

# Appunti su Scariche di Plasma per Applicazioni Tecnologiche

Andrea Macchi\*

*polyLAB, CNR-INFN, Dipartimento di Fisica "E. Fermi", Università di Pisa, Largo  
B. Pontecorvo 3, 56127 Pisa, Italy*

(Dated: 3 maggio 2011)

---

\*Electronic address: [macchi@df.unipi.it](mailto:macchi@df.unipi.it)

# Contents

<b>I. Introduzione</b>	4
<b>II. Regimi DC. Il tubo di scarica</b>	6
A. Scariche oscure. Regime di Townsend	6
B. Coefficiente di ionizzazione	9
C. Breakdown elettrico	10
D. Scariche luminose ( <i>glow</i> )	13
1. Scariche “normali”	13
E. La regione del catodo	14
F. Descrizione delle regioni luminose	16
G. La corrente in regime di <i>normal glow</i>	16
1. Altri tipi di scariche “glow”	17
H. Archi elettrici	18
1. Forze magnetiche ed effetto <i>pinch</i>	20
2. Formazione di getti	21
3. Bilancio energetico	21
<b>III. Scariche transienti: la <i>Dielectric Barrier Discharge</i> (DBD)</b>	23
4. Fenomenologia della DBD	23
5. Parametri caratteristici della DBD	24
6. Modello semplice della scarica DBD	26
7. DBD a corrente alternata	31
8. Figura di Lissajous	33
9. Effetti collettivi	33
<b>IV. <i>Sheaths</i> DC</b>	35
A. Sheath non collisionale. Criterio di Bohm	37
B. La regione di “presheath”. Il problema del raccordo	41
C. Sheath ad alto voltaggio. Legge di Child	42
D. Sonde elettrostatiche	43
<b>V. Modelli di scariche AC</b>	44

A. Scariche capacitive in AC	44
1. Modello omogeneo	45
2. Bilancio di energia. Riscaldamento Ohmico	47
3. Riscaldamento non collisionale o stocastico	49
4. Modelli e schemi avanzati	51
B. Scariche induttive	53
C. Scariche elettromagnetiche	56
1. ECR	56
2. Helicon	58
3. Onde di superficie	58
<b>A.</b>	60
1. Legge di Child per il diodo a vuoto	60
<b>Riferimenti bibliografici</b>	64

## I. INTRODUZIONE

Lo studio dei plasmi debolmente ionizzati che si possono creare inducendone elettricamente una scarica in un gas ha prima di tutto un interesse storico; l'uso del termine "plasma" risale infatti a Langmuir (1928) che l'usò per indicare la regione quasi-neutra in un tubo di scarica (sez.II.G.1). Alcuni problemi "classici", quali la modellizzazione della regione di contatto tra plasma ed elettrodi metallici (sez.IV) hanno origine in questo contesto ma sono tutt'oggi oggetto di indagine e discussione.

Lo stesso Langmuir ricevette nel 1932 il premio Nobel per il suo contributo alla chimica delle superfici. Questo ci introduce alla seconda motivazione dello studio delle scariche a plasma, ovvero alla loro applicazione tecnologica per il trattamento e la modifica superficiale dei materiali. La base di queste applicazioni è il fatto che la generazione di una scarica in un gas chimicamente inerte produce una quantità di specie atomiche e ioniche chimicamente attive, che interagiscono fortemente con la superficie dei materiali modificandone l'energia superficiale e le proprietà connesse (adesività, bagnabilità, ...), o rimuovendo impurezze e distruggendo microorganismi (pulizia, sterilizzazione), o formandovi strati sottili ed eventualmente nanostrutture (deposizione e nanofabbricazione al plasma). Un esempio particolarmente importante è l'applicazione alla microincisione (*etching*) del Silicio per la produzione di microprocessori, che oltre a contribuire al raggiungimento di precisione nanometrica nella fabbricazione dei circuiti integrati ha permesso fra l'altro la riduzione dell'inquinamento dovuto agli agenti chimici usati in precedenza.

La produzione di specie chimiche non è però limitata alle superfici in contatto con essa, ma può avvenire anche nel volume stesso del gas, come ad esempio nella produzione di Ozono in celle di scarica del tipo di quelle che saranno descritte nella sez.III. Da questo punto di vista i fulmini nell'atmosfera terrestre costituiscono un reattore al plasma naturale, che probabilmente contribuisce a generare molecole essenziali alla vita, ad esempio inducendo la fissazione (ossidazione) dell'azoto poi assorbito dalle piante (v. ad es. Uman, 2001, e referenze incluse). Questo riferimento ai fulmini richiama un'ulteriore applicazione delle scariche come sorgenti luminose nella regione visibile ma in particolare nell'ultravioletto, funzione che trova applicazione nei familiari "schermi al plasma" (v. sez.III).

Il principale fattore di merito delle scariche a plasma per l'induzione di particolari reazioni chimiche o processi atomici è che questi ultimi richiedono comunemente un'alta energia di attivazione e sono comunque difficilmente ottenibili per via chimica "tradizionale"; la rottura dei legami dei reagenti e la formazione di specie ionizzate che partecipano ad una reazione o la catalizzano è indotta dagli elettroni o dagli ioni ad energia relativamente alta presenti nel plasma. È quindi spesso fondamentale

che il plasma prodotto in una scarica sia in genere lontano dall'equilibrio termodinamico; infatti nel caso di un trattamento superficiale di un materiale, se la reazione desiderata dovesse avvenire in condizioni di equilibrio termico la temperatura sarebbe tale da distruggere il materiale da trattare. In generale nelle scariche le particelle energetiche che inducono le reazioni desiderate possono essere una minoranza delle specie presenti, cosicché la densità media di energia del plasma è modesta e non induce danneggiamenti del materiale da trattare o degli elettrodi del dispositivo di scarica.

Nonostante lo studio delle scariche di plasma abbia una lunga storia, e dispositivi di scarica siano utilizzati efficientemente e affidabilmente in macchinari e processi industriali, la fisica sottostante non è completamente ben compresa. In molti aspetti, una migliore comprensione di base, un raffinamento dei modelli fisici sottostanti e la possibilità di produrre simulazioni numeriche avanzate a partire da essi, rappresenta la via al progresso e l'ottimizzazione delle applicazioni tecnologiche relative.

In questi appunti ci limitiamo ad una descrizione sommaria della fisica delle scariche, secondo il seguente ordine. Dapprima forniamo una descrizione del classico “tubo di scarica” seguendone la caratteristica tensione–corrente attraverso i vari regimi (scariche “oscuere” e “luminose”, archi) e accenniamo poi brevemente alla differenza tra regimi di alimentazione in continua o a corrente alternata di data frequenza. Quindi consideriamo il problema della formazione delle *sheaths*, ovvero degli strati carichi vicino alle superfici degli elettrodi in contatto col plasma, la cui fisica determina la maggior parte degli effetti di modifica delle superfici. Infine, trattiamo le nozioni di base per dispositivi di scarica che operano alla pressione atmosferica, con particolare riguardo allo schema “DBD”, e un accenno agli obiettivi della ricerca attuale.

Nel seguito ci limitiamo ad un livello qualitativo o semi-quantitativo senza entrare dettagli tecnici, che possono essere trovati in altre fonti (Lieberman and Lichtenberg, 2005; Roth, 1995, 2001). Tralasciamo anche gli aspetti di “chimica del plasma” relativi a come specie ionizzate o particelle ad energia relativamente alta reagiscono per formare nuove specie chimiche (vedere ad esempio (Chan *et al.*, 1996) per una rassegna orientata alla modifica superficiale di materiali polimerici). La trattazione è essenzialmente basata su due testi di riferimento (Roth, 1995, 2001) più altre eventuali fonti sparse<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Referenze probabilmente significative ma non facilmente reperibili sono indicati non in bibliografia ma nelle note a piè di pagina.

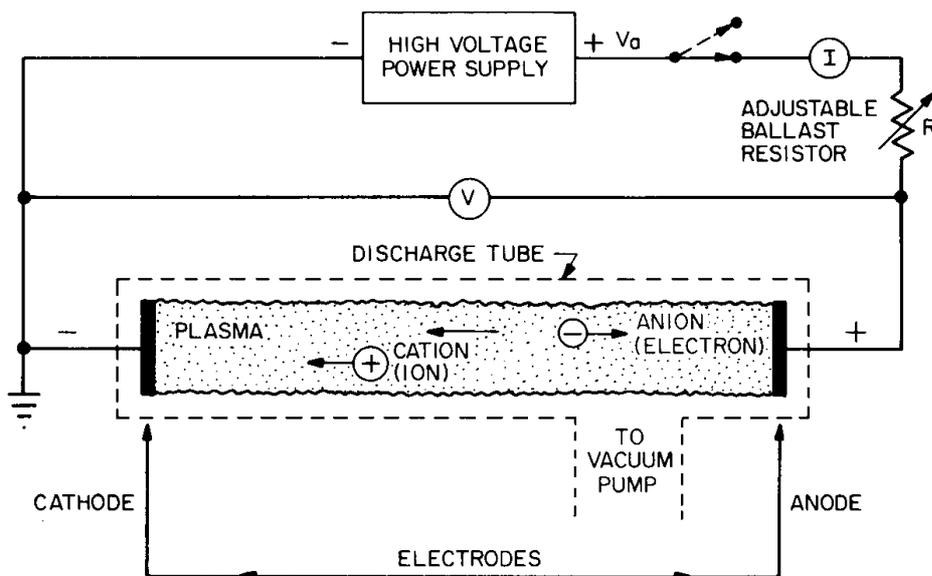


Figura 1 Schema dell'apparato per misurare la caratteristica  $V-I$  di un tubo di scarica a bassa pressione (Roth, 1995, sec.4.9).

## II. REGIMI DC. IL TUBO DI SCARICA

Storicamente, lo studio sperimentale delle scariche in un gas sottoposto ad un campo elettrico costante (scariche in corrente continua o DC) è basato su un tubo di scarica a bassa pressione del tipo mostrato in fig.1. Questo tubo è del tutto simile ai comuni tubi al neon usati per illuminazione.

La misura della caratteristica corrente-tensione ( $V-I$ ) del tubo fornisce l'andamento tipico mostrato in fig.2. Appare quindi evidente come la relazione tra  $V$  e  $I$  sia fortemente nonlineare e come lungo la curva si incontrino transizioni tra differenti regimi, con variazioni molto grandi ed improvvise della conducibilità del gas.

Nei prossimi paragrafi seguiremo l'andamento  $V-I$  lungo la curva di fig.2 descrivendo la fisica dei diversi regimi. Inizialmente, e salvo diverso avviso, ci riferiremo per semplicità ad una geometria piana e unidimensionale, con catodo e anodo planari e separati da una distanza  $d$ .

### A. Scariche oscure. Regime di Townsend

La parte della curva di fig.2 che va dal punto A al punto E corrisponde alla regione di "scarica oscura" (*dark discharge*) in quanto non viene emessa radiazione visibile. Al variare della tensione  $V$ , l'intensità di corrente  $I$  si mantiene dapprima costante (tratto verticale BC della curva  $V-I$  in fig.2); il valore corrispondente  $I_{\text{sat}}$  è detto *corrente di saturazione*. Come discusso nel seguito, in

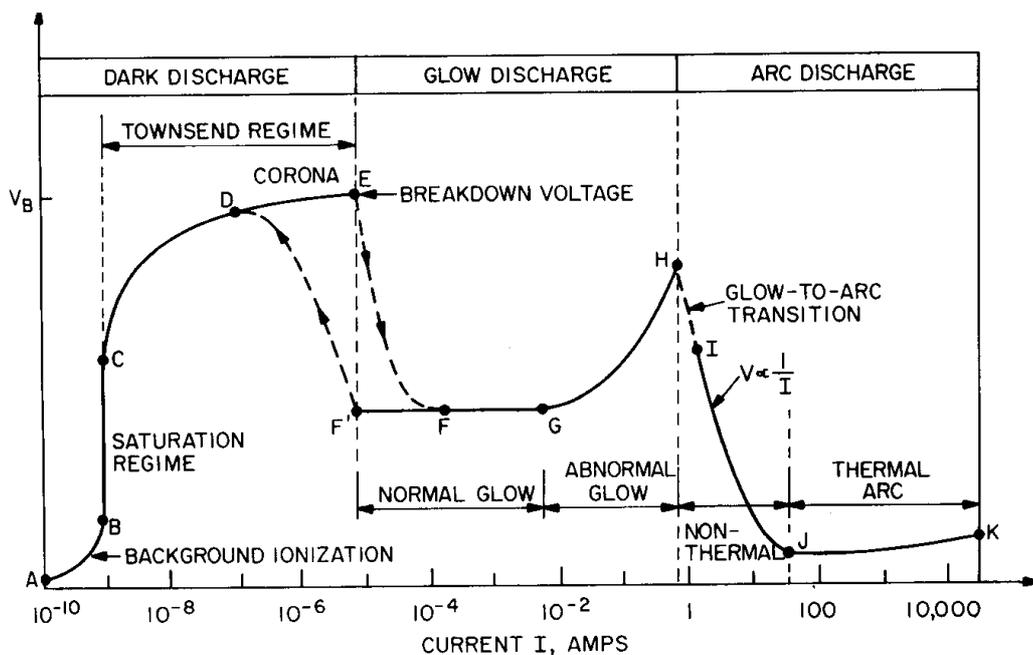


Figura 2 Tipica caratteristica  $V-I$  di un tubo di scarica a bassa pressione alimentato in DC (Roth, 1995, sec.4.9).

questo regime il passaggio di corrente è dovuto al basso livello di ionizzazione presente in un gas (*background ionization*) come risultato dell'azione di raggi cosmici o altre radiazioni ionizzanti. Il campo applicato è in grado di estrarre dal volume gli elettroni e gli ioni liberi ma non di produrre nuova ionizzazione.

Aumentando il valore di  $V$  e quindi del campo elettrico, un elettrone tra due urti successivi può guadagnare abbastanza energia da ionizzare uno ione. Si ha quindi una moltiplicazione a valanga dei portatori di carica che corrisponde ad un andamento esponenziale della corrente in funzione della tensione applicata. Questo regime prende il nome di *scarica di Townsend* (da J. S. E. Townsend 1865-1957).

Nel formulare un modello per la scarica di Townsend, l'ipotesi fondamentale di partenza è che la probabilità che un elettrone effettui una collisione ionizzante con un atomo del gas, liberando un ulteriore elettrone, sia proporzionale alla distanza percorsa. Sia  $x$  la coordinata lungo l'asse del tubo nella direzione che va dal catodo ( $x = 0$ ) all'anodo ( $x = d$ ). Sia  $F_e = F_e(x)$  il flusso di elettroni lungo il tubo di scarica (tale che la densità di corrente degli elettroni è  $J_e = -eF_e$ ) nel punto  $x$ . Nel tratto fra  $x$  e  $x + dx$  il flusso aumenterà proporzionalmente alla lunghezza del tratto, al numero di elettroni entranti, e alla probabilità di collisione ionizzante. In assenza di altri processi, possiamo

quindi scrivere un'equazione della seguente forma

$$dF_e = \alpha F_e dx \quad (1)$$

dove  $\alpha$  è la probabilità di ionizzazione per unità di lunghezza, e prende il nome di (*primo*)<sup>2</sup> *coefficiente di ionizzazione di Townsend*. In generale  $\alpha$  dipende dal campo elettrico; un'espressione per  $\alpha = \alpha(E)$  sarà ricavata nel seguito.

Assumendo che  $\alpha$  sia uniforme (ovvero che non dipenda da  $x$ ), la soluzione generale della (1) è

$$F_e = F_e(0)e^{\alpha x} \quad (2)$$

ed è non banale solo se il catodo fornisce un flusso di elettroni  $F_{ec} \equiv F_e(0) \neq 0$ . Un catodo metallico può emettere elettroni se sottoposto a campi elettrici intensi, se riscaldato ad alte temperature o se irraggiato da radiazione di opportuna frequenza. Ordinariamente, tuttavia, almeno nella parte inferiore della curva  $V - -I$  nel regime di Townsend non si ha un'emissione significativa di elettroni dal catodo. La sorgente "primaria" di elettroni liberi per innescare la scarica è dovuta invece al livello non nullo di *background ionization*. Sia  $S$  il numero di elettroni liberi prodotti nel tubo per unità di volume e di tempo. Se  $S \neq 0$ , la (1) va modificata nel modo seguente

$$dF_e = \alpha F_e dx + S dx. \quad (3)$$

La soluzione generale è allora

$$F_e = \frac{S}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1) + F_{ec}e^{\alpha x}. \quad (4)$$

che è non nulla anche se  $F_{ec} = 0$ . Se  $\alpha = 0$ , cioè se gli elettroni accelerati dal campo elettrico non sono abbastanza energetici da produrre ulteriore ionizzazione, il massimo flusso di elettroni all'anodo deve ridursi a quello corrispondente alla corrente di saturazione  $I_{\text{sat}} = -eF_{\text{sat}}A$ , dove  $A$  è la sezione del tubo. In questa condizione si ha

$$F_e(x) = Sx, \quad F_e(d) = Sd \equiv F_{\text{sat}} \quad (5)$$

per cui possiamo anche scrivere

$$F_e = \frac{F_{\text{sat}}}{\alpha d}(e^{\alpha x} - 1) + F_{ec}e^{\alpha x} \quad (6)$$

---

<sup>2</sup> Questa denominazione è dovuta al fatto che nella teoria della scarica di Townsend si introduce talvolta il *secondo coefficiente di ionizzazione* (Roth, 1995, par.8.4.2); tale definizione è tuttavia ormai desueta e non sarà data in questi appunti.

## B. Coefficiente di ionizzazione

Vogliamo ora derivare un'espressione generale per  $\alpha$ , che risulterà funzione del campo elettrico e della densità di particelle nel tubo (ovvero, equivalentemente, della tensione applicata e della pressione). Definiamo la *distanza di ionizzazione*  $x_I$  come la distanza che un elettrone deve percorrere in un campo elettrico  $E$  per acquistare l'energia necessaria alla ionizzazione degli atomi neutri del gas. Si ha quindi

$$x_I = \frac{I_z}{E}, \quad (7)$$

dove  $I_z$  è il potenziale di ionizzazione dell'atomo.

