

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2022-2023

Compito di Fisica 2 (12/12/2023)

1

Un cavo coassiale è costituito da un filo cilindrico infinito conduttore avente raggio a e un guscio esterno cilindrico coassiale di raggio $b > a$ e spessore trascurabile. Nel conduttore interno scorre l'intensità di corrente I e sulla sua superficie si trova una densità di carica per unità di lunghezza λ . Per $r > b$ i campi elettrico e magnetico sono nulli. Calcolare

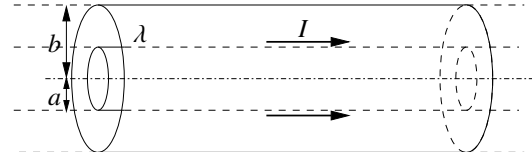


Figura 1:

- a) il campo elettrico e magnetico nella regione $a < r < b$,
- b) la densità lineare di carica e l'intensità di corrente sul guscio esterno.
- c) Una particella carica si muove all'interno del cavo con velocità $\mathbf{V}$ senza subire deflessioni; determinare il valore di $\mathbf{V}$.

2

Due sfere conduttrici identiche di raggio $a = 1.0$ m sono immerse in acqua pura (conducibilità $\sigma = 6.4 \times 10^{-6}$ S/m e permittività dielettrica $\epsilon_r = 78.5$). La distanza tra i centri è $b = 10$ m. A $t = 0$ sulle cariche si trovano rispettivamente le cariche $\pm Q = \pm 1.0 \times 10^{-8}$ C.

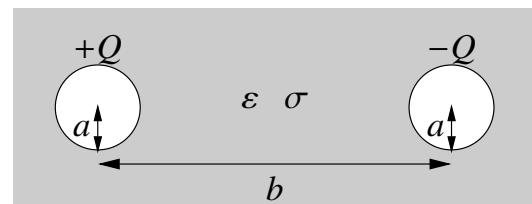


Figura 2:

- Assumendo di trascurare gli effetti di induzione elettrostatica, calcolare per $t > 0$
- a) l'intensità di corrente I che scorre tra le sfere e il tempo di scarica,
 - b) la differenza di potenziale elettrico e la resistenza tra le sfere.
 - c) Si dica, anche solo qualitativamente, se le risposte a) e b) sono modificate da effetti di induzione elettrostatica.

3

Si consideri un toro a sezione rettangolare avente raggio interno a , raggio esterno $b > a$ e altezza $h \ll a$. Il materiale del toro ha una polarizzazione magnetica $\mathbf{M}$ permanente parallela all'asse.

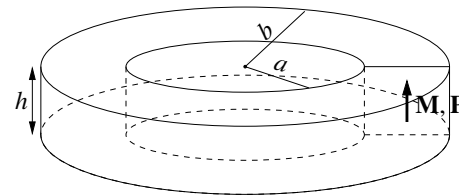


Figura 3:

- a) Calcolare il campo magnetico al centro del toro.
- b) Considerando ora il caso di polarizzazione elettrica ($\mathbf{P}$) calcolare il campo elettrico al centro del toro.
- c) Si consideri ora il caso $h \gg a$ (lungo cilindro con cavità coassiale) e si risponda di nuovo alle domande a) e b).

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*. Laddove sono richieste risposte numeriche sono sufficienti 1 o 2 cifre significative.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Costanti fisiche

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} , \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 . \quad (1)$$

Equazione di continuità della carica

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 . \quad (2)$$

Legge di Ohm microscopica (ρ resistività, σ conducibilità)

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}}{\rho} \quad (3)$$

Forza di Lorentz su una particella puntiforme di carica q

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (4)$$

Equazioni dell'elettrostatica di un mezzo materiale lineare con permittività dielettrica $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{lib}} , \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} . \quad (5)$$

(per il vuoto $\varepsilon_r = 1$)

Equazioni della magnetostatica di un mezzo materiale lineare con permittività magnetica μ

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} . \quad (6)$$

SOLUZIONI

1

a) Data la simmetria cilindrica, le componenti non nulle dei campi sono (in coordinate cilindriche) $E_r = E_r(r)$ e $B_\phi = B_\phi(r)$. Applicando il teorema di Gauss a una superficie coassiale di raggio r (con $a < r < b$) si ottiene

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} . \quad (7)$$

Applicando il teorema di Ampère al cerchio di raggio r (con $a > r > b$) si ottiene

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} . \quad (8)$$

b) Dato che i campi sono nulli per $r > b$, sull'interno del conduttore deve essere presente la densità lineare $-\lambda$ e scorrere la corrente $-I$.

