} B_\phi^2(a) \hat{\mathbf{r}} , \quad (28)$$

in accordo con l'espressione generale della pressione magnetica su uno strato di corrente superficiale. Che la forza sia diretta verso l'interno del cilindro si poteva prevedere anche dalla repulsione tra correnti antiparallele.

Per l'espressione della forza per unità di superficie si può anche considerare che, preso un elemento infinitesimo di superficie di area $dA = ds dz$ con $ds = a d\phi$ tangente alla circonferenza di sezione, la corrente che lo attraversa in direzione $\hat{\mathbf{z}}$ è $d\mathbf{i} = \hat{\mathbf{z}}(-I)ds/(2\pi a)$. La forza sull'elemento è

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{2} dz d\mathbf{i} \times \mathbf{B}(a) = \hat{\mathbf{r}} \frac{I}{2\pi a} B_\phi(a) dA , \quad (29)$$

da cui

$$\mathbf{f}_s = \frac{d\mathbf{F}}{dA} = \frac{1}{2} dz \frac{I}{2\pi a} B_\phi(a) \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{2\mu_0} B_\phi^2(a) \hat{\mathbf{r}} . \quad (30)$$

4

a) Consideriamo inizialmente il caso di polarizzazione elettrica $\mathbf{P}$. Usando il principio di sovrapposizione, possiamo scrivere il campo al centro dell'intersizio come il campo $\mathbf{E}_s$ in una sfera polarizzata omogenea

$$\mathbf{E}_s = -\frac{1}{3\varepsilon_0} \mathbf{P} , \quad (31)$$

meno il campo $\mathbf{E}_d$ in un disco polarizzato avente raggio a e spessore h :

$$\mathbf{E}_d = -\frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{P} . \quad (32)$$

Quest'ultimo risultato può essere ritrovato notando che il disco è equivalente a un condensatore piano con armature circolari e densità di carica superficiale $\sigma = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \pm P$ rispettivamente sulle faccie superiore e inferiore, per cui il campo $\mathbf{E}_d = -(\sigma/\varepsilon_0)\hat{\mathbf{z}} = -\mathbf{P}/\varepsilon_0$.

Il campo cercato è quindi

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_s - \mathbf{E}_d = +\frac{2}{3\varepsilon_0}\mathbf{P} . \quad (33)$$

Nel caso di polarizzazione magnetica $\mathbf{M}$, sfruttando l'analogia tra le equazioni per $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$ in mezzi senza cariche o correnti libere possiamo scrivere subito la soluzione sostituendo nell'eq. precedente $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$ e $\mathbf{P}/\varepsilon_0 \rightarrow \mathbf{M}$:

$$\mathbf{H}_0 = +\frac{2}{3}\mathbf{M} . \quad (34)$$

Otteniamo quindi per il campo magnetico

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0\mathbf{H}_0 = +\frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M} , \quad (35)$$

che è uguale al campo $\mathbf{B}_s$ in una sfera omogenea. Infatti un disco magnetizzato sottile ha $\mathbf{B}_d = 0$ all'ordine più basso in h/a , come si può ancora ottenere dall'analogia col disco polarizzato elettricamente: infatti da $\mathbf{E}_d = -\mathbf{P}/\varepsilon_0$ si ottiene $\mathbf{H}_d = -\mathbf{M}$ e quindi $\mathbf{B}_d = \mu_0(\mathbf{H}_d + \mathbf{M}) = 0$.

b)

Per raffinare il risultato precedente al primo ordine in h/a conviene partire dal caso di magnetizzazione. Il disco magnetizzato uniformemente è equivalente a una distribuzione di corrente superficiale $\mathbf{j}_s = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$, da cui si ottiene $\mathbf{j}_s = M\hat{\phi}$ localizzata sulla superficie laterale a $r = a$. Questa distribuzione, per $h/a \ll 1$, è simile a quella di una spira circolare di raggio a e corrente $I = j_s h = Mh$. Il campo al centro del disco vale allora

$$\mathbf{B}_d = \frac{\mu_0 I}{2a} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0 h}{2a} \mathbf{M} . \quad (36)$$

Il campo nell'interstizio vale allora

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_s - \mathbf{B}_d = \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M} - \frac{\mu_0 h}{2a}\mathbf{M} = \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M} \left(1 - \frac{3h}{4a}\right) . \quad (37)$$

Il campo $\mathbf{E}_0$ nel caso di polarizzazione elettrica può essere ottenuto da questo risultato scrivendo $\mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_0/\mu_0$ e poi sostituendo $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E}$ e $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{P}/\varepsilon_0$. Si ottiene

$$\mathbf{E}_0 = \frac{2}{3\varepsilon_0}\mathbf{P} \left(1 - \frac{3h}{4a}\right) . \quad (38)$$