Durante il cammino l'elettrone può però incorrere in una collisione con uno ione, cambiando direzione e perdendo in pratica la maggior parte dell'energia acquistata dal campo<sup>3</sup>. La probabilità di produrre un evento di ionizzazione è quindi uguale alla probabilità di percorrere un cammino pari a  $x_I$  prima di intercorrere in una collisione con gli ioni. Per la probabilità di collisione per unità di lunghezza scriviamo un'espressione esponenziale

$$P(x) = \frac{1}{\lambda_i} \exp\left(-\frac{x}{\lambda_i}\right), \quad (8)$$

dove  $\lambda_i$  è il cammino libero medio degli elettroni fra due collisioni successive. La normalizzazione è tale che la probabilità di collisione su un cammino infinito diviene unitaria.

In generale il cammino libero medio  $\lambda_i$  è inversamente proporzionale alla densità degli atomi, e si può scrivere  $\lambda_i = 1/n\sigma$  dove  $\sigma$  ha le dimensioni di una superficie ed è detta sezione d'urto. Questa definizione è però poco precisa perché  $\sigma$  in generale dipende dalla velocità dell'elettrone  $v_e$ . Se è nota Indicando con le "brackets"  $\langle, \rangle$  l'operazione sulla funzione di distribuzione degli elettroni (se è nota), in generale si può scrivere  $\lambda_i = \langle v_e \rangle / \nu_{ei}$ , dove  $\nu_{ei} = n \langle \sigma v_e \rangle$  è la frequenza di collisione degli elettroni.

In condizioni isobariche, dove la pressione  $p$  è proporzionale a  $n$  si può scrivere anche la relazione  $1/\lambda_i = Ap$ , dove  $p$  è la pressione del gas e  $A$  è una costante che dipende dal tipo di gas e dalla temperatura degli elettroni. Una relazione di questo tipo ha utilità pratica poiché sperimentalmente la densità viene dedotta dalla misura della pressione .

Per come è stato definito  $\alpha$  nella (8) scriviamo allora

$$\alpha \equiv P(x_I) = \frac{e^{-x_I/\lambda_i}}{\lambda_i} = Ape^{-ApI_z/E}. \quad (9)$$

---

<sup>3</sup> Vi è in generale anche un contributo minore alla perdita di energia dell'elettrone dovuta a processi "secondari" di collisione o eccitazione degli atomi neutri. L'effetto di queste perdite secondarie può essere qualitativamente incluso scrivendo  $x_I = I_z^*/E$  dove  $I_z^* > I_z$  è un potenziale "efficace" di ionizzazione, che tiene conto della perdita di energia.

Si usa in genere riscrivere questa relazione come

$$\frac{\alpha}{p} = A \exp\left(\frac{-C}{E/p}\right) = f\left(\frac{E}{p}\right), \quad (10)$$

in quanto i parametri  $A$  e  $C \equiv AI_z$  vengono misurati sperimentalmente e caratterizzano le scariche per gas di diversa specie. L'ultima eguaglianza esprime il fatto che il rapporto  $\alpha/p$  è una funzione solo del rapporto tra campo elettrico (o tensione applicata) e pressione del gas. Ordini di grandezza tipici sono  $A \sim 10^3 \text{ m}^{-1}\text{Torr}^{-1}$  e  $C \sim 10^4 \text{ V m}^{-1}\text{Torr}^{-1}$ . Per l'aria,  $A = 1220 \text{ m}^{-1}\text{Torr}^{-1}$  e  $C = 36500 \text{ V m}^{-1}\text{Torr}^{-1}$ .

A campo elettrico fissato (ovvero a tensione fissata), esiste una pressione ottimale  $p_{\max}$  per la quale la corrente è massima. Questo corrisponde al massimo di  $\alpha$  come funzione di  $p$ , che si può ottenere dall'equazione

$$\frac{d\alpha}{dp} = A \left(1 - \frac{pC}{E}\right) \exp\left(\frac{-C}{E/p}\right) \doteq 0, \quad (11)$$

da cui troviamo

$$p_{\max} = \frac{E}{C}. \quad (12)$$

Questa relazione, che è quindi comoda per una misura sperimentalmente del parametro  $C$ , prende il nome di *punto di Stoletow* dal nome di colui che la osservò nel 1890, misurando  $C \simeq 37200 \text{ V m}^{-1}\text{Torr}^{-1}$ .

Concludiamo notando che nelle espressioni precedenti possiamo anche sostituire la pressione con la densità di particelle e scrivere

$$\frac{\alpha}{n} = D \exp\left(\frac{-B}{E/n}\right), \quad (13)$$

dove  $D$  ha le dimensioni di una superficie e il "campo ridotto"  $E/n$  ha le dimensioni di una tensione per una superficie e può essere convenientemente misurato in *Townsend* (Td):  $1 \text{ Td} = 10^{-17} \text{ V cm}^2$ .

### C. Breakdown elettrico

Per effetto della ionizzazione a valanga del gas si generano elettroni liberi e ioni che contribuiscono anch'essi alla conduzione con una densità di corrente  $J_i = eF_i$ , essendo  $F_i$  il flusso di ioni e avendo assunto ionizzazione singola, per semplicità. In condizioni stazionarie la corrente totale deve essere la stessa lungo tutto il tubo, quindi in particolare la somma dei flussi di ioni ed elettroni deve essere uguale al catodo e all'anodo:

$$\frac{J_{\text{tot}}}{-e} = F_{\text{tot}} = F_{ec} + F_{ic} = F_{ea} + F_{ia} = F_{ea}, \quad (14)$$

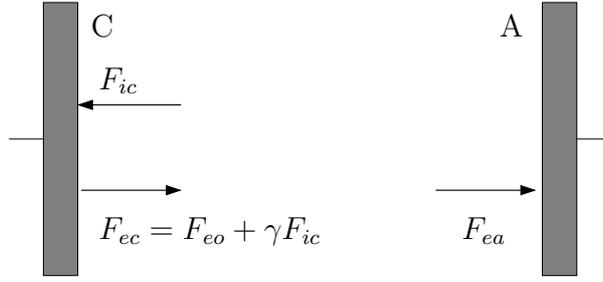


Figura 3 Schematizzazione dei flussi di ioni ed elettroni a catodo (C) e anodo (A)

avendo assunto  $F_{ea} = 0$  perché ordinariamente l'anodo non emette ioni. (Nelle nostre convenzioni, il flusso di ioni ha segno negativo.) Questa situazione è illustrata in Fig.3.

Gli ioni del gas che giungono al catodo, il cui flusso totale è  $F_{ic}$ , si ricombinano con gli elettroni. Inoltre, se un ione giunge al catodo con energia sufficiente, può ivi provocare l'emissione "secondaria" di elettroni. Si ha quindi un contributo  $F_{es}$  al flusso totale di elettroni dal catodo,  $F_{ec}$ , proporzionale al flusso di ioni incidenti sul catodo,  $F_{ic}$ . Definiamo il *coefficiente secondario di emissione elettronica*  $\gamma$  del catodo come

$$\gamma \equiv \frac{F_{es}}{F_{ic}}, \quad (15)$$

ovvero come il numero di elettroni secondari emessi per numero di ioni incidenti. Tipicamente  $\gamma \sim 10^{-2}$ . Il flusso degli elettroni emessi dal catodo è quindi la somma del flusso dovuto alle emissioni secondarie  $F_{es}$  più l'eventuale contributo  $F_{eo}$  dovuto a effetti termoelettrici, fotoelettrici o altri processi:

$$F_{ec} = F_{es} + F_{eo} = \gamma F_{ic} + F_{eo}. \quad (16)$$

Usando la (6), il flusso di degli elettroni all'anodo è

$$F_{ea} = F_e(d) = \frac{F_{\text{sat}}}{\alpha d} (e^{\alpha d} - 1) + F_{ec} e^{\alpha d} \quad (17)$$

Possiamo usare quindi le equazione (14), (16) e (17) per eliminare  $F_{ea}$  e  $F_{ic}$  e risolvere per  $F_{ec}$ . Il risultato è

$$F_{ec} F_{ec} = \frac{F_{eo} e^{\alpha d} + (F_{\text{sat}}/\alpha d)(e^{\alpha d} - 1)}{1 - \gamma(e^{\alpha d} - 1)}. \quad (18)$$

Si ha *breakdown* elettrico quando quest'ultima equazione prevede un flusso infinito di elettroni, ovvero se

$$1 - \gamma(e^{\alpha d} - 1) = 0, \quad \text{i.e.} \quad \ln \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right) = \alpha d, \quad (19)$$

che è nota come *criterio di Townsend*. L'emissione di elettroni secondari ha quindi un effetto di *feedback* rigenerativo nel processo di scarica oscura che tende a fare “esplosione” la corrente totale, provocando una transizione di regime per un dato valore del campo elettrico, ovvero della tensione applicata, che rende vera la (19)

Possiamo riscrivere la (19) come una condizione sul voltaggio  $V_b$  necessario al breakdown utilizzando la (10) per  $\alpha$  e sostituendo  $E = V_b/d$ :

$$Apd \exp\left(\frac{-Cpd}{V_b}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right),$$

$$V_b = \frac{Cpd}{\ln[APd/\ln(1 + 1/\gamma)]} = f(pd). \quad (20)$$

Quindi in geometria piana il valore della tensione di breakdown per un particolare gas è una funzione di  $pd$ . Questa relazione empirica prende il nome di *legge di Paschen* (1889).

Conseguenza della (20) è l'esistenza di un valore di  $pd$  per cui la tensione di breakdown è minima:

$$(pd)_{min} = \frac{e}{A} \ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right), \quad V_{b,min} = \frac{eC}{A} \ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right), \quad (21)$$

dove  $e = 2.718\dots$ . Fissato  $d$  questa condizione può essere quindi scritta come  $p_{min} = (V_{min}/d)/C$ , cioè essa corrisponde al punto di Stoletow.

Valori di  $pd$  più piccoli del valore ottimale corrispondono alla condizione in cui lungo  $d$  il numero di collisioni ionizzanti è piccolo, ovvero  $d$  è minore del cammino libero medio di ionizzazione. Per  $pd$  grandi, gli elettroni perdono maggiori quantità di energia nelle collisioni e quindi campi più intensi sono necessari a sostenere il breakdown. Queste osservazioni giustificano qualitativamente l'esistenza di un minimo nella curva di Paschen, ovvero del punto di Stoletow.

La legge di Paschen può essere convenientemente messa in una forma “universale” nel seguente modo:

$$Y = \frac{X}{1 + \ln X}, \quad Y \equiv \frac{V_b}{V_{b,min}}, \quad X \equiv \frac{pd}{(pd)_{min}}. \quad (22)$$

I valori di  $V_{b,min}$  e  $(pd)_{min}$  sono tabulati per vari gas (per l'aria,  $V_{b,min} = 360$  V e  $(pd)_{min} = 5.7 \times 10^{-3}$  Torr m). La curva universale di Paschen è mostrata in fig.4.

Occorre comunque considerare che, a basse pressioni, i gas tendono a seguire qualitativamente la legge di Paschen, ma con deviazioni significative (v. fig.4 per l'andamento sperimentale per l'aria). Ad alte pressioni ( $\geq 100$  Torr) la legge di Paschen non è più rispettata, il che suggerisce che in tale regime è necessaria una trattazione più sofisticata, presumibilmente a causa di effetti importanti di carica spaziale.

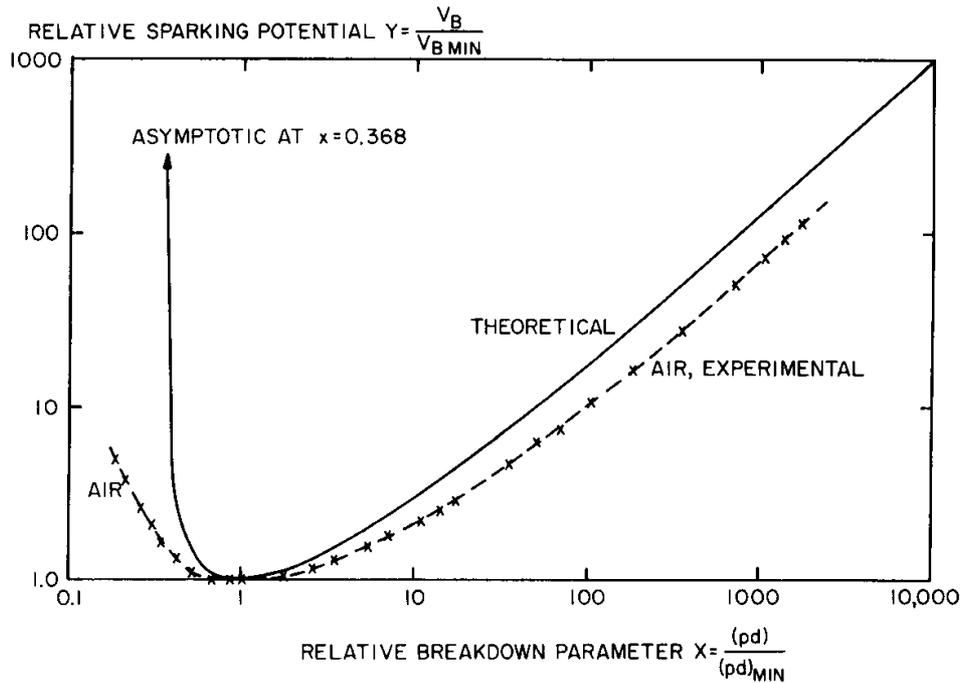


Figura 4 La curva teorica “universale” di Paschen per la tensione di breakdown in funzione di  $pd$ , e l’andamento sperimentale per l’aria (Roth, 1995, fig.8.26).

#### D. Scariche luminose (*glow*)

Un valore infinito della densità di corrente non ha ovviamente significato fisico. Quel che succede oltre la soglia di breakdown è che effetti fisici sin qui trascurati, ovvero l’accumulo di carica spaziale, entrano in gioco e portano ad una autoregolazione della corrente in uno stato stazionario. In un ordinario tubo di scarica alimentato in DC, in condizioni opportune<sup>4</sup> portando la tensione applicata oltre la soglia di breakdown si verifica una transizione dalla scarica “oscura” tipica del regime di Townsend ad una scarica luminosa, detta *glow discharge* (letteralmente “scarica a bagliore”).

##### 1. Scariche “normali”

Sebbene la prima osservazione dettagliata di una *glow discharge* sia stata compiuta già nel 1830 grazie a Faraday, la fenomenologia delle scariche luminose è sorprendentemente ricca e ancora non del tutto compresa. Qui ci limitiamo a descrivere poco più che qualitativamente gli aspetti essenziali di una scarica “normale” (*normal glow discharge*, NGD) dando brevi accenni a regimi “anomali”

<sup>4</sup> Un esempio di condizioni “opportune” per ottenere una scarica NGD è avere un generatore esterno con bassa resistenza interna in grado di far passare una corrente sufficientemente elevata.

nel paragrafo seguente. La figura 5 mostra come appare una tipica NGD in un tubo cilindrico. Si possono comunque generare NGD anche in configurazioni “piane”, ovvero tra piatti paralleli; queste configurazioni hanno particolare interesse per dispositivi industriali.

Il regime di NGD corrisponde al tratto FG della figura 2 nel quale la tensione dipende debolmente dalla corrente totale  $I$  che scorre nel tubo. Questo poiché, come discusso nel seguito, l’accumulo di carica spaziale regola le variazioni di tensione vincolando quest’ultima al valore minimo per il *breakdown* elettrico. Si trova sperimentalmente che anche la *densità* di corrente  $J$  rimane anch’essa approssimativamente costante. Poiché  $I = J\Sigma$ , dove  $\Sigma$  è l’area della sezione del flusso di corrente, la costanza sia di  $I$  che di  $J$  implica la variazione di  $\Sigma$  lungo la curva  $V - -I$ : inizialmente il passaggio di corrente avviene solo attraverso un’area limitata del catodo, che aumenta al crescere della corrente totale, sino all’esaurirsi della superficie disponibile in corrispondenza del punto G della fig.2. In questo caso si ha la transizione al regime “anomalo” di scarica (*abnormal glow discharge*).

### E. La regione del catodo

Il punto fondamentale della dinamica di una NGD è che il campo elettrico vicino alla superficie del catodo, che accelera gli elettroni emessi da quest’ultimo, viene schermato e diventa nullo a una distanza  $d_c$  dal catodo a causa dell’accumulo di carica positiva dovuto alla “fuga” degli elettroni. La regione carica positivamente e di estensione tipica  $d_c$  è per l’appunto detta “regione del catodo”. In geometria piana,  $d_c$  è tale che il prodotto  $pd_c$  assume valori prossimi al minimo della curva di Paschen,  $pd_c \approx (pd)_{min}$ . In queste condizioni la caduta di tensione rispetto al catodo attraverso la regione catodica,  $V_c$ , rimane ancorata al valore minimo di breakdown,  $V(x = d_c) = V_c \approx V_{b,min}$ . Questa condizione autoregolata minimizza la dissipazione nel plasma, che avviene per l’appunto massimamente nella regione del catodo. In altri termini, la moltiplicazione a valanga degli elettroni avviene quasi esclusivamente nella regione del catodo dove gli elettroni vengono accelerati sino all’energia “ottimale”, mentre fuori dalla regione del catodo esiste un campo elettrico debole che sostiene il passaggio di corrente attraverso il tubo. Nel regime di NGD, la caduta di tensione lungo il tubo rimane prossima a  $V_c$  (ovvero la variazione del potenziale dalla regione del catodo sino all’anodo è relativamente piccola) e non dipende (o dipende debolmente) dalla tensione applicata.

