

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2022-2023

Compito di Fisica 2 (13/12/2022)

1

Si considerino due lastre conduttrici a forma di disco sottile di raggio a e spessore $b \ll a$, coassiali e parallele a distanza $h \ll a$. Le due lastre sono isolate e hanno entrambi carica Q (dello stesso segno!). Nel seguito si trascurano gli effetti di bordo.

a) Si dica su quali superfici (1, 2, 3 e 4 nella figura) si distribuisce la carica e si calcoli il campo elettrico.

b) Si calcoli la forza tra le due lastre.

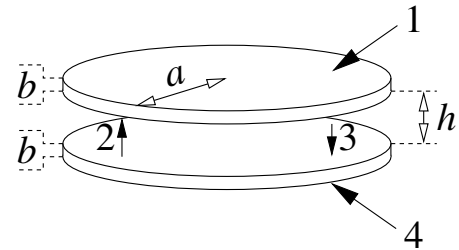


Figura 1:

2

Una sfera conduttrice di raggio a è posta su un supporto a cono di porcellana troncato come in figura, indefinitamente esteso in altezza e tale che l'area della superficie di contatto è $S = \Omega a^2$ dove $\Omega = \pi/5$ è l'angolo solido di apertura del cono. La permittività dielettrica relativa della porcellana è $\epsilon_r \simeq 6$. All'istante iniziale $t = 0$ la sfera possiede la carica Q .

a) Calcolare il campo elettrico in tutto lo spazio a $t = 0$.

b) Tenendo conto che la porcellana ha una resistività $\rho \simeq 10^{11} \Omega \text{ m}$, si calcolino la legge temporale con cui la sfera si scarica e il tempo caratteristico della scarica.

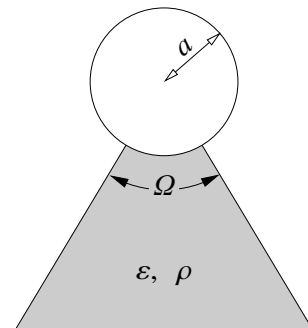


Figura 2:

3

Un condensatore cilindrico è formato da un guscio cilindrico conduttore di raggio interno b e altezza $h \gg b$ e da un cilindro conduttore coassiale di raggio $a < b$. Sui conduttori si trovano rispettivamente le cariche $+Q$ e $-Q$. Il condensatore è posto in rotazione uniforme rispetto al proprio asse con velocità angolare ω . Gli effetti di bordo sono trascurabili.

a) Calcolare il campo magnetico prodotto nelle regioni $r > b$, $b > r > a$, e $r < a$ e stimare il suo valore se $b = 2.7a$, $\omega = 100 \text{ rad/s}$ e tra le armature è mantenuta una d.d.p. costante di 10^4 V .

b) Si inserisce nel condensatore un guscio cilindrico coassiale (non rotante) di altezza h , raggio d e spessore 2δ (con $b > r + \delta$ e $r - \delta > a$) formato da un materiale ferromagnetico di permittività magnetica relativa $\mu_r \simeq 10^3$. Calcolare il campo magnetico all'interno del guscio ferromagnetico.

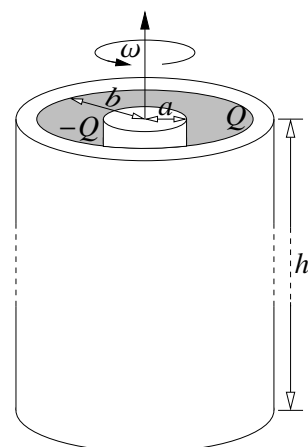


Figura 3:

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*. Laddove sono richieste risposte numeriche sono sufficienti 1 o 2 cifre significative.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Costanti fisiche

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2. \quad (1)$$

Equazione di continuità della carica

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (2)$$

Legge di Ohm microscopica (ρ resistività)

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{E}}{\rho} \quad (3)$$

Equazioni dell'elettrostatica di un mezzo materiale lineare con permittività dielettrica $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{lib}}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \quad (4)$$

(per il vuoto $\varepsilon_r = 1$)

Equazioni della magnetostatica di un mezzo materiale lineare con permittività magnetica μ

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (5)$$

Capacità per unità di lunghezza di un condensatore cilindrico coassiale con raggio interno a e raggio esterno b :

$$C = \frac{dC}{dh} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)} \quad (6)$$

Superficie S intersecata sulla superficie di una sfera di raggio r dalla superficie laterale di un cono con apice al centro della sfera e apertura di Ω steradiani (Fig. 4):

$$S = \Omega r^2$$

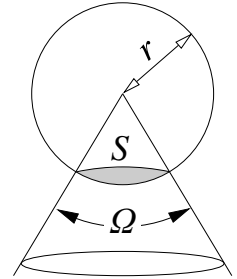


Figura 4:

SOLUZIONI

1

a) La carica si distribuisce uniformemente sulle superfici esterne (1) e (4), in modo tale che il campo elettrico dentro ai due conduttori sia nullo. Infatti, detto z l'asse verticale della figura, la distribuzione uniforme $\sigma = Q/\pi a^2$ su (1) genera un campo $-\hat{z}\sigma/(2\varepsilon_0)$ nel semispazio inferiore, mentre (4) genera un campo $+\hat{z}\sigma/(2\varepsilon_0)$ nella stessa regione di spazio. Il campo all'esterno delle lastre vale $\pm\hat{z}\sigma/\varepsilon_0 = \hat{z}Q/(\varepsilon_0\pi a^2)$, cioè lo stesso di un piano infinito dotato di densità superficiale di carica $\sigma' = 2\sigma$.

b) La forza è repulsiva e vale in modulo Q moltiplicato il campo elettrico generato da una delle due lastre, cioè $Q\sigma/(2\varepsilon_0) = Q^2/(2\pi\varepsilon_0 a^2)$. Allo stesso risultato si si sarebbe arrivati passando per la pressione elettrostatica $p_e = \sigma(E_{\perp}^{\text{ext}} + E_{\perp}^{\text{int}})/2$, oppure usando la relazione $\mathbf{F} = -\nabla U_e$.

2

a) Il campo elettrico è radiale e continuo sull'interfaccia porcellana-aria, quindi $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{r}} E_r(r)$. E' banalmente nullo all'interno della sfera per le ipotesi che sia un conduttore. Usando il teorema di Gauss su una superficie sferica di raggio r concentrica con la sfera conduttrice, e chiamando $\vec{D}_{1,2}$ rispettivamente il campo di spostamento $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ nell'aria e nella porcellana, si ottiene:

$$Q_0 = \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = (4\pi - \Omega)r^2 D_1 + \Omega r^2 D_2 = \quad (7)$$

$$= (4\pi - \Omega) r^2 \varepsilon_0 E_r + \Omega \varepsilon_0 \varepsilon_r E_r = \quad (8)$$

$$= 4\pi \varepsilon_0 r^2 \left[1 + (\varepsilon_r - 1) \frac{\Omega}{4\pi} \right] E_r \quad (9)$$

da cui

$$E_r(r) = \frac{Q_0}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \frac{1}{1 + (\varepsilon_r - 1) \frac{\Omega}{4\pi}} \quad (10)$$

b) Integrando l'equazione di continuità su una superficie sferica di raggio a concentrica con la sfera conduttrice, otteniamo $\dot{Q} = - \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -(E_r(a)/\rho) \cdot \Omega a^2 \equiv -Q/\tau$, con $\tau = \rho \varepsilon_0 [(4\pi/\Omega - 1) + \varepsilon_r]$. La legge temporale di scarica è pertanto $Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$. Con il nostro valore $\Omega = \pi/5$ si ha $\tau = 25$ s.

3

a) La carica si distribuisce sulla superficie interna del guscio e su quella esterna del cilindro. A causa della rotazione, su queste superfici si genera una densità lineare di corrente superficiale di valore $K = \pm(\omega/2\pi)Q/h$. I due conduttori in rotazione sono analoghi ad altrettanti solenoidi infiniti coassiali con densità lineare di corrente $\pm K$, pertanto il campo magnetico è nullo per $r > b$, vale $\vec{B} = +\hat{\mathbf{z}} \mu_0 K = +\hat{\mathbf{z}} \mu_0 \omega Q/(2\pi h)$ per $a \leq r \leq b$ ed è nullo per $r < a$ perché i due campi magnetici si annullano a vicenda all'interno del solenoide di raggio minore. Se tra le armature è presente una d.d.p. V , possiamo determinare Q/h sapendo che

$$V = - \int_a^b E_r dr = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 h} \ln(b/a), \quad (11)$$

dove si è tenuto conto del fatto che $E_r(r) = -Q/(2\pi \varepsilon_0 h r)$. Quindi $Q/h = 2\pi \varepsilon_0 V/\ln(b/a)$ e dunque $B = \mu_0 Q\omega/(2\pi h) = V\omega/(c^2 \ln b/a) \approx 0.11 \times 10^{-10}$ T.

b) In presenza di un materiale ferromagnetico, il campo $\mathbf{B}$ al suo interno vale $\mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$, dove $\mathbf{H}$ si può trovare integrando $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ su un opportuna superficie, ad esempio una spira rettangolare che si concateni con la corrente del cilindro esterno, quindi B vale μ_r -volte il campo magnetico trovato al punto precedente. Infatti $\mathbf{H}$ è parallelo alla superficie (e all'asse) del guscio, quindi è continuo, mentre abbiamo $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$.