Un altro modo di calcolare la densità di carica lineare è osservare che la discontinuità del campo a $r = b$ fornisce la densità di carica superficiale σ_b ,

$$\sigma_b = -\epsilon_0 E_r(r = b^-) = -\frac{\lambda}{2\pi b} , \quad (9)$$

da cui la densità lineare $\lambda_b = 2\pi b \sigma_b = -\lambda$. Un ragionamento analogo si può fare per la corrente superficiale

$$K_b = -\frac{1}{\mu_0} B_\phi(r = b^-) = -\frac{I}{2\pi b} , \quad (10)$$

e $I_b = 2\pi b K_b = -I$.

c) Dalla condizione

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = 0 \quad (11)$$

segue che $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{z}}$ e in modulo

$$V = \frac{E_r}{B_\phi} = \frac{\lambda}{I} c^2 , \quad (12)$$

con la condizione necessaria $\lambda/I < 1/c^2$.

2

a) Prendendo una superficie chiusa S intorno una delle due sfere, l'equazione di continuità in forma integrale fornisce

$$-\frac{dQ}{dt} \equiv I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\sigma \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sigma}{\epsilon} Q , \quad (13)$$

dove nell'ultima eguaglianza si è applicato il teorema di Gauss. Quindi

$$Q(t) = Q e^{-t/\tau} , \quad \tau = \frac{\epsilon}{\sigma} . \quad (14)$$

Con i dati del problema il tempo di scarica è $\tau \simeq 1.1 \times 10^{-4}$ s.

b) La differenza di potenziale tra le due sfere si può ottenere integrando il campo elettrico lungo la congiungente tra i centri:

$$E_z = \frac{k_0 Q}{\varepsilon_r z^2} + \frac{k_0 Q}{\varepsilon_r (b-z)^2}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} V &= - \int_a^{b-a} E_z dz = - \frac{k_0 Q}{\varepsilon_r} \left[-\frac{1}{z} + \frac{1}{b-z} \right]_a^{b-a} = -2 \frac{k_0 Q}{\varepsilon_r} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b-a} \right) \\ &\simeq - \frac{2k_0 Q}{\varepsilon_r a}, \end{aligned} \quad (16)$$

dove l'ultima eguaglianza approssimata vale per $a/b \ll 1$. In questo limite

$$R = \frac{|V|}{I} = \frac{1}{2\pi a \sigma}. \quad (17)$$

Con i dati del problema $V \simeq 180 \text{ V}/\varepsilon_r = 2.3 \text{ V}$, $R \simeq 2.5 \times 10^4 \Omega$.

c) Poiché le sfere sono isolate, la carica su ogni sfera a un certo istante è indipendente dagli effetti di induzione e quindi l'argomento della risposta **a)** rimane valido. Gli effetti di induzione (modellizzabili con le cariche immagine) cambiano la forma del campo elettrico e il potenziale relativo delle sfere, quindi cambieranno il calcolo di R (con termini di ordine a/b).

3

a) La corrente superficiale di magnetizzazione sulle superfici laterali esterna e interna vale $\mathbf{K} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} = \pm M \hat{\phi}$ rispettivamente. Il sistema è modellizzabile come due spire concentriche di raggi a e b aventi stessa intensità di corrente $I = Mh$ ma circolante in segni opposti. Il campo al centro, diretto lungo l'asse del toro, risulta

$$B_c = \frac{\mu_0 I}{2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = \frac{\mu_0 M h}{2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right). \quad (18)$$

Il corrispondente campo $H_c = B_c/\mu_0$ essendo nel vuoto.

b) La soluzione del problema si ottiene con le sostituzioni $H_c \rightarrow E_c$ e $M \rightarrow P/\varepsilon_0$:

$$E_c = \frac{P h}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right). \quad (19)$$

c) In questo caso il sistema polarizzato magneticamente è equivalente a due solenoidi coassiali con stessa corrente superficiale ma opposta in segno, che quindi danno in modulo lo stesso campo indipendentemente dal raggio: $B_c = 0$. Per la stessa analogia di cui sopra, $E_c = 0$ nel sistema polarizzato elettricamente.

Una soluzione più accurata si ottiene osservando che nel cilindro polarizzato elettricamente le cariche di polarizzazione sulle basi valgono

$$Q_p = \pm P \pi (b^2 - a^2), \quad (20)$$

così che al centro del solenoide il campo è

$$E_c \simeq \frac{2P \pi (b^2 - a^2)}{\varepsilon_0 (h/2)^2}, \quad (21)$$

e un risultato analogo si ottiene per B_c .