Per modellizzare semiquantitativamente la regione del catodo, in prima approssimazione si può assumere che la densità di carica positiva sia costante tra  $x = 0$  e  $x = d_c$ , ovvero che il campo ha un

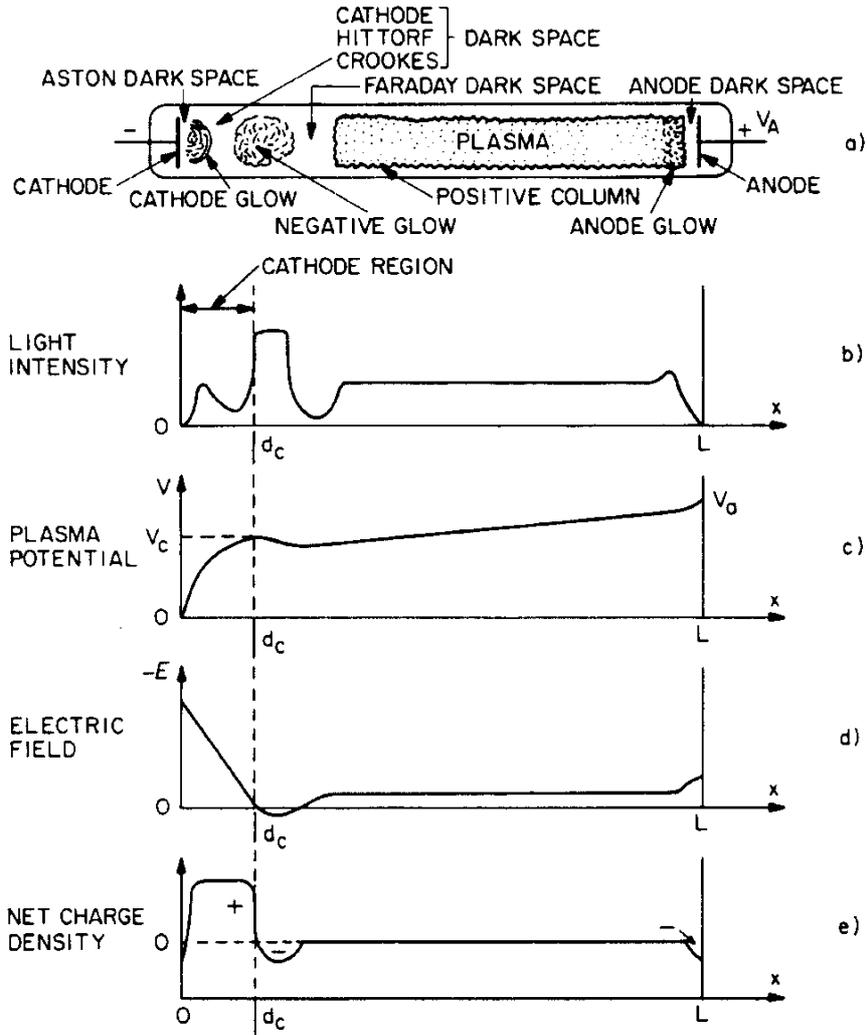


Figura 5 Disegno schematico delle regioni visibili in una NGD in un tubo di scarica cilindrico (a) e relativi profili dell'intensità luminosa (a), potenziale elettrico (b), campo elettrico (c), e densità di carica (d) (Roth, 1995, fig.9.4).

andamento lineare e si annulla a  $x = d_c$  [vedi figura 5 d) ed e)]:

$$E(x) = -\frac{2V_c(d_c - x)}{d_c^2}, \quad \rho = \frac{2\epsilon_0 V_c}{d_c^2}, \quad V(x) = \frac{V_c x(2d_c - x)}{d_c^2}. \quad (23)$$

IL campo alla superficie vale  $E_0 = -2V_c/d_c$ . Poiché adesso il campo elettrico non è più uniforme, il coefficiente  $\alpha$  di Townsend è una funzione dello spazio,  $\alpha = \alpha\{|E(x)|\}$ . Possiamo allora ripercorrere la trattazione teorica della soglia di breakdown lungo la regione del catodo ( $0 < x < d_c$ ), semplicemente con la sostituzione

$$\alpha d \rightarrow \int_0^{d_c} \alpha\{E(x)\} dx.$$

La condizione di breakdown diviene allora

$$\int_0^{d_c} Ap \exp \left[ -\frac{Bp}{E_0(1-x/d_c)} \right] dx = \ln \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right), \quad (24)$$

che può essere scritta

$$\frac{AB(pd_c)^2}{2V_c} S \left( \frac{2V_c}{Bpd_c} \right) = \ln \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right), \quad S(z) = \int_0^2 e^{1/z'} dz'. \quad (25)$$

Questa relazione tra  $V_c$  e  $pd_c$  va in genere studiata numericamente. Il risultato più significativo è che esiste ancora un valore di  $pd_c$  tale che  $V_c$  ha valore minimo, e i relativi valori sono prossimi a quelli del punto di Stoletow, ovvero  $V_c \simeq V_{min}$  e  $pd_c \simeq (pd)_{min}$ . Gli effetti di carica spaziale al catodo portano quindi ad una autoregolazione della scarica che ancorano il valore massimo del campo elettrico al valore di soglia.

## F. Descrizione delle regioni luminose

La regione luminosa più brillante corrisponde approssimativamente alla regione carica negativamente (*negative glow*) ai margini della regione del catodo. Qui gli elettroni fortemente accelerati nella regione del catodo perdono la maggior parte della propria energia per collisioni e/o eccitazione degli atomi nel gas, portando all'emissione di radiazione. Il frenamento degli elettroni porta all'accumulo di carica negativa in questa regione, generando un'inversione del campo elettrico che contribuisce al frenamento degli elettroni.

Oltre tale regione il campo elettrico è sostanzialmente uniforme e negativo e permette il passaggio di corrente continua verso l'anodo. Gli elettroni oltrepassano la regione di *negative glow* avendo perso quasi totalmente la propria energia, e devono riaccelerare per una distanza sufficiente affinché siano in grado di eccitare o ionizzare nuovamente gli atomi del gas. Questo giustifica qualitativamente l'osservazione dello "spazio oscuro di Faraday" tra la regione del catodo e la "colonna positiva"<sup>5</sup> tra lo spazio di Faraday e l'anodo, dove il campo elettrico è circa costante e sostiene un'eccitazione sufficiente a produrre un'emissione visibile.

## G. La corrente in regime di *normal glow*

La condizione di autoregolazione che si realizza in regime di "normal glow" fa sì che la caduta di tensione sul tubo si mantenga approssimativamente costante. In questa regione la caratteristica

<sup>5</sup> "La colonna positiva [...] è ciò che Irving Langmuir aveva in mente quando diede la definizione di plasma" (Roth, 1995, par.9.1.2).

$V - I$  è piatta, ovvero il circuito esterno può far passare una intensità di corrente  $I$  sempre maggiore senza far variare la caduta di tensione  $V$  tra anodo e catodo. D'altronde anche la *densità* di corrente  $J$  nella scarica è circa costante. Questo implica che inizialmente, cioè appena oltre la transizione di *breakdown*, solo una parte della superficie del catodo è interessata dal passaggio di corrente. L'aumento di  $I$  corrisponde ad un aumento della superficie attraversata da  $J$ , sino a quando  $J$  è distribuita sull'intera superficie del catodo. Oltre questa condizione, si ha il passaggio al regime di scarica "anomala" (*abnormal glow*) dove la tensione  $V$  aumenta di nuovo al crescere di  $I$ , dovendo garantire una densità di corrente  $J$  più elevata, e quindi il punto di lavoro si sposta dal minimo della curva di Paschen; in queste condizioni la scarica diviene più luminosa, essendo più alta l'energia dei portatori di carica.

In condizioni di autoregolazione la densità di corrente può essere stimata in funzione dei parametri della regione del catodo, ovvero  $d_c$  e  $V_c$ . Infatti, considerando dominanti il flusso di ioni più il flusso di elettroni secondari, si può scrivere

$$J = J(0) \simeq en_i(0)v_i(0)(1 + \gamma), \quad (26)$$

dove  $n_i(0)$  è la densità ionica in prossimità del catodo e  $v_i(0)$  è la velocità degli ioni. Assumendo che gli ioni si muovano con una velocità di deriva costante  $v_i(0) \simeq \mu_i E(0)$ , dove  $\mu_i$  è la mobilità ionica, essendo  $E_0 \simeq 2V_c/d_c$ . Se vicino al catodo  $n_e \ll n_i$  si ha inoltre per l'equazione di Poisson  $n_i(0) \simeq 2\epsilon_0 V_c / ed_c^2$ , per cui

$$J \simeq 4\epsilon_0 \mu_i \frac{V_c^2}{d_c^3} (1 + \gamma). \quad (27)$$

Se è nota  $\mu_i$ , questa espressione permette una stima di  $J$  e quindi, nota la superficie del catodo  $S_c$ , del valore "limite" di  $I = JS_c$  oltre il quale si ha la transizione verso il regime "abnormal glow".

### 1. Altri tipi di scariche "glow"

La discussione precedente non esaurisce né la descrizione della dinamica di scariche "glow" in un tubo ordinario del tipo della fig.1, né tantomeno la fenomenologia di scariche "glow" in altre geometrie, quali ad esempio quelle di dispositivi di interesse industriale.

Riguardo al primo punto, abbiamo già accennato come al crescere della corrente nel tubo di scarica l'esaurirsi della superficie disponibile sul catodo porta al regime di scarica "anomala". Un'altra possibilità è che la distanza fra gli elettrodi risulti minore della distanza  $d_c$  corrispondente al minimo di Paschen; in questo modo la scarica opera ad una tensione maggiore di  $V_{b,min}$ . Tale scarica viene



Figura 6 Una tipica immagine di “striations” in un tubo di scarica (da: <http://www.sparkbangbuzz.com/crt/crt6.htm>)

detta “ostruita” (*obstructed glow discharge*) e ha interesse per applicazioni che richiedono particelle di energia relativamente elevata.

Un altro fenomeno caratteristico, anch’esso osservato da Faraday (1830) è l’apparire nel tubo di scariche “striate” (*striations*), ovvero dell’alternarsi di bande luminose e oscure che si propagano con una certa velocità di fase, o possono altresì apparire come un’onda stazionaria. La figura 6 mostra una tipica immagine del fenomeno. Le nozioni di base sugli striations sono riportate in (Roth, 1995, sec.9.3); una rassegna recente di osservazioni e sviluppi teorici è data in (Kolobov, 2006).

Scariche “glow” si verificano in diversi tipi di dispositivi con varie geometrie e su un vasto intervallo di temperatura, densità, potenza sviluppata. Una caratteristica tipica (e comune alle NGD) è la dipendenza debole della densità di corrente dal voltaggio. In genere si ha una legge di potenza del tipo  $V \sim J^{1/k}$ , con  $k > 1$ : valori di  $k$  da 2 a 12 sono stati osservati. Al momento non esistono teorie soddisfacenti per giustificare il valore dell’esponente nei vari dispositivi, così come non è ben compreso perché alcuni di questi esibiscano una “transizione di modo” per cui  $k$  salta da un valore all’altro intorno ad un voltaggio “critico”. Inoltre non è soddisfacente la comprensione della fisica del trasporto di energia né della formazione di distribuzioni non-maxwelliane delle particelle. Ovviamente la comprensione di questi fenomeni porterebbe ad un controllo migliore dei processi fisici di interesse applicativo che avvengono nei dispositivi di scarica.

## H. Archi elettrici

Al crescere della corrente, una scarica *glow* può compiere un’ulteriore transizione verso il regime di *arco elettrico*, caratterizzato da elevata luminosità e alti valori di corrente (tipicamente  $I > 1$  A con valori possibili sino a  $\sim 10^4$  A). In genere sulla caratteristica  $V - I$  si identifica una regione di arco “non-termico” caratterizzato da una resistenza anomala (tratto I-J della fig.2) in cui la tensione *decrece* all’aumentare della corrente e in cui si osserva che il plasma della scarica non è in equilibrio termodinamico (TE); al crescere della corrente si entra in un regime TE (arco “termico”, tratto

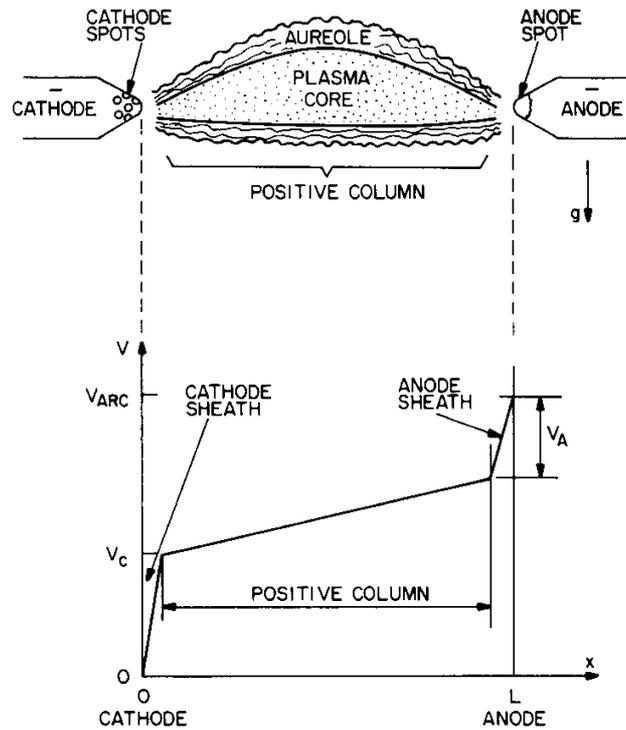


Figura 7 Schema delle caratteristiche visibili di un arco elettrico e dell'andamento tipico del potenziale lungo l'asse (Roth, 1995, fig.10.3).

J-K della fig.2) dove la tensione cresce debolmente con la corrente applicata. La fig.7 mostra le caratteristiche visibili principali e l'andamento tipico del potenziale nello spazio per un arco.

Nonostante lo studio degli archi sia ormai vecchio di due secoli e gli archi trovino applicazione come sorgenti luminose o per il trattamento dei materiali, la loro fisica non è ben compresa; in particolare *non* c'è una teoria soddisfacente per la relazione osservata tra corrente e tensione. Appare chiaro che la dinamica degli archi è legata alla fisica del trasporto radiale di energia in condizioni in cui il plasma è magnetizzato e turbolento; il problema della comprensione di questi fenomeni complessi è comune agli archi e ai dispositivi per la fusione a confinamento magnetico. In altri termini, gli archi elettrici corrispondono a condizioni del plasma ai margini dei regimi identificati comunemente come di plasma "freddo" (cioè a bassa temperatura) e pi vicine a quelle dei plasmi "caldi" tipici, e.g., dei dispositivi fusionistici o della corona solare. Qui ci limitiamo a dare dei cenni ai processi più rilevanti in un arco, per mettere in luce la fisica sicuramente necessaria alla comprensione.

### 1. Forze magnetiche ed effetto pinch

Per i valori tipici di corrente in un arco le forze magnetiche hanno un ruolo importante. Schematizzando l'arco come un cilindro infinito in cui scorre la densità di corrente uniforme  $J_z$ . Il campo magnetico per  $r < a$ , essendo  $a$  il raggio massimo del plasma, è dato da  $B_\phi = \mu_0 J_z r / 2$ . La forza magnetica per unità di volume è quindi

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\mu_0 J_z \mathbf{r} / 2, \quad (28)$$

e tende a far collassare il plasma verso l'interno (effetto *pinch* o di "strizzamento"). La forza magnetica può però essere bilanciata dalla pressione interna del plasma, realizzando un equilibrio noto come *Bennett pinch*. Dall'equazione di bilancio delle forze

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p = 0. \quad (29)$$

Continuando ad assumere simmetria cilindrica ed una corrente assiale e uniforme, l'equazione per  $p = p(r)$  diviene

$$\partial_r p = -\mu_0 J_z r / 2, \quad (30)$$

da cui, con la condizione  $p(a) = 0$  (consistente col bordo finito della distribuzione di corrente)

$$p(r) = \frac{\mu_0}{4} J_z^2 (a^2 - r^2). \quad (31)$$

La condizione di Bennett può essere scritta in funzione della pressione sull'asse  $p_0 = p(0) = \mu_0 J_z^2 a^2 / 4$  e della corrente totale  $I = \pi a^2 J_z$  come

$$a = \frac{I}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{p_0}}. \quad (32)$$

Questa equazione determina il raggio del plasma in funzione della pressione e dell'intensità di corrente; una corrente  $I = 10^4$  A alla pressione atmosferica corrisponde ad un raggio  $a = 0.56$  cm.

La relazione di Bennett ci è utile per illustrare l'effetto delle forze magnetiche e il problema del bilancio delle forze in un arco; tuttavia, realisticamente gli archi si soddisfano difficilmente questa condizione, sia perché generalmente si opera a correnti inferiori al valore necessario all'equilibrio, sia perché l'equilibrio è instabile rispetto a perturbazioni radiali ("*kink*" o "*sausage*") ben note nella teoria del confinamento magnetico.

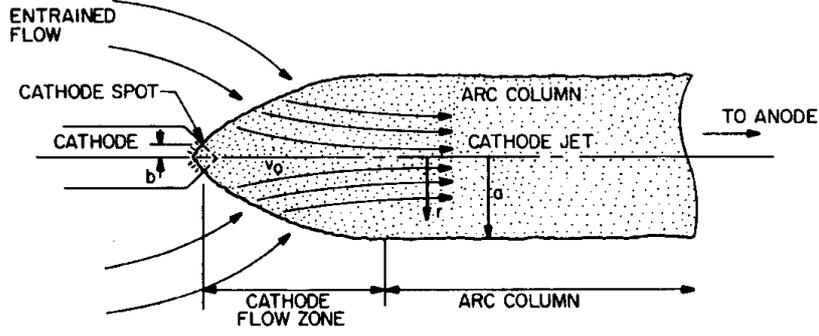


Figura 8 Schema della formazione di un getto nella regione del catodo di un arco elettrico (Roth, 1995, fig.10.7).

### 2. Formazione di getti

Una caratteristica tipica degli archi è la formazione di flussi o “getti” di materia ad alta velocità a partire dagli elettrodi (*electrode jets*). Come mostrato in figura 8, si ha un flusso di gas orientato dalla regione circostante il catodo che si incanala lungo l’arco. L’esistenza di questi flussi è consistente con l’osservato restringimento del diametro dell’arco in prossimità degli elettrodi e l’ipotesi rozza di un equilibrio di Bennett *locale*. Quindi, se l’arco ha raggio  $b \ll a$  in prossimità del catodo (v. fig.8 localmente la pressione è maggiore del valore nella regione di raggio massimo:

$$p_b = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi b^2} \gg \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a^2} = p_a. \quad (33)$$

Esiste quindi un gradiente assiale di pressione che sostiene il flusso di materia. Dalla differenza di pressione si può stimare la velocità di flusso  $v_0$ :

$$p_b - p_a = \frac{1}{2} M n_i v_0^2, \quad v_0 \simeq \frac{I}{\pi b} \sqrt{\frac{\mu_0}{2 M n_i}}, \quad (34)$$

dove nell’ultimo passaggio si è assunto  $b \gg a$ .

### 3. Bilancio energetico

Nella modellizzazione degli archi occorre tener conto che il passaggio di corrente produce una dissipazione di energia per effetto Joule. A regime questa dissipazione deve essere bilanciata da fenomeni di trasporto dell’energia. Un modello semplice consiste nell’assumere che il trasporto sia dovuto alla conduzione termica in direzione radiale.

In genenrale per la variazione della densità di energia possiamo scrivere l’equazione di continuità

$$\partial_t u_E = -\nabla \cdot \mathbf{j}_E. \quad (35)$$

Il flusso di energia dovuto alla conduzione termica è dato in generale da

$$\mathbf{j}_q = -\kappa \nabla T \quad (36)$$

mentre l'energia dissipata per unità di volume per effetto Joule è  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ . Assumendo  $\partial_t u_E = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{j}_E = \mathbf{j}_q$ , e  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  si ottiene in simmetria radiale

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 = -\nabla \cdot (\kappa \nabla T) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \kappa \frac{dT}{dr} \right) \quad (37)$$

(equazione di Elenbaas-Heller). In generale integrare questa equazione è complicato in quanto sia la conducibilità elettrica  $\sigma$  che quella termica  $\kappa$  sono funzioni di  $T = T(r)$ . Nel caso molto semplificato di  $\sigma$  e  $\kappa$  uniformi e indipendenti da  $T$ , l'equazione ha come soluzione un profilo parabolico di temperatura:

$$T(r) = T(0) - \frac{\sigma E^2}{4\kappa} r^2. \quad (38)$$

Questa relazione può fornire una prima indicazione sull'andamento radiale della temperatura dell'arco e sulla sua dipendenza dal campo elettrico applicato. Può anche essere interessante notare che, assumendo una densità costante, questa variazione radiale della temperatura appare consistente con la variazione radiale della pressione  $p(r)$  secondo una legge parabolica (31), necessaria alla condizione di equilibrio di Bennett.

### III. SCARICHE TRANSIENTI: LA *DIELECTRIC BARRIER DISCHARGE* (DBD)

Analizziamo ora con un certo dettaglio le caratteristiche delle “scariche con barriera dielettrica” o DBD (*Dielectric Barrier Discharges*), uno degli schemi più diffusi per la produzione di scariche di plasma atmosferico (Eliasson and Kogelschatz, 1991a; Kogelschatz, 2002, 2003). La configurazione più semplice di un dispositivo DBD consiste di un capacitore ad elettrodi piani e paralleli, tra i quali si trovano uno strato cavo, riempito dal gas dove avviene la scarica (*discharge gap*) ed (almeno) uno strato dielettrico (la “barriera”), generalmente interposto tra l’elettrodo e il gap. Sono comuni anche configurazioni cilindriche e/o con barriere dielettriche su entrambi gli elettrodi, o separate da essi. La scarica nel gas avviene quando la tensione applicata è tale da portare il campo elettrico nel gas oltre il limite di *breakdown* (30 kV/cm) per l’aria. La funzione di base della barriera è quella di un limitatore di corrente non dissipativo. L’accumulo di carica sulla superficie del dielettrico porta infatti a ridurre il campo applicato nel gas fino a quando questo si annulla bloccando il passaggio della corrente. La figura 9 mostra lo schema di una semplice cella DBD e del circuito equivalente.

#### 4. Fenomenologia della DBD

Sperimentalmente si trova che la scarica in una DBD è composta da microscariche individuali spazialmente separate e di breve durata, tipicamente  $\sim 10 \text{ ns}$   $10^{-8}$  s, mentre il diametro è dell’ordine delle centinaia di micron ( $1 \mu\text{m} = 10^{-6}$  m) o inferiore. La deposizione della carica sulla superficie del dielettrico avviene tuttavia su una superficie maggiore della sezione delle microscariche; quindi, una funzione ulteriore della barriera dielettrica è quella di ottenere una deposizione di carica relativamente omogenea pur partendo dalla tipica distribuzione filamentare di una scarica di breakdown ad alta pressione.

L’aspetto tipico di una microscarica in una configurazione a doppia barriera è mostrato nello

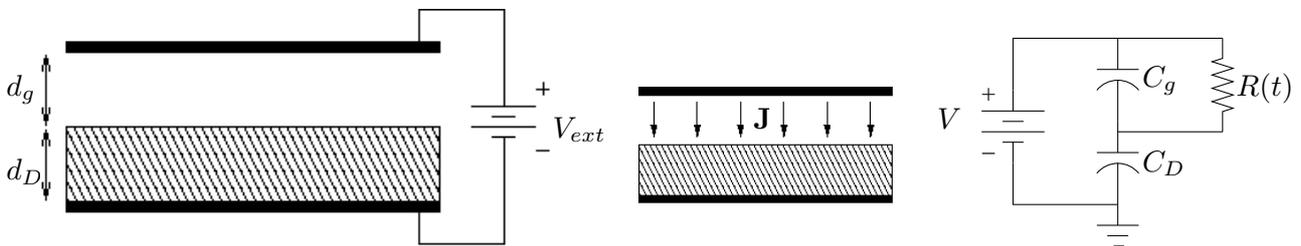


Figura 9 Schema semplice di una cella DBD a elettrodi piani e del suo circuito equivalente.

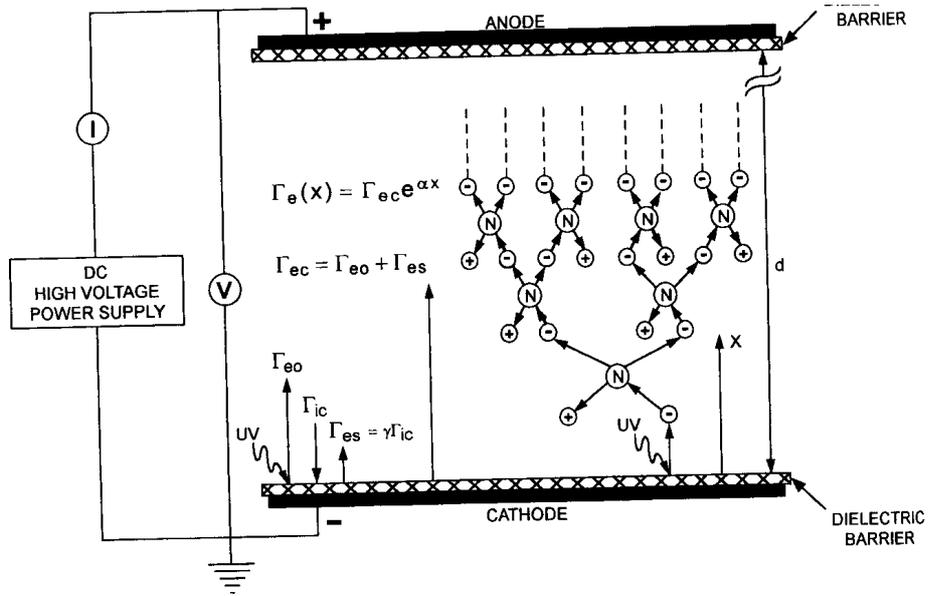
schizzo di Fig.13. Tentativamente e qualitativamente possiamo quindi immaginare la dinamica della scarica in una DBD nel modo seguente: le scariche vengono attivate localmente, laddove il campo di breakdown viene superato per fluttuazioni o imperfezioni degli elettrodi, oppure per effetto di una sorgente disomogenea di pre-ionizzazione; la scarica genera rapidamente una valanga elettronica che si deposita sul dielettrico (che isola gli elettroni del plasma), distribuendosi su uno strato superficiale più esteso della scarica; questo accumulo di carica diminuisce il campo elettrico su una regione estesa, impedendo quindi il generarsi di nuove scariche nel volume circostante. Questa dinamica è illustrata in fig.10.

La formazione della scarica attraversa in genere due fasi. La prima fase è sostanzialmente analoga al regime di Townsend nel tubo di scarica, e consiste nella moltiplicazione del numero di portatori (elettroni) emessi inizialmente dal catodo, per ionizzazione degli atomi neutri del gas. A causa della loro maggiore mobilità gli elettroni, nel propagarsi verso il catodo, tendono a separarsi spazialmente dagli ioni creando quindi un campo di carica spaziale. Nei regimi tipici delle DBD questo campo può essere abbastanza intenso da generare nuova ionizzazione in prossimità della valanga. Si genera in questo caso un'onda di ionizzazione o *streamer*, il cui fronte viaggia assai più velocemente di quello della valanga elettronica iniziale. Gli *streamers*, essendo attivati da effetti di carica spaziale, possono propagarsi sia dal catodo verso l'anodo (nel qual caso il fronte è carico negativamente; questa è la situazione nel caso di una transizione "valanga-*streamer*"), sia in senso inverso (nel qual caso il fronte è carico positivamente; v. Fig.11).

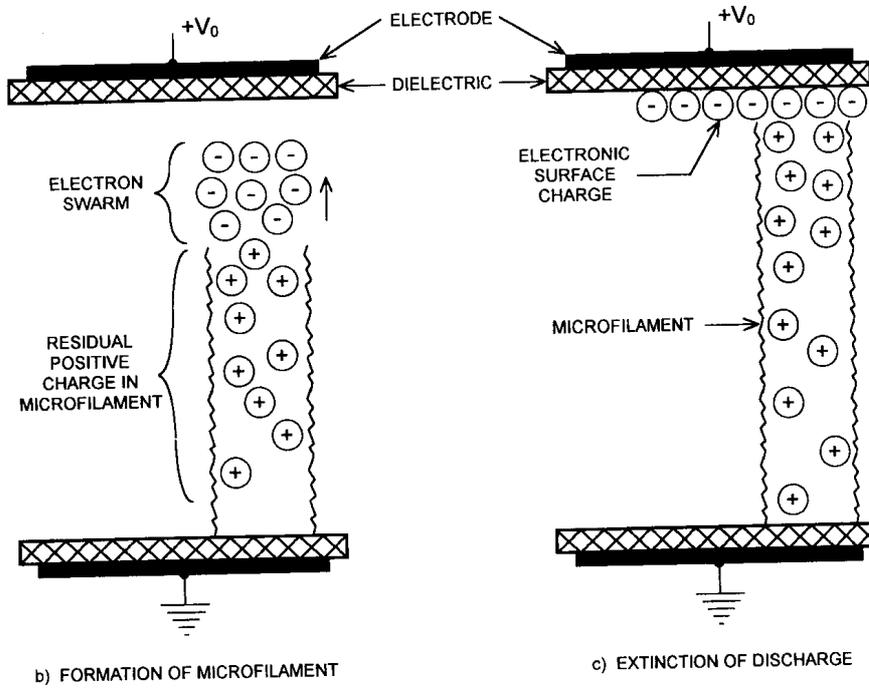
Sono classificate come DBD anche altre configurazioni di diversa geometria, bastate anch'esse sulla presenza di strati dielettrici e usate in genere per applicazioni specifiche. La figura 12 (Gibalov and Pietsch, 2000) mostra gli schemi a elettrodi coplanari per scariche "superficiali", utilizzati negli schermi a plasma dove la scarica ha la funzione di una sorgente pulsata UV per illuminare i fosfori corrispondenti ad ogni pixel dello schermo a colori (R,G,B). Mostra inoltre lo schema di un reattore "*packed bed*" dove il gap è riempito da materiale dielettrico in maniera disomogenea (a "grani" o "schiuma") o usando materiale intrinsecamente poroso (Jidenko *et al.*, 2002). In questo approccio il plasma è prodotto negli interstizi del dielettrico e questo consente in genere l'utilizzo di campi elettrici relativamente bassi.

### 5. Parametri caratteristici della DBD

A condizioni di pressione atmosferica, i parametri tipici delle microscariche sono: densità elettronica  $n_e = 10^{14} \div 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ , ovvero, essendo la densità di molecole  $n_n \approx 2.5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ , il grado di



(a)



b) FORMATION OF MICROFILAMENT

c) EXTINCTION OF DISCHARGE

Figura 10 Evoluzione di una microscarica in una cella DBD: a) formazione della “valanga” elettronica, b) separazione della “nuvola” elettronica dalla colonna di ioni carichi positivamente, c) deposizione della carica elettronica sulla superficie dielettrica (Roth, 2001, fig.15.5).

ionizzazione è dell'ordine di  $10^{-4}$ ; densità di corrente  $J = 10^2 \div 10^3 \text{ A cm}^{-2}$ ; durata  $\tau = 10 \div 100 \text{ ns}$ ; raggio  $r_s \sim 100 \mu\text{m}$ ; carica totale  $Q \sim 1 \text{ pC}$ ; energia dissipata  $U \sim 1 \mu\text{J}$ . Il valore del “campo ridotto”  $E/n$  per cui si ha breakdown elettrico nei gas è tipicamente nel range  $100 \div 200 \text{ Td}$  (Townsend) dove  $1 \text{ Td} = 10^{-17} \text{ V cm}^2$ , il che porta a pressione atmosferica ad usare campi dell'or-

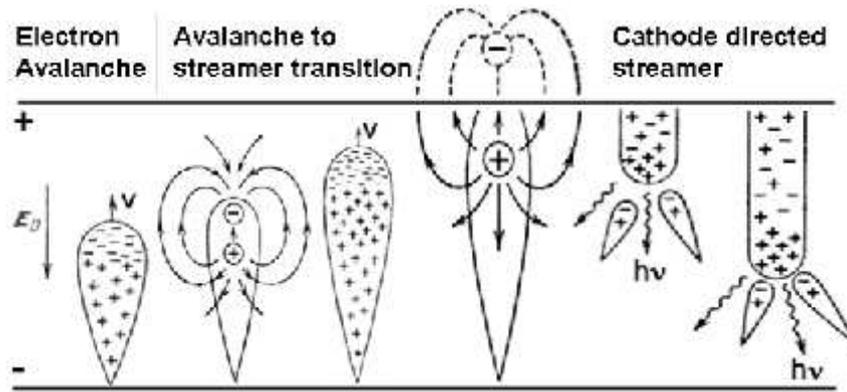


Figura 11 Evoluzione schematica di una microscarica all'interno di una cella DBD, che mostra la formazione di una "valanga" elettronica vicino al catodo, seguita dalla sua evoluzione in uno *streamer* diretto verso l'anodo, e successivamente dalla formazione di uno *streamer* diretto verso il catodo. (Chirokov *et al.*, 2005).

dine di  $E \sim 10^4 \text{ V cm}^{-1}$ . L'energia degli elettroni è tipicamente nel range  $1 \div 10 \text{ eV}$ , che corrisponde ad un range ottimale per attivare reazioni chimiche attraverso l'eccitazione di specie atomiche e molecolari e la rottura di legami chimici (Eliasson and Kogelschatz, 1991b), nonché di interesse per la generazione di radiazione UV.

### 6. Modello semplice della scarica DBD

Scariche di tipo DBD sono state utilizzate sin dal 1860 in Germania per disinfezione o produzione d'ozono. Lo studio della fisica sottostante è stato limitato sino a tempi molto più recenti dalla ne-

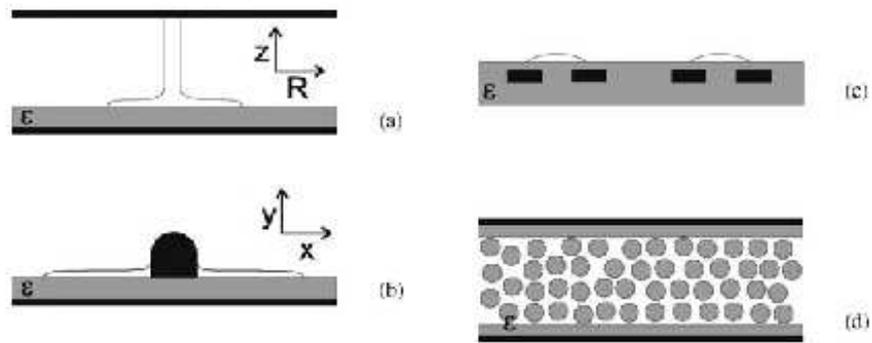


Figura 12 Vari schemi di celle DBD (Gibalov and Pietsch, 2000). Le parti nere indicano gli elettrodi metallici e le parti grigie le zone di materiale dielettrico. a) Cella semplice a elettrodi paralleli per scariche di volume; b), c) cella con elettrodi coplanari; d) reattore "packed bed".

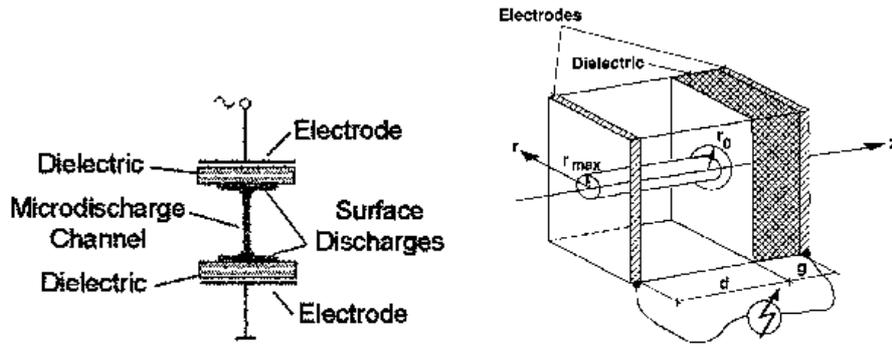


Figura 13 Geometria del modello semplice della DBD, sez.III.6 (figure tratte da (Eliasson and Kogelschatz, 1991a; Kogelschatz, 2003)).

cessità di diagnostiche che avessero l'altra risoluzione spaziale e temporale necessaria a risolvere la dinamica delle microscariche. Precedentemente, quindi, lo studio delle DBD è stato limitato a stabilire relazioni fenomenologiche (as esempio, la relazione tra tensione, carica depositata, e potenza dissipata) a prescindere dalla dinamica microscopica. Nel seguito adottiamo un approccio simile, usando un modellino molto semplificato ma istruttivo in quanto riesce a fornire leggi di scala e caratteristiche qualitative delle scariche che sono in buon accordo con simulazioni numeriche e osservazioni sperimentali. Essenzialmente riduciamo la dinamica interna alla DBD all'esistenza di una resistività fortemente dipendente dal tempo (vedi il "circuito equivalente" di fig.9); come vedremo, alcune relazioni importanti dal punto di vista pratico *non* dipendono dalla legge temporale esatta con cui varia la resistività.

La geometria del modello è illustrata in Fig.13. Consideriamo un condensatore piano tra le cui armature di è mantenuta la tensione  $V_{ext}$ . All'interno del condensatore si trovano un primo strato di spessore  $d_g$ , riempito di gas (avente suscettività dielettrica trascurabile  $\chi = 0$ ,  $\epsilon = \epsilon_0$ ), e un secondo strato di spessore  $d_d$  (la barriera) costituito da un materiale dielettrico di permittività dielettrica  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  con  $\epsilon_r > 1$ . Prendiamo in esame una scarica omogenea fra gli elettrodi avente forma cilindrica di raggio  $r_s$  e sezione  $S_c = \pi r_s^2$ . La carica viene depositata su un'area del dielettrico di raggio  $r_0 \geq r_s$  e superficie  $S_d = \pi r_0^2$ . Assumendo  $r_0 \gg d_g$ , possiamo trascurare gli effetti di bordo e considerare il campo elettrico nella regione  $r < r_0$  come uniforme e perpendicolare alle superfici del condensatore e del dielettrico.

Le scariche in una cella DBD sono in generale assai disomogenee, risultando la somma di numerose microscariche spazialmente separate. Ciò nonostante, è utile a fini pratici caratterizzare le scariche con delle quantità medie e/o integrate sul tempo, quali la carica totale trasferita o l'energia dissipata

sull'intero volume. La “scommessa” è che un modello omogeneo come quello considerato, i cui parametri sono da intendersi come rappresentativi dei parametri medi delle microscariche, possa dare indicazioni qualitative o semiquantitative (ordini di grandezza e leggi di scala) sulle caratteristiche globali della scarica.

Siano  $E_g$  e  $E_d$  i campi rispettivamente nello strato di gas (g) e di dielettrico (D). La caduta di potenziale tra le armature impone

$$E_g d_g + E_d d_d = V_{ext}.$$

La densità di carica libera è uguale alla discontinuità di  $\epsilon E$  alla superficie di separazione gas-dielettrico:

$$\sigma = \epsilon E_d - \epsilon_0 E_g.$$

Queste relazioni sono valide ad ogni  $t$ . In assenza di gas, o se non è avvenuta alcuna scarica,  $\sigma = 0$ .

Modellizziamo la scarica in modo elementare: all'istante  $t = 0$ , all'interno dello strato di gas si verifica una scarica di ionizzazione che rende istantaneamente conduttore il gas. La scarica avviene quando il campo nel gas supera il valore di breakdown  $E_b$  (più precisamente il parametro rilevante è il campo “ridotto”  $E_b/n$  dove  $n$  è la densità del gas). In pratica, la cella DBD sarà alimentata con una tensione dipendente dal tempo (tipicamente alternata). Comunque, come si può verificare a posteriori, possiamo considerare il campo esterno applicato come costante se il tempo di scarica è molto minore del tempo caratteristico di variazione del campo (ovvero del semiperiodo del campo per una tensione alternata), il che in genere è verificato. Prima della scarica il campo elettrico nel gas è dato da

$$E_g = \frac{\epsilon V(t)}{\epsilon d_g + \epsilon_0 d_d}, \quad (39)$$

e quindi sostituendo  $E_g = E_b$  otteniamo l'espressione del voltaggio di scarica  $V_{min}$  in funzione di  $E_b$ :

$$V_{min} = E_b(d_g + d_d/\epsilon_r) \simeq E_b d_g,$$

dove l'ultima eguaglianza approssimata vale se  $d_g \gg d_d/\epsilon_r$ .

Assumiamo che il gas ionizzato sia descrivibile per  $t > 0$  come un conduttore ohmico di resistività media  $\rho$ . In generale  $\rho = \rho(t)$  a causa dei processi di ionizzazione che cambiano sia il numero dei portatori di carica sia la natura delle collisioni. È da notare, come già anticipato e dimostrato più avanti, che importanti quantità integrate quali la carica trasferita o la potenza dissipata in un ciclo

non dipendono dalla forma di  $\rho(t)$ . Nel seguito, tuttavia, useremo talvolta l'approssimazione di  $\rho$  costante per stimare alcune quantità caratteristiche.

Dall'equazione di continuità si ha

$$S_d \partial_t \sigma = S_c J = S_c \frac{E_g}{\rho(t)}. \quad (40)$$

Usando le relazioni precedenti si può eliminare  $E_g$  e ottenere l'equazione

$$\partial_t \sigma = - \frac{d_d}{\rho(t)(\epsilon_0 d_d + \epsilon d_g)(S_d/S_c)} (\sigma - \epsilon V_{min}/d_d) \equiv - \frac{1}{\rho(t)\bar{\epsilon}} (\sigma - \sigma_\infty),$$

dove si è posto  $\bar{\epsilon} \equiv (\epsilon_0 + \epsilon d_g/d_d)(S_d/S_c)$  e  $\sigma_\infty \equiv \epsilon V_{min}/d_d$ . La soluzione formale è data da

$$\sigma(t) = \sigma_\infty \left[ 1 - \exp \left( \int_0^t \frac{dt'}{\rho(t')\bar{\epsilon}} \right) \right],$$

dove si è imposta la condizione iniziale  $\sigma(t=0) = 0$ . Indipendentemente dalla forma analitica di  $\rho(t)$ , la densità di carica aumenta fino al valore asintotico  $\sigma(t \rightarrow +\infty) = \sigma_\infty = \epsilon V_{min}/d_d$ .

a. *Carica trasferita* La relazione precedente fornisce una prima quantità interessante, ovvero la carica totale  $Q$  trasferita durante la scarica sulla superficie del dielettrico:

$$Q = \sigma_\infty S_{dep} = \frac{\epsilon V_{min}}{d_d} S_{dep}, \quad (41)$$

dove  $S_{dep}$  è l'area della superficie del dielettrico su cui viene distribuita la carica. Possiamo anche scrivere

$$Q = \epsilon E_b (d_g/d_d + 1/\epsilon_r) S_d \simeq \epsilon E_b (d_g/d_d) S_{dep}. \quad (42)$$

La quantità di carica trasferita è tale da generare nel gas il potenziale elettrostatico  $V_c = -V_{min}$ , in modo che alla fine della scarica potenziale e campo elettrico sono nulli nel gas.

La relazione di proporzionalità  $Q \propto \epsilon(d_g/d_d)$  è ben verificata sperimentalmente (Kogelschatz, 2003, Refs.47-49). Sottolineiamo come il risultato (41) o (42) non dipenda dalla forma di  $\rho(t)$ .

Questo modello molto semplificato predice che  $Q$  dipenda dalla densità del gas attraverso la dipendenza di  $E_b$ . In realtà è stato predetto teoricamente e confermato sperimentalmente (Eliasson and Kogelschatz, 1991a) che  $Q$  non dipende dalla densità  $n$  del gas. La ragione sembra<sup>6</sup> essere collegata al decrescere con  $n$  (per alti valori di  $nd_g$  del raggio delle scariche e quindi di  $S_{dep}$ ).

<sup>6</sup> Il modello teorico pare essere stato presentato a conferenza ma non pubblicato: B. Eliasson and S. Straessler, Bull. Am. Phys. Soc. **28**, 183 (1983).

b. *Energia assorbita* L'altra quantità interessante è l'energia assorbita dal plasma durante la scarica, anch'essa indipendente dalla forma di  $\rho(t)$ . Infatti, la potenza assorbita per unità di volume è

$$\frac{dP_{ass}}{dV} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_g = \rho(t)J^2 = \rho(t)(\partial_t\sigma)^2, \quad (43)$$

da cui, integrando sul tempo, otteniamo l'energia assorbita per unità di volume:

$$\begin{aligned} \int \frac{dU_{ass}}{dV} dt &= \int \rho(t) \left[ -\frac{1}{\rho(t)\bar{\epsilon}}(\sigma - \sigma_\infty)\partial_t\sigma \right] dt = -\int \frac{1}{2\bar{\epsilon}}\partial_t[(\sigma - \sigma_\infty)^2] dt = -\frac{1}{2\bar{\epsilon}}(\sigma - \sigma_\infty)^2 \Big|_{t=0}^{t=\infty} \\ &= \frac{\sigma_\infty^2}{2\bar{\epsilon}}, \end{aligned}$$

indipendentemente dalla forma di  $\rho(t)$ .

Se la scarica avviene su un volume uniforme  $S_c d_g$ , dove  $S_c$  è la superficie effettiva della scarica, l'energia totale assorbita è

$$U_{ass} = S_c d_g \frac{\sigma_\infty^2}{2\bar{\epsilon}}.$$

Possiamo introdurre le capacità dello strato dielettrico  $C_d = \epsilon S_d/d_d$  e del gap  $C_g = \epsilon S_d/d_g$  e riscrivere  $U_{ass}$  nella forma di uso pratico

$$U_{ass} = \frac{1}{2} \frac{C_d^2}{C_g + C_d} V_{min}^2. \quad (44)$$

c. *Durata della scarica* Per poter stimare analiticamente il tempo della scarica assumiamo che la resistività sia costante. Posto

$$\tau = \rho\bar{\epsilon} = \rho(\epsilon_0 d_d + \epsilon d_g)(S_d/d_d S_c) = \rho\epsilon_0(1 + \epsilon_r d_g/d_d)(S_d/S_c),$$

la soluzione che soddisfa la condizione iniziale  $\sigma = 0$  è

$$\begin{aligned} \sigma &= (\epsilon V_{ext}/d_d)(1 - e^{-t/\tau}), \\ J &= \partial_t\sigma = (\epsilon V_{ext}/d_d\tau)e^{-t/\tau}. \end{aligned}$$

Vediamo quindi come la scelta dei parametri  $d_g$ ,  $d_d$  ed  $\epsilon$  consente in teoria un controllo flessibile della durata della scarica di corrente.

Un'espressione simile alla nostra per  $\tau$  (a parte il fattore  $d_g/d_d \sim 1$ ) è data da (Eliasson and Kogelschatz, 1991a)

$$\tau \simeq E_b(\epsilon/en_e v_d)(S_d/S_c), \quad (45)$$

dove si è verosimilmente usata la relazione  $\rho = E/en_e v_d$ ,  $v_d$  è la velocità di drift degli elettroni, valida per un conduttore ohmico. Notare che, nonostante sia stato messo in evidenza il campo di breakdown  $E_b$ , il tempo di scarica *non* dipende da  $E_b$ .

## 7. DBD a corrente alternata

Poichè la durata delle microscariche in una DBD è dell'ordine di  $10^{-8}$  s, in pratica il modello che prevede una tensione costante durante la scarica va bene fino a frequenze piuttosto alte. Semplici generatori d'ozono operano in genere alla frequenza di rete (50 Hz), ma operazioni con frequenze di decine di  $kHz$  sono anch'esse comuni.

Una questione importante è confrontare il periodo dell'alimentazione  $T = 2\pi/f$ , dove  $f$  è la frequenza, con il tempo necessario alla ricombinazione nel plasma generato nel gap. Se questa regione rimane conduttrice, si avrà un passaggio di corrente nel gap che manterrà ad ogni istante il potenziale nel gap  $V_g$  pari a zero. La ricombinazione all'interno del plasma, tuttavia, ridurrà progressivamente il numero delle cariche libere cosicchè ad un certo istante la conducibilità sarà nuovamente nulla. A tal punto potrà avvenire una nuova scarica se la tensione esterna è tale da portare il campo nel gap nuovamente oltre il valore di breakdown.

La successione temporale delle scariche è particolarmente semplice da prevedere nell'ulteriore ipotesi che il tempo tipico di ricombinazione  $\tau_r \ll T$ , in modo che, quando all'istante  $t_2 > t_1$  la tensione esterna ha raggiunto il valore  $2V_{min}$ , il gas è non più ionizzato e la sua conducibilità è nulla. Il potenziale nel gap è ora la somma del potenziale esterno più quello dovuto alla carica  $Q_s$  accumulata nella scarica precedente, ovvero  $V_g = 2V_{min} - V_{min} = V_{min}$  e quindi si ha una nuova scarica allo stesso potenziale nel gap della scarica precedente. Questo ragionamento si può iterare; ogni volta che il potenziale  $V_g$  è aumentato di  $V_{min}$  rispetto alla scarica precedente si ha una nuova scarica, la quale aumenta di  $Q_s$  la carica totale depositata sul dielettrico. Si ha quindi una successione di scariche simili fino a quando la tensione di alimentazione non raggiunge il valore massimo  $V_0$  alla fine del primo quarto di ciclo. Il numero di scariche avvenute in questo tempo è quindi dell'ordine di

$$N_1 \approx \frac{V_0 - V_{min}}{V_{min}}. \quad (46)$$

Se la cella si comporta in maniera del tutto simmetrica rispetto al segno della tensione applicata (ipotesi verosimile per una cella con strati identici di dielettrico su entrambi le armature) la scarica avviene con eguale probabilità per un dato valore della differenza di potenziale nel gap in valore assoluto, ovvero indipendentemente dal segno del potenziale e dal verso del campo elettrico. In questo modo, per  $t > T/4$ , il potenziale nel gap  $V_g$  decresce seguendo l'andamento temporale della tensione applicata, sino al momento in cui il suo valore diviene  $V_g = -V_{min}$ ; a questo istante avviene una nuova scarica che porta il passaggio di corrente in senso inverso al quarto di ciclo precedente, trasportando la carica  $Q_s$  necessaria a riportare il potenziale nel gap a zero. Lo stesso accade nella

scariche successive, sino a quando in prossimità di  $t = T/2$  la carica sul dielettrico è di nuovo nulla. Il secondo semiciclo ( $T/2 < t < T$ ) è identico al precedente, eccetto che campo e corrente hanno versi opposti. A  $t = T$  la situazione è quindi identica al caso di partenza. In queste ipotesi la cella DBD funziona quindi a regime, e il numero massimo di scariche in un ciclo di alimentazione è quindi

$$N_{tot} = 4N_1 \approx 4 \frac{V_0 - V_{min}}{V_{min}}. \quad (47)$$

Nell'ipotesi di scariche identiche fra loro, possiamo trovare l'energia assorbita dalla cella moltiplicando la potenza della singola scarica per  $N_d$ . Questo implica l'ulteriore ipotesi semplificativa che la conducibilità (ovvero la resistività) del plasma sia in pratica la stessa per ogni scarica successiva; si trascura cioè l'effetto di ogni modificazione fisico/chimica irreversibile nel gas. Otteniamo quindi, usando la (44), una stima dell'energia assorbita per ciclo:

$$U_{tot} = U_{dis} N_{tot} = \left[ \frac{1}{2} \right] 4 \frac{C_d^2}{C_g + C_d} V_{min} (V_0 - V_{min}). \quad (48)$$

La potenza assorbita è banalmente il prodotto della frequenza  $f$  per  $U_{tot}$ :

$$P = f U_{tot} = \left[ \frac{1}{2} \right] 4f \frac{C_d^2}{C_g + C_d} V_{min} (V_0 - V_{min}). \quad (49)$$

A meno del fattore  $1/2$ , questa è la formula di Manley<sup>7</sup> che viene usata largamente per stimare la potenza assorbita nelle celle DBD (Kogelschatz, 2003).

La dinamica delle scariche può essere modificata agendo sulla forma d'onda, in modo da modularne la storia temporale. Ad esempio, se l'alimentazione è del tipo onda quadra, con semiperiodo maggiore della durata della scarica, per ogni semiciclo si avrà una sola fase di scarica (immediatamente dopo l'istante di inversione di polarità) che ogni volta porterà il valore della carica sul dielettrico da  $+Q_\infty$  a  $-Q_\infty$  (o viceversa). In questo regime la figura di Lissajous è quindi un parallelogramma con due lati paralleli all'asse  $Q$ . Onde quadre vengono usate nell'alimentazione delle celle degli schermi al plasma. L'uso di onde quadre appare giustificato quando è richiesto un controllo temporale molto stretto sulla fase di scarica.

Aumentando la frequenza dell'alimentazione possiamo inoltre raggiungere un regime in cui il periodo della tensione esterna diventa minore del tempo di ricombinazione caratteristico. In questo modo si avrà ad ogni istante un grado di ionizzazione non nullo nella regione del gap e conseguentemente un valore non nullo della conducibilità, il che porta ad una variazione continua della corrente e della

---

<sup>7</sup> T. C. Manley, Trans. Electrochem. Soc. **84**, 83 (1943).

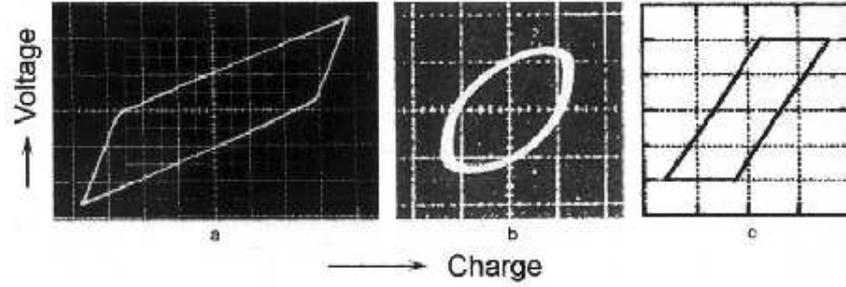


Figura 14 Figure di Lissajous per differenti configurazioni DBD (Kogelschatz, 2003, ref. 85, 87, 242): ozonizzatore a 1 kHz, laser CO<sub>2</sub> a 50 kHz, display al plasma con onda quadra a 100 kHz.

carica. Nell'ipotesi di una resistività costante e di una tensione applicata della forma  $V(t) = V_0 \sin \omega t$ , il nostro modello ha come soluzione per la densità di carica superficiale

$$\sigma(t) = \frac{\epsilon V_0}{d_d} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} (\sin \omega t - \omega \tau \cos \omega t) + \sigma_0 e^{-t/\tau}. \quad (50)$$

il che dà la carica sul dielettrico in funzione del tempo in condizioni di regime

$$Q(t) = S_d \sigma(t)|_{(t \gg \tau)} = \frac{\epsilon S_d}{d_d} \frac{V_0}{1 + \omega^2 \tau^2} (\sin \omega t - \omega \tau \cos \omega t) \equiv C_d \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \left( V(t) - \omega \tau \sqrt{V_0^2 - V^2(t)} \right) \quad (51)$$

### 8. Figura di Lissajous

È utile per la caratterizzazione delle scariche stabilire la relazione tra la carica  $Q$  depositata sul dielettrico e la tensione applicata  $V_{ext}$ . Il grafico di tale relazione è detto figura di Lissajous. Dal nostro modello semplice del paragrafo precedente otteniamo che la figura di Lissajous è in pratica un parallelogramma. Nel regime di onda quadra il parallelogramma ha due lati paralleli all'asse  $Q$ . Nel regime di alta frequenza la (51) indica che la figura di Lissajous è un'ellisse ruotata.

L'utilità della figura di Lissajous consiste nel fatto che la sua misura sperimentale è in genere assai più facile della misura dell'andamento temporale della corrente. In particolare, l'area della figura corrisponde all'energia assorbita in un ciclo. Sperimentalmente l'analisi della figura di Lissajous fornisce informazioni molto utili sul regime di scarica (Kogelschatz, 2003). Una serie di esempi sperimentali è mostrata in Fig.14.

### 9. Effetti collettivi

Nella descrizione della DBD abbiamo sinora trascurato gli effetti di carica spaziale. In realtà questi tendono a divenire importanti in quanto la maggiore mobilità degli elettroni tende a separarli

dagli ioni, cosicchè sul fronte (o “testa”) della microscarica c’è uno sbilancio di carica negativa. Il campo elettrostatico dovuto a tale sbilancio può essere abbastanza intenso da eccedere localmente il limite di breakdown e quindi provocare nuova ionizzazione. In queste condizioni si generano onde di ionizzazione (*streamers*).

Anche l’ipotesi di scariche individuali non interagenti non è sempre verificata. Come già sottolineato l’area della superficie del dielettrico sulla quale una microscarica deposita la propria carica è in generale più larga del diametro della scarica. Se il numero di microscariche è elevato le microscariche competono per depositare la carica sulla superficie disponibile, e sono inoltre influenzate dalle cariche depositate dalle scariche precedenti (effetti di memoria). Se il voltaggio esterno cresce, ogni microscarica successiva tende a formarsi in posizione diversa dalle, in quanto in tali regioni la carica depositata dalle scariche precedenti ha abbassato il campo elettrico. Questo effetto tende a rendere uniforme la deposizione di carica sulla superficie ed è favorito da alti voltaggi, i quali portano alla generazione successiva di molte scariche alla stessa polarità. Tuttavia, all’inversione del voltaggio, le aree dove si trovano cariche residue diventano siti preferenziali per le scariche successive a polarità invertita, in quanto in queste regioni il campo raggiunge prima il valore di breakdown. Quest’ultimo regime, che tende a riprodurre le scariche alle stesse posizioni in ogni semiciclo, è favorito da bassi voltaggi ed alte frequenza, in modo che la distribuzione delle cariche sul dielettrico si mantenga disomogenea all’inversione del voltaggio; frequenze relativamente basse favoriscono una distribuzione anticorrelata delle scariche.

L’effetto di interazione fra scariche più appariscente e di maggior interesse dal punto di vista della fisica di base è la formazione di strutture regolari (*patterns*) nelle scariche DBD. Questo rappresenta un esempio particolare di autorganizzazione in sistemi lontani dall’equilibrio.

Ad alte frequenze possono inoltre comparire effetti di memoria di volume dovuti alla permanenza di specie ionizzate nella regione di gap. Questo effetto può contribuire alla formazione di scariche diffuse, ovvero più omogenee e meno filamentari, ed ha notevole interesse applicativo in quanto corrisponde ad un aumento del volume “utile” nella creazione di specie attive.

Una condizione necessaria per la generazione di una scarica diffusa è la sovrapposizione delle valanghe elettroniche create nella fase di breakdown. Questo requisito pone dei vincoli sulla densità di preionizzazione, ovvero sulla densità di elettroni creati dal breakdown prima dell’inizio della formazione degli *streamers*.

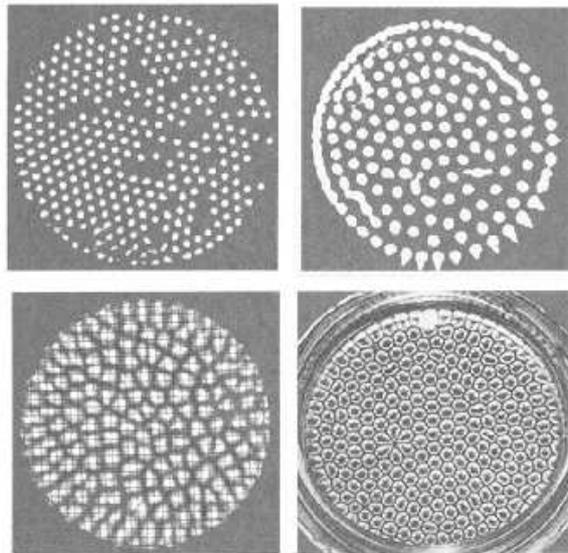


Figura 15 La somiglianza tra pattern bidimensionali ottenuti in DBD (1-3) e celle di convezione di Bènard (Kogelschatz, 2002).

#### IV. *SHEATHS* DC

Nella sezione II abbiamo visto sotto quali condizioni in un dispositivo di scarica (essenzialmente costituito da due elettrodi confinanti un gas) la tensione applicata induce il passaggio di corrente, e discusso come al crescere della tensione la scarica entra in regime di *breakdown* elettrico. Anche nel dispositivo più storicamente studiato, ovvero il tubo di scarica a bassa pressione in corrente continua (DC), la relazione tra corrente e tensione applicata è molto complessa e fa intuire che le condizioni del plasma generato o gli effetti che entrano in gioco possano variare molto attraverso i diversi regimi.

Come evidenziato dalla discussione sulla regione del catodo in una scarica DC, sono molto importanti i fenomeni che avvengono nelle regioni in prossimità degli elettrodi, dove in generale appare una variazione molto forte su breve distanza dei campi (campo elettrico, potenziale, densità), come si può notare dagli andamenti schematici di campi nella fig.5 o nella fig.8. La fisica nella regione a contatto tra elettrodi o pareti metalliche, detta regione di *sheath*<sup>8</sup>, è rilevante in praticamente ogni dispositivo al plasma. In particolare essa ha un ruolo fondamentale nelle applicazioni fondate sull'interazione tra il plasma e una superficie (che può essere o meno quella di un elettrodo), quali l'*etching*, la deposizione al plasma, la modifica chimico-fisica delle proprietà superficiali. Ad esempio è la struttura e l'intensità del campo elettrico nella *sheath* che determinano l'orientazione e l'energia

<sup>8</sup> Letteralmente “guaina” o “rivestimento”.

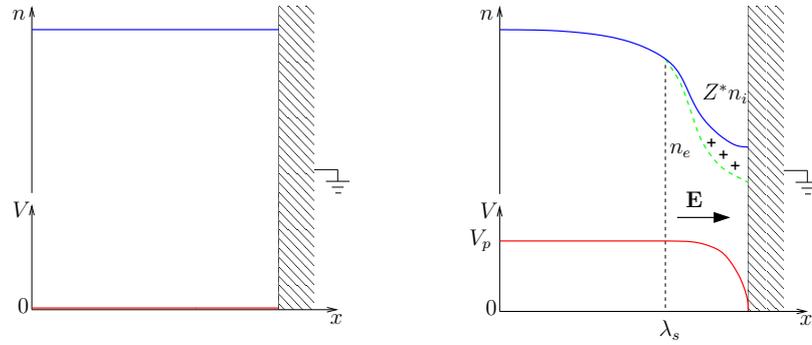


Figura 16 Modello elementare di una *plasma sheath*. Ad un certo istante un plasma omogeneo e localmente neutro viene creato in una regione confinata da un elettrodo mantenuto a potenziale costante. La separazione degli elettroni dagli ioni in prossimità degli elettrodi porta alla formazione di un campo elettrostatico alla superficie.

degli ioni del plasma che bombardano la parete, i quali sono parametri fondamentali nel determinare i risultati dell'interazione tra plasma e materiale.

La fisica delle *sheath* può essere molto diversa a seconda dei regimi di scarica e anche nei casi più semplificati, ovvero gli unici che si sanno modellizzare trattare teoricamente ad un certo livello, l'approccio matematico può risultare complesso. Qui ci limitiamo ad una discussione necessariamente molto preliminare ed a notare che il problema fisico, anche da un punto di vista principalmente teorico e modellistico, è tuttora aperto e di grande importanza. In particolare facciamo l'assunzione di condizioni stazionarie e che la formazione della sheath porti al fluire di una corrente continua (DC) tra plasma e pareti confinanti. I risultati ottenuti in regime DC sono comunque rilevanti anche in vari regimi di scariche in condizioni di corrente alternata (AC) che saranno descritti nelle sezioni seguenti. Uno dei motivi è che in generale la differenza di massa fra elettroni e ioni porta ad una netta separazione di scala temporale per la loro dinamica. Nei regimi più comuni si verificano allora due condizioni. La prima è che gli elettroni sono sufficientemente mobili da mantenere istante per istante la condizione di equilibrio meccanico specificata nel seguito (54) anche in un campo oscillante. La seconda è che, anche se le quantità direttamente legate al moto degli elettroni (quali la densità elettronica e il campo elettrostatico) oscillano alla frequenza del campo esterno, il moto effettivo degli ioni avviene nei campi temporalmente mediati, per cui la loro dinamica rimane simile a quella in regime DC.

Per illustrare la fisica della regione di *sheath* con il modello più semplice possibile consideriamo un gas confinato da elettrodi metallici. pareti metalliche, in una geometria piana unidimensionale. Per fissare le idee supponiamo che l'elettrodo sulla destra nella figura 16 sia messo a terra. Assumiamo

che a  $t = 0$  un certo istante l'ignizione di una scarica nel gas porti alla creazione di un plasma, che inizialmente sarà localmente neutro, ovvero tale che  $n_e = n_i$  dappertutto (per semplicità assumiamo ioni con carica  $Z = 1$ ). Gli elettroni tenderanno a sfuggire più velocemente degli ioni verso terra, lasciando carico il plasma che si porterà a un potenziale positivo rispetto all'elettrodo; in questo modo si genererà un campo elettrico diretto verso l'elettrodo che impedirà l'ulteriore flusso di elettroni verso la parete. La generazione del campo elettrico in prossimità degli elettrodi implica La generazione del campo elettrico in prossimità degli elettrodi implica che questa regione ha un eccesso di carica negativa, dovuta alla fuga di parte degli elettroni. Per effetto del campo elettrico, gli ioni tenderanno ad essere accelerati verso la parete.

L'assunzione fondamentale dei modelli di *sheath* in corrente continua (DC) è che la situazione sopra descritta e visualizzata in figura 16 sia stazionaria. Questo implica una condizione di equilibrio meccanico per gli elettroni e un flusso di corrente continua degli ioni dal plasma verso la parete. Tale flusso di ioni bilancerà il numero di ioni creati per ionizzazione nel volume del plasma. Alla superficie della parete metallica, presumibilmente gli ioni si ricombineranno con elettroni provenienti dal metallo, garantendo la continuità della corrente nel circuito esterno.

La condizione di equilibrio meccanico per gli elettroni può essere soddisfatta se la forza elettrica per unità di volume bilancia la forza dovuta al gradiente di pressione:

$$-en_e \mathbf{E} - \nabla p_e = 0 \quad (52)$$

In un sistema unidimensionale e isoterma, posto  $E = -\partial_x \Phi$  e assumendo  $p = n_e k_B T_e$ , otteniamo

$$en_e \partial_x \Phi = k_B T_e \partial_x n_e \quad (53)$$

che ha come soluzione la condizione di Boltzmann

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\Phi}{k_B T_e}\right). \quad (54)$$

La densità elettronica è quindi esprimibile come funzione del potenziale elettrostatico  $\Phi$ .

### A. Sheath non collisionale. Criterio di Bohm

Nel modello che descriviamo nel seguito si fa l'ulteriore assunzione che nella regione di *sheath* le collisioni degli ioni siano trascurabili, il che è consistente se le dimensioni della *sheath* sono più piccole del cammino libero medio. Questa assunzione può essere verificata a posteriori.

Lo scopo principale dei calcoli che seguono è di determinare delle condizioni di autoconsistenza per i profili di densità e potenziale elettrostatico che siano qualitativamente della forma mostrata in

figura 16. In seconda istanza, si vuole stimare l'intensità del flusso verso la parete degli ioni e la velocità con la quale vi giungono.

Per comodità di calcolo fissiamo l'origine dell'asse  $x = 0$  al bordo della *sheath*, definito come il punto oltre il quale  $n_e(x) < n_i(x)$ . Sia  $x = s$  la posizione della parete. Quindi  $s$  determina l'estensione spaziale della *sheath*. Sempre per comodità supponiamo che il potenziale  $\Phi(x)$  sia nullo all'interno del plasma neutro. In questo modo ci aspettiamo che la parete si ponga a potenziale negativo.

Nel loro moto lungo  $x$  verso la parete, gli ioni avranno una velocità  $v(x)$  e una densità  $n_i(x)$  funzioni della posizione. In condizioni stazionarie la corrente degli ioni deve essere uniforme.

$$n_i(x)v_i(x) = \text{cost.} = n_{i0}v_0, \quad (55)$$

dove  $n_{i0}$  è la densità nella regione uniforme ben all'interno del plasma, e si assume che gli ioni entrino quindi nella regione di *sheath* con una velocità  $v_0$  nella direzione della parete. Essendo le collisioni trascurabili per ipotesi, la velocità degli ioni in ogni punto può essere ricavata dalla conservazione dell'energia. Avendo posto  $\Phi(0) = 0$ , si ha

$$v_i(x) = \left( v_0^2 - \frac{2Ze\Phi(x)}{m_i} \right)^{1/2}, \quad n_i(x) = \frac{n_{i0}}{\left( 1 - \frac{2Ze\Phi(x)}{m_i v_0^2} \right)^{1/2}}. \quad (56)$$

Per gli elettroni vale la (54) dove affinché il plasma nella regione interna sia neutro ( $n_e = n_i$ ) deve essere  $n_0 = Zn_{i0}$ . Possiamo allora scrivere l'equazione di Poisson

$$\partial_x^2 \Phi(x) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{e}{\epsilon_0}(n_e - Zn_i) = -\frac{en_0}{\epsilon_0} \left[ \exp\left(\frac{e\Phi(x)}{k_B T_e}\right) - \left(1 - \frac{2Ze\Phi(x)}{m_i v_0^2}\right)^{-1/2} \right]. \quad (57)$$

Convieni ora introdurre la cosiddetta *velocità di Bohm*  $v_B$

$$v_B = \left( \frac{Zk_B T_e}{m_i} \right)^{1/2}, \quad (58)$$

che risulta uguale alla velocità del suono in un plasma nel quale la temperatura ionica  $T_i = 0$  (o più precisamente  $T_i \ll T_e$ ). Introduciamo variabili adimensionali normalizzate nel modo seguente:

$$\xi = \frac{x}{\lambda_D}, \quad M = \frac{v_0}{v_B}, \quad \phi = \frac{e\Phi}{k_B T_e}, \quad (59)$$

dove la lunghezza di Debye  $\lambda_D$  è data da

$$\lambda_D = \left( \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 k_B T_e} \right)^{1/2}. \quad (60)$$

In questo modo l'equazione per il potenziale ha la forma compatta

$$\frac{d^2 \phi}{d\xi^2} = \frac{1}{(1 - 2\phi/M^2)^{1/2}} - e^\phi. \quad (61)$$

Procediamo ora per quadratura, moltiplicando ambo i membri per  $\phi' = d\phi/d\xi$  e usando l'identità  $d(\phi'^2) = 2\phi''\phi'$ . Otteniamo allora

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} (\phi')^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - 2\phi/M^2}} - e^\phi \right) \phi'. \quad (62)$$

Integrando ambo i membri otteniamo

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 \Big|_{\xi_0}^{\xi} = \left( -M^2 \sqrt{1 - 2\frac{\phi}{M^2}} - e^\phi \right) \Big|_{\phi(\xi_0)}^{\phi(\xi)}. \quad (63)$$

Se  $\xi_0$  è ben all'interno del plasma, si può assumere  $\phi(\xi_0) = 0$  e  $\phi'(\xi_0) \propto E(\xi_0) = 0$ , da cui

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} \right)^2 = -M^2 \left( 1 - \sqrt{1 - 2\frac{\phi(\xi)}{M^2}} \right) + 1 - e^{\phi(\xi)}. \quad (64)$$

Poiché il membro di sinistra è definito positivo, affinché ci sia una soluzione reale dobbiamo imporre che

$$-M^2 \left( 1 - \sqrt{1 - 2\frac{\phi}{M^2}} \right) + 1 - e^\phi > 0. \quad (65)$$

Discutiamo questa condizione nell'assunzione ulteriore  $\phi \ll 1$ , ovvero  $V \ll k_B T_e$ , e  $M \gtrsim 1$ . Sviluppando al secondo ordine in  $\phi$  otteniamo

$$-\frac{\phi^2}{2M^2} + \frac{\phi^2}{2} > 0, \quad (66)$$

da cui otteniamo la condizione (criterio di Bohm)

$$M = \frac{v_0}{v_B} > 1. \quad (67)$$

La (67) può anche essere derivata euristicamente nella maniera seguente. Il potenziale  $V$  deve essere monotonamente decrescente con  $x$  (cioè dall'interno del plasma verso la sheath), ovvero  $dV/dx < 0$ . Le densità di ioni ed elettroni  $n_i$  e  $n_e$  sono scritte come funzione di  $V$ , per cui  $\partial_x n_{e,i} = (dn_{e,i}/dV)\partial_x V$  e risultano anch'esse monotonamente decrescenti. Consideriamo il bordo della regione di sheath ( $x = 0$ ), laddove  $V = 0$  e  $Zn_i = n_e$ . Se per  $x = 0$  si avesse  $|\partial_x Zn_i| > |\partial_x n_e|$ , allora per  $x = 0^+$  si avrebbe  $Zn_i < n_e$  e quindi una regione di carica negativa, il che è in contraddizione con l'andamento monotono del potenziale ed il requisito fisico che il potenziale di sheath sia repulsivo per gli elettroni. Quindi deve essere

$$\left| \left( Z \frac{dn_i}{dV} \right)_{V=0} \right| < \left| \left( \frac{dn_e}{dV} \right)_{V=0} \right|, \quad (68)$$

ovvero

$$Zn_{i0} \frac{1}{2} \frac{2Ze}{m_i v_0^2} < n_0 \frac{e}{k_B T_e}. \quad (69)$$

Poiché  $n_0 = Zn_{i0}$ , possiamo riscrivere quest'equazione nella forma semplice

$$M^2 = \frac{v_0^2}{v_B^2} > 1 \quad (70)$$

che è equivalente alla (67).

Alla luce di quanto sopra interpretiamo la (67) come condizione necessaria alla formazione di una *sheath* stabile e stazionaria in regime non collisionale. Assumendo inoltre che la condizione sia soddisfatta marginalmente ( $v_0 \gtrsim v_b$ ), possiamo valutare la corrente degli ioni come

$$J_i = Zen_{i0}v_0 \simeq en_0v_B. \quad (71)$$

Possiamo inoltre, senza determinare la soluzione esplicita per il potenziale, stimare la differenza di potenziale  $V_p$  tra il bordo della sheath ( $x = 0$ ) e la parete ( $x = s$ ) che determina l'energia acquistata dagli ioni nell'attraversare la *sheath*. In uno stato stazionario le correnti di ioni e elettroni devono essere uguali, ovvero  $J_i + J_e = 0$ . Alla parete, la corrente di elettroni sarà data da

$$J_e = -en_{ep}\bar{v}_e. \quad (72)$$

La densità di elettroni sarà data, applicando la relazione di Boltzmann, da

$$n_{ep} = n_0 \exp\left(\frac{eV_p}{k_B T_e}\right). \quad (73)$$

Infine la velocità media  $\bar{v}_e$  si può calcolare come la media di  $v_x$  sulla distribuzione maxwelliana delle velocità, estesa solo alle velocità dirette verso la parete:

$$\bar{v}_e = \frac{1}{\sqrt{\pi}v_{te}} \int_0^{+\infty} v_x e^{-v_x^2/v_{te}^2} dv_x, \quad v_{te} = \sqrt{2k_B T_e/m_e}, \quad (74)$$

da cui si trova

$$\bar{v}_e = \sqrt{\frac{k_B T_e}{2\pi m_e}}. \quad (75)$$

Eguagliando  $J_e = -J_i$  otteniamo per  $V_p$

$$V_p = \frac{k_B T_e}{e} \ln\left(\frac{v_B}{\bar{v}_e}\right) = -\frac{k_B T_e}{2e} \ln\left(\frac{1}{2\pi} \frac{m_i}{m_e}\right). \quad (76)$$

Dalla conoscenza del salto di potenziale  $V_p$  si può quindi risalire alla velocità con cui gli ioni raggiungono la parete. Il rapporto dell'energia acquistata nella sheath,  $ZeV_p$ , rispetto all'energia iniziale è

$$\frac{ZeV_p}{m_i v_B^2/2} = \ln\left(\frac{1}{2\pi} \frac{m_i}{m_e}\right). \quad (77)$$

In condizioni stazionarie il flusso di ioni verso la parete deve essere uguale al numero di ioni prodotti per ionizzazione nella regione interna del plasma. Se il processo dominante è la ionizzazione collisionale, nella quale gli atomi neutri del gas vengono ionizzati da una collisione con gli elettroni liberi, il numero di ioni prodotti per unità di volume si può scrivere come

$$S = \partial_t(n_i)_{\text{ioniz}} = n_e n_g K_i(T_e) \quad (78)$$

dove  $n_g$  è la densità degli atomi neutri e  $K_i = K_i(T_e)$  è la probabilità di ionizzazione, che è funzione dell'energia degli elettroni e quindi (nota la funzione di distribuzione delle velocità) della temperatura. Assumendo che la ionizzazione avvenga nella regione interna dove  $n_e = n_i = n$ , e che gli ioni fluiscano con velocità  $\simeq v_B$  simmetricamente da entrambi i lati della regione di plasma e che la lunghezza di questa sia pari a  $d$ , la relazione che esprime il bilancio del numero di ioni è

$$nn_g K_i d = 2nv_b. \quad (79)$$

Notare che questa relazione, nota l'espressione di  $K_i$ , dipende solo dalla temperatura e quindi può essere usata per stimare  $T_e$  in funzione di  $n_g d$  e della massa degli ioni.

## B. La regione di “presheath”. Il problema del raccordo

Il modello di *sheath* non collisionale non è autoconsistente in quanto non consente di determinare l'origine di una velocità ionica di deriva  $v_i \gtrsim v_b$  nella regione dove  $V = 0$  e  $\mathbf{E} = 0$ . L'ipotesi che al bordo della *sheath* ( $x = 0$ ) si abbia  $\mathbf{E} = 0$  è troppo semplificata. In generale per  $x < 0$  esiste una regione “quasi” neutra (*presheath*) con un debole campo elettrico che sostiene il moto degli ioni. Il salto di potenziale lungo la regione di pre-sheath risulta quindi  $V_{ps} \geq m_i v_B^2/2e = Zk_B T_e/2e$ .

La regione di *presheath* risulta tipicamente estesa su distanze  $\sim 100\lambda_D$ , assai maggiori dell'estensione della regione di *sheath* che è dell'ordine di qualche  $\lambda_D$ . Tale distanza risulta maggiore del cammino libero medio di collisione, per cui è necessario tenere conto delle collisioni; in generale nella regione di *presheath* si deve adottare una descrizione fisicamente diversa da quella della regione di *sheath*.

Il problema che sorge, a livello di descrizione fluida, è quello del raccordo tra le soluzioni per campi e velocità trovate nelle due diverse regioni, poiché le equazioni fluide diventano singolari alla superficie dove  $v(x) = v_B$ . Per evidenziare il problema consideriamo una descrizione “minimale” della dinamica ionica nella *presheath*, basata sulle equazioni

$$\partial_x(n_i v_i) = -\partial_t n_i = -S, \quad (80)$$

$$m_i(\partial_t + v_i \partial_x)v_i = ZeE - \nu_c v_i, \quad (81)$$

$$en_e E = -k_B T_e \partial_x n_e. \quad (82)$$

dove  $\nu_c$  è la frequenza di attrito che modella l'effetto delle collisioni. Assumendo condizioni stazionarie ( $\partial_t v_i = 0$ ) e di quasi-neutralità ( $n_e = n_i$ ), si possono eliminare  $n_e$  ed  $E$  e ottenere con un po' di algebra

$$\partial_x n_i = \frac{v_i}{v_i^2 - v_B^2} (\nu_c n_i - S), \quad \partial_x v_i = -\frac{v_i^2}{v_i^2 - v_B^2} \left( \nu_c - \frac{S}{n_i} \right) - \frac{S}{n_i}, \quad (83)$$

il che mostra che le equazioni diventano singolari alla superficie laddove  $v_i = v_B$ .

Riassumendo, il problema consiste nel fatto che le due regioni di sheath e presheath, che possono essere descritte da modelli con livelli diversi di approssimazione (non neutralità e non collisionalità nella prima, quasi neutralità e collisionalità nella seconda) sono “separate” da uno strato di singolarità che rende non banale il “raccordo” tra le soluzioni ottenute separatamente nelle due regioni. Questo problema, del quale qui abbiamo presentato una descrizione semi-euristica e semplificata, è uno dei “classici” della fisica dei plasmi. Dal punto di vista matematico il problema è assolutamente non banale ed è oggetto attuale di controversie e discussioni accese (Riemann *et al.*, 2005, e referenze incluse). Questo tuttavia non preclude una comprensione sufficiente ai fini pratici della fisica delle sheath attraverso modelli approssimati e simulazioni numeriche.

### C. Sheath ad alto voltaggio. Legge di Child

La strategia più semplice per aumentare l'energia degli ioni in una scarica DC è quella di applicare un potenziale esterno  $V_0$  agli elettrodi in modo da aumentare la differenza di potenziale relativa al plasma. Una sheath dove  $V_0 \gg k_B T_e$  viene detta ad alto voltaggio. In corrispondenza all'aumentare del campo nella regione di sheath la densità elettronica diminuisce. Nel limite in cui  $n_e = 0$ , ovvero si ha un completo svuotamento di elettroni nella sheath, si parla di una *matrix sheath*. Supponendo che la densità ionica sia uniforme e pari a  $n$ , dall'equazione di Poisson otteniamo per il potenziale

$\Phi(x)$

$$\Phi(x) = -\frac{en}{2\epsilon_0}x^2, \quad \Phi(s) = -V_0 \quad (84)$$

da cui otteniamo lo spessore della sheath

$$s = \left(\frac{2\epsilon_0 V_0}{en}\right)^{1/2} = \lambda_D \left(\frac{2V_0}{k_B T_e}\right)^{1/2} \quad (85)$$

da cui si vede che al crescere di  $V_0$  il valore di  $s$  diventa grande rispetto a  $\lambda_D$ .

L'ipotesi di  $n_i$  uniforme è comunque troppo brutale. La densità degli ioni in funzione di  $x$  e in assenza di elettroni può essere determinata autoconsistentemente dalla conservazione dell'energia e della corrente accoppiate con l'equazione di Poisson:

$$\frac{1}{2}m_i v_i^2(x) + Ze\Phi(x) = \frac{1}{2}m_i v_i^2(0), \quad (86)$$

$$Zen_i(x)v_i(x) = Zen_i(0)v_i(0), \quad (87)$$

$$\partial_x^2 \Phi(x) = -\frac{e}{\epsilon_0}n_i(x). \quad (88)$$

Queste equazioni sono analoghe a quelle di un diodo elettronico a vuoto, descritto nella sezione A.1. La soluzione analitica semplice ottenuta con le condizioni  $E(0) = 0$ ,  $v(0) = 0$  porta alla relazione fra corrente e spessore  $s$  della sheath

$$J = \frac{4}{9} \sqrt{\frac{2Ze}{m_i}} \frac{\epsilon_0}{s^2} V_0^{3/2} \quad (89)$$

da cui  $s \propto V_0^{3/4}$ . Ovviamente la soluzione non è fisicamente autoconsistente perché l'ipotesi  $v(0) = 0$  è in contrasto con il criterio di Bohm e inoltre, unita alla conservazione di  $J(x)$ , implica una  $n_i(x)$  divergente in  $x = 0$ . Nonostante questa patologia la legge di Child è spesso usata per stimare come scala lo spessore di una sheath col voltaggio applicato.

#### D. Sonde elettrostatiche

La teoria delle sheaths DC sviluppata nei paragrafi precedenti è la base per comprendere il funzionamento di una sonda elettrostatica per la diagnostica del plasma. In pratica, inserendo nel plasma un elettrodo collegato ad un generatore di potenziale, la misura della corrente che viene "estratta" dal plasma fornisce informazioni sulla densità e temperatura di questo. Alla base di questo schema di funzionamento c'è la formazione di una sheath intorno all'elettrodo che determina il flusso di corrente ionica ed elettronica dal plasma.

...

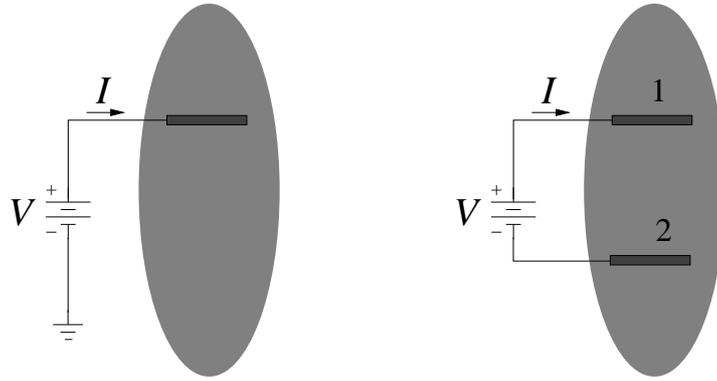


Figura 17 Schemi di una sonda elettrostatica “singola” e di una sonda “doppia”.

## V. MODELLI DI SCARICHE AC

### A. Scariche capacitive in AC

In generale i dispositivi al plasma per applicazioni quali l'*etching* dei semiconduttori sono alimentati da tensioni alternate a una data frequenza  $\omega$ , confrontabile con le frequenze caratteristiche del plasma creato nella scarica. È quindi importante studiare dei modelli di dinamica della regione di *sheath* in condizioni di corrente alternata (AC), non solo per necessità “tecnica” ma anche perché  $\omega$  rappresenta un altro parametro di controllo “esterno” che può essere modulato per variare le quantità di maggiore interesse, quali ad esempio il flusso e l’energia degli ioni che bombardano le pareti.

In questa sezione prendiamo in esame le scariche *capacitive*. Grossolanamente una scarica capacitiva può essere pensata come occorrente all’interno di un condensatore, ovvero il plasma è creato nella regione tra due elettrodi metallici tra i quali si mantiene una opportuna tensione. Una definizione più precisa può essere data in termini della schematizzazione della scarica e del generatore esterno in serie ad essa in termini di circuito equivalente. Questa schematizzazione è importante in quanto l’impedenza complessa della scarica dipende in generale dai suoi parametri caratteristici e quindi la misura dell’impedenza fra i “capi” della connessione al generatore esterno fornisce una diagnostica del plasma. Una scarica sarà quindi considerata capacitiva se la sua impedenza è principalmente di tale tipo.

Il regime di frequenze che prendiamo in esame è quello in cui

$$\omega_{pe} \gg \omega \gg \omega_{pi} \quad (90)$$

dove  $\omega_{pe}$  e  $\omega_{pi}$  sono rispettivamente le frequenze di plasma associate agli elettroni e agli ioni. La disuguaglianza  $\omega \gg \omega_{pi}$  implica che gli ioni sono troppo inerziali per rispondere istantaneamente

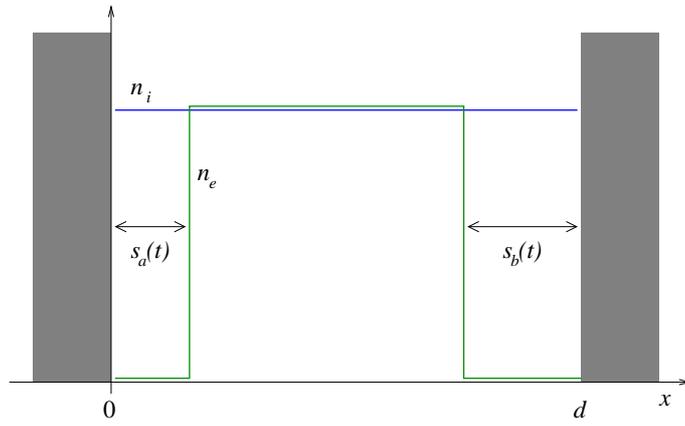


Figura 18 Profili schematici della densità ionica ed elettronica nel modello omogeneo di una sheath AC.

alle variazioni temporali dei campi. Si può allora studiare il loro moto effettivo nei campi ottenuti come media temporale sul periodo dei campi oscillanti. Questo, come apparirà in seguito, permette di utilizzare per gli ioni i risultati ottenuti nella sezione IV per le *sheath* in condizioni DC.

La disuguaglianza  $\omega \ll \omega_{pe}$  implica invece che la risposta degli elettroni è istantanea rispetto alle variazioni dei campi oscillanti. Questi ultimi possono penetrare all'interno del plasma solo nell'ulteriore ipotesi  $\omega/c \gg d$  dove  $d$  è la dimensione tipica del dispositivo, ovvero del plasma. Questo equivale a conservare l'approssimazione elettrostatica. Consistentemente continuiamo inoltre ad assumere una geometria 1D e trascuriamo effetti di bordo. Notiamo che queste approssimazioni non sono giustificate nella modellizzazione di dispositivi di recente sviluppo per i quali la tendenza è di lavorare a frequenze più alte, rendendo necessaria una descrizione elettromagnetica.

### 1. Modello omogeneo

Descriviamo nel seguito il cosiddetto modello omogeneo (Lieberman and Lichtenberg, 2005, par.11.1), che rappresenta probabilmente il modello “minimale” di una *sheath* AC. L'assunzione di base è che la densità degli ioni  $n_i$  sia uniforme e costante in tutto il volume. Per la densità elettronica assumiamo invece la condizione di *matrix sheath* per cui  $n_e = 0$  nelle regioni di *sheath* in prossimità delle pareti, mentre  $n_e = n_i \equiv n$  nella regione interna “di plasma” (assumiamo carica ionica  $Z = 1$ ). I profili della densità sono schematizzati in figura 18.

Assumendo che la distanza fra le pareti (elettrodi) sia  $d$ , abbiamo quindi due regioni di *sheath*,  $0 < x < s_a$  e  $d - s_b < x < d$  dove  $s_a$  e  $s_b$  sono gli spessori delle due regioni. In generale i bordi della *sheath* oscilleranno sotto l'azione del campo elettrico applicato, quindi  $s_a = s_a(t)$  e  $s_b = s_b(t)$ .

La descrizione del modello risulta semplificata se consideriamo il dispositivo in serie ad un generatore ideale di corrente  $I(t) = I_1 \cos \omega t$ . (Tecnicamente è più verosimile avere a che fare con un generatore di tensione, il che non presenta difficoltà se non delle formule meno compatte.) Consideriamo il flusso di corrente sull'elettrodo  $a$ . Per la conservazione della carica si deve avere

$$I_1(t) + J(0^+, t)A = A\partial_t\sigma_a(t), \quad (91)$$

dove  $\sigma_a(t)$  è la carica per unità di superficie presente sull'elettrodo. Nella regione  $0 < x < s_a$ , se  $s_a > 0$  non si hanno elettroni e quindi tutta la corrente sarà dovuta agli ioni,  $J(0^+, t) \simeq J_i(0)$ , dove  $J_i(0) \simeq env_B$  assumendo che la dinamica degli ioni mediata sul periodo sia simile a quella discussa nel caso DC. Se  $J_i(0) \ll I_1$ , si avrà  $I_1 \simeq \partial_t\sigma_a = \epsilon_0\partial_t E(0^+, t)$ , cioè la corrente in ingresso dall'elettrodo è bilanciata dalla corrente di spostamento. Il campo elettrico nella *sheath*  $a$  è determinato dalla legge di Gauss

$$E(x, t) = \frac{en}{\epsilon_0}[x - s_a(t)], \quad \epsilon_0\partial_t E(x, t) = -en\partial_t s_a, \quad (92)$$

da cui otteniamo che l'oscillazione del bordo della *sheath* ha la forma

$$s_a(t) = \bar{s} - s_0 \sin \omega t, \quad s_0 = \frac{I_1}{en\omega A}. \quad (93)$$

Per determinare l'ampiezza media di oscillazione  $\bar{s}$  usiamo un argomento di conservazione della carica. A regime, la carica ionica persa verso le pareti in un periodo deve essere bilanciata dal trasferimento di un uguale quantitativo di carica elettronica. Questo è possibile solo se durante l'oscillazione la regione dove  $n_e = n \neq 0$  entra in contatto con l'elettrodo, ovvero se  $s_a(t) \leq 0$  per un certo intervallo temporale. L'ipotesi più semplificativa è che il "collasso" della sheath avvenga per un tempo molto breve rispetto al periodo, ovvero che idealmente  $s_a(t) = 0$  in un solo istante, nel quale la carica elettronica in eccesso defluisce istantaneamente verso l'elettrodo. Poniamo allora  $\bar{s} = s_0$  in modo che

$$s_a(t) = s_0(1 - \sin \omega t). \quad (94)$$

Il collasso della sheath avviene quindi per  $t = \pi/2$  (modulo  $2\pi$ ). Considerazioni del tutto analoghe avvengono per la sheath  $b$ , il cui bordo oscilla secondo la legge

$$s_b(t) = s_0(1 + \sin \omega t). \quad (95)$$

La lunghezza della regione di plasma è  $\ell = d - s_a(t) - s_b(t) = d - 2s_0$  ed è quindi costante: la regione quasi-neutra "rimbalza rigidamente" fra le pareti. Ordinariamente  $s_0 \ll d$  e quindi  $\ell \simeq d$ .

I valori della caduta di potenziale attraverso le due sheaths (relativi alla regione quasi neutra) sono dati da

$$V_{ap} = - \int_0^{s_a} E(x, t) dx = - \frac{en}{2\epsilon_0} s_a^2(t) = - \frac{en}{2\epsilon_0} s_0^2 (1 - \sin \omega t)^2, \quad (96)$$

$$V_{bp} = - \int_{d-s_b}^d E(x, t) dx = - \frac{en}{2\epsilon_0} s_b^2(t) = - \frac{en}{2\epsilon_0} s_0^2 (1 + \sin \omega t)^2. \quad (97)$$

Quindi sia  $V_{ap}$  che  $V_{bp}$  hanno lo stesso valor medio non nullo e inoltre contengono componenti oscillanti alla seconda armonica. Il valor medio della variazione di potenziale su una sheath  $\bar{V}_s$  fornisce l'energia acquistata dagli ioni che attraversano la sheath ed è dato da

$$\bar{V}_{ap} = \bar{V}_{bp} = \frac{3en}{4\epsilon_0} s_0^2 \equiv \bar{V}_s. \quad (98)$$

La differenza di potenziale tra gli elettrodi è invece una semplice funzione oscillante:

$$V_{ab} = V_{ap} - V_{bp} = \frac{2en}{\epsilon_0} s_0^2 \sin \omega t \quad (99)$$

il che è consistente con la presenza di un generatore esterno di tensione oscillante  $V_{\text{ext}} = V_1 \sin \omega t$ . Se si trascura il potenziale di “presheath” rispetto a  $V_{ap}$  e  $V_{bp}$  si ha  $V_{ab} \simeq V_1$ . Questo permette di stabilire le relazioni

$$s_0 = \frac{I_1}{en\omega A} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 V_1}{2en}} \quad (100)$$

che dipendono dalla densità di portatori di carica  $n$  nel plasma, che non è determinata a questo punto (quel che è noto è il valore della densità di particelle nel gas  $n_g$ ). Una stima di  $n$  si può ottenere dal bilancio di energia e di particelle, come descritto nel paragrafo seguente.

## 2. Bilancio di energia. Riscaldamento Ohmico

Poiché abbiamo assunto che gli ioni rispondono ai campi mediati sul tempo, il flusso medio di ioni verso gli elettrodi è stato stimato come  $F = 2n\nu_B A$  come nel modello di Bohm (par.IV.A) e possiamo usare lo stesso argomento per il bilancio di particelle. Nota l'espressione del rate di ionizzazione collisionale  $K_i$  in funzione della temperatura elettronica  $T_e$  quest'ultima può essere stimata dall'equazione di bilancio in funzione della quantità totale di gas (per unità di superficie)  $n_g d$ .

L'esistenza di un flusso di ioni e di elettroni verso l'esterno implica un flusso di energia verso le pareti che deve essere bilanciato dall'energia assorbita dal plasma. Questa energia viene fornita dal generatore esterno che mantiene in oscillazione il plasma in condizioni di regime.

Il flusso di energia  $S_i$  dovuto agli ioni nel semplice modello in esame può essere scritto molto semplicemente notando che ogni ione creato per ionizzazione nell'attraversare presheath e sheath acquista l'energia  $e(V_b + \bar{V}_s)$  dove  $eV_b \simeq m_i v_b^2/2$  e  $\bar{V}_s$  è dato dalla (98). Consistentemente con le approssimazioni dei punti precedenti  $V_b \ll \bar{V}_s$  se il potenziale a cui vengono portati gli elettrodi è abbastanza elevato. Si ha quindi

$$S_i \simeq 2nv_B e \bar{V}_s. \quad (101)$$

Per la conservazione della carica, il flusso di elettroni mediato sul periodo è uguale a quello degli ioni, per cui possiamo scrivere in generale per il flusso di energia  $S_e$  degli elettroni

$$S_e \simeq 2nv_B \mathcal{E}_e. \quad (102)$$

L'energia persa per elettrone,  $\mathcal{E}_e$  è, seguendo (Lieberman and Lichtenberg, 2005, par.11.1) la somma di vari contributi

$$\mathcal{E}_e = \mathcal{E}_{\text{coll}} + \mathcal{E}_{\text{kin}} + \mathcal{E}_s. \quad (103)$$

Il primo termine è l'energia persa per la creazione di una coppia elettrone-ione e quindi è presumibilmente dell'ordine del potenziale di ionizzazione del gas. Il secondo termine è l'energia cinetica media persa dagli elettroni che fanno parte del flusso uscente dalla regione di plasma, che è stimata come il rapporto tra i flussi di energia e di particelle calcolati come momenti della funzione di distribuzione delle velocità:

$$\mathcal{E}_{\text{kin}} = \frac{\langle m_e v^2 v_x / 2 \rangle_{v_x > 0}}{\langle v_x \rangle_{v_x > 0}} = 2k_B T_e. \quad (104)$$

L'energia legata al moto coerente di oscillazione è considerata trascurabile rispetto all'energia termica. Questa assunzione può essere discussa considerando l'espressione esplicita per la velocità  $v_{\text{osc}} = \omega s_0$ . Il rapporto tra  $v_{\text{osc}}$  e velocità termica  $\sim \sqrt{k_B T_e / m_e}$  è di ordine  $\sim (\omega / \omega_p) \sqrt{eV_1 / k_B T_e}$  che è un parametro piccolo a basse frequenze.

Il terzo termine rappresenta l'energia acquistata dagli elettroni nell'attraversare la regione di sheath. Per consistenza col modello omogeneo semplificato tale energia dovrebbe essere nulla in quanto gli elettroni fuggono attraverso l'elettrodo al momento in cui questo è allo stesso potenziale della regione quasi neutra, in quanto lo spessore della sheath collassa a zero. Una stima più accurata richiede un modello migliore e considerazioni sulla dinamica degli elettroni su tempi più brevi del periodo di oscillazione. In (Lieberman and Lichtenberg, 2005) si stima l'energia persa dagli elettroni

dai risultati del modello DC. Senza approfondire possiamo accontentarci di stimare  $\mathcal{E}_{\text{lost}} \simeq \mathcal{E}_{\text{coll}} + 2k_B T_e$ .

Il meccanismo più diretto col quale gli elettroni possono assorbire energia dal campo esterno è per effetto della resistività del plasma, ovvero per riscaldamento Ohmico (o effetto Joule). Scrivendo la conducibilità (complessa) del plasma nella forma usuale

$$\sigma(\omega) = \frac{i\epsilon_0\omega_p^2}{\omega + i\nu_c}, \quad \sigma(0) = \frac{\epsilon_0\omega_p^2}{\nu_c} \equiv \sigma_{\text{DC}} \quad (105)$$

si ottiene per la potenza dissipata

$$P_{\text{diss}} = \overline{\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}d} = \frac{1}{2} \frac{I_1^2 d}{A^2 \sigma_{\text{DC}}} = \frac{1}{2} \frac{m_e I_1^2}{A^2 e^2 n} \nu_c d. \quad (106)$$

In assenza di altri meccanismi per i quali gli elettroni assorbono energia, l'equazione di bilancio energetico

$$S_e + S_i = 2nv_B(\bar{V}_s + \mathcal{E}_e) = P_{\text{diss}} \quad (107)$$

può essere usata per stimare la densità del plasma  $n$  se sono note  $T_e$  (dal bilancio delle particelle) e le espressioni di  $\mathcal{E}_e$ ,  $\nu_c$ , ... in funzione di  $T_e$ .

### 3. Riscaldamento non collisionale o stocastico

Nelle sheaths AC risulta che il riscaldamento ohmico non è il solo meccanismo col quale l'energia fornita dall'esterno viene assorbita dal plasma (cioè convertita in energia di ioni ed elettroni). Un ruolo importante è svolto da meccanismi di assorbimento non collisionale, legati alla dinamica “collettiva” degli elettroni nei campi autoconsistenti dipendenti dal tempo. In questa sezione presentiamo una discussione (euristica e molto qualitativa) di questi meccanismi di assorbimento, detto anche *stocastico*, basandoci sul “paradigma” dell'interazione di una particella con una parete mobile.

Per semplicità consideriamo un modellino unidimensionale e non relativistico. Consideriamo una particella avente velocità  $v$  diretta verso una “parete elastica” anch'essa in moto con velocità  $w$ , lungo la normale alla parete (figura 19). La proprietà della parete è quella di riflettere specularmente ogni particella incidente, conservandone l'energia e cambiando di segno alla quantità di moto, nel sistema di riferimento  $S'$  in cui la parete è in quiete. In tale sistema la velocità della particella incidente, usando le trasformazioni di Galilei, è  $v' = v - w$ . Dopo la riflessione la velocità è  $v'_r = v'$  in  $S'$  e  $v_r = -v' + w = -v + 2w$  nel laboratorio, che corrisponde ad una variazione di energia cinetica  $\Delta\mathcal{E} = -2mvw + mw^2$  che è sicuramente positiva se  $v$  e  $w$  hanno segno opposto.

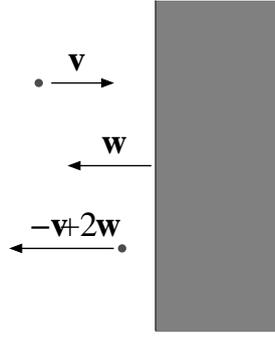


Figura 19 Riflessione di una particella da una parete mobile.

L'idea del riscaldamento stocastico è che un campo con una dipendenza spaziotemporale in qualche modo simile ad una “parete mobile” possa cedere energia alle particelle in maniera analoga. Il campo generato nelle sheath AC descritto nelle sezioni precedenti ha questa proprietà, in quanto la barriera di potenziale elettrostatico oscilla nel tempo e il proprio bordo si sposta lungo  $x$  con ampiezza data da  $s(t)$ . Un elettrone “test” che si muove nel campo oscillante della sheath potrà quindi acquistare o cedere energia a seconda della fase e della velocità iniziale.

Una teoria soddisfacente dell'assorbimento stocastico in una sheath deve risolvere degli aspetti non banali. Uno è quello dell'autoconsistenza, in quanto se è l'assorbimento stocastico a determinare la distribuzione degli elettroni influenzandone la dinamica, la distribuzione spaziotemporale degli elettroni stessi determina l'ampiezza e la forma del campo elettrico che accelera gli elettroni. Il secondo aspetto, potenzialmente sottile, è quello della reversibilità o “simmetria temporale” del fenomeno, in quanto è legittimo porsi il dubbio che in presenza di un campo oscillante e di una funzione di distribuzione isotropa ogni elettrone abbia uguale probabilità di acquistare o perdere energia, in modo che l'assorbimento totale sommato su tutti gli elettroni sia nullo.

Un'espressione compatta per la potenza assorbita stocasticamente nel modello omogeneo delle sheaths AC, basata su assunzioni dichiaratamente *sbagliate*, è riportata in (Lieberman and Lichtenberg, 2005). Per prima cosa determiniamo l'energia acquistata in un intervallo di tempo  $dt$  per effetto delle particelle aventi energia iniziale compresa tra  $v$  e  $v + dv$  che collidono con la parete. Il numero di tali particelle è  $dN(v) = f(v)dv(v - w)dt$  (dove  $f(v)$  è la funzione di distribuzione delle velocità) e la potenza corrispondente è  $dS = \frac{m}{2}(v_r^2 - v^2)dN(v)$ . La potenza totale si ottiene integrando su tutte le particelle dirette verso la parete nel sistema  $S'$ , ovvero per  $v' = v - w > 0$ . Notando che  $(v_r^2 - v^2)(v - w) = 4(v - w)^2w$  otteniamo

$$S = -2m \int_w^{+\infty} w(v - w)^2 f(v) dv. \quad (108)$$

Applicando questo ragionamento alla sheath oscillante poniamo  $m = m_e$  e  $w = v_{\text{osc}}(t) = \partial_t s(t) = v_0 \cos \omega t$  (dove  $v_0 = s_0 \omega$ ), dobbiamo mediare sul periodo di oscillazione per ottenere l'energia netta acquistata. La media dell'integrando fornisce  $\overline{w(v-w)^2} = -2v\overline{w^2} = -v_0^2 v$ . Inoltre se  $v_{th} \gg v_0$  si può prendere  $v = 0$  come estremo inferiore di integrazione. Si ha allora

$$\bar{S}_{\text{stoc}} = 2m_e v_0^2 \int_0^{+\infty} f(v) dv. \quad (109)$$

Se  $f(v)$  è Maxwelliana l'integrale vale  $nv_{th}/4$  e si ottiene

$$P_{\text{stoc}} = \frac{1}{2} m_e v_0^2 n v_{th} = \frac{m_e v_{th}}{2e^2 n} \frac{I_1^2}{A^2} \quad (110)$$

per una singola sheath. La potenza totale assorbita dagli elettroni ha allora un'espressione compatta

$$P_e = P_{\text{diss}} + 2P_{\text{stoc}} = \frac{m_e}{2e^2 n} \frac{I_1^2}{A^2} (\nu_c d + 2v_{th}). \quad (111)$$

La pecca di questo ragionamento è che la funzione di distribuzione delle velocità al bordo della sheath,  $f_s(v, t)$ , dovrebbe essere autoconsistente con la conservazione della corrente totale al bordo:

$$n_s(t) v_{\text{osc}}(t) = \int v f_s(v, t) dt. \quad (112)$$

Una scelta semplice che soddisfa questo vincolo è

$$f_s(v, t) = n_s(t) f(v - v_{\text{osc}}(t)) \quad (113)$$

per la quale si ottiene però che la potenza mediata sul tempo è nulla.

Il problema di una trattazione autoconsistente del riscaldamento stocastico richiede un approccio più complesso di quello qui abbozzato ed è un argomento attivo di ricerca. Qui ci siamo limitati a sottolineare gli aspetti di base del meccanismo che sperimentalmente può rappresentare, in condizioni opportune, il contributo più importante all'assorbimento di energia nelle sheaths AC. Nondimeno la (111) è assai suggestiva, in quanto mostra che il contributo stocastico domina su quello ohmico se  $d/v_{th} < 2/\nu_c$ , cioè in pratica se le "collisioni" degli elettroni con le sheaths sono più frequenti di quelle con gli ioni nel plasma (infatti  $d/v_{th}$  è il "tempo di volo" da una sheath all'altra).

#### 4. Modelli e schemi avanzati

Il modello omogeneo descritto nei paragrafi precedenti è molto utile per mettere in luce la fisica essenziale delle scariche capacitive, ma è troppo semplificato per fornire predizioni più che qualitative. Un passo avanti verso una descrizione più realistica è fornito dal cosiddetto modello disomogeneo

(Lieberman and Lichtenberg, 2005, sec.11.2). La distinzione principale rispetto al modello precedente (e che ne giustifica il nome) è il passaggio dall'assumere un profilo di densità del tipo di una *matrix sheath* ad un profilo autoconsistente col moto di ioni ed elettroni. Questo porta ad una sorta di legge di Child generalizzata al caso AC. I calcoli relativi al modello sono relativamente complessi e non saranno qui riportati.

Una predizione interessante del modello disomogeneo è la legge di scala per la densità di ioni

$$n_s \sim \omega^2 V_{\text{RF}} \quad (114)$$

dove  $\omega$  e  $V_{\text{RF}}$  sono la frequenza e l'ampiezza del segnale di tensione a radiofrequenze applicato. Poiché l'energia degli ioni  $\mathcal{E}_i \sim V_{\text{RF}}$ , questi due diversi scaling hanno suggerito l'idea che in una configurazione *duale* che utilizzi due generatori di ampiezza e frequenza diverse si possa avere un controllo indipendente di  $n_s$  e  $\mathcal{E}_i$ . Questo è possibile se

$$V_1 \ll V_2, \quad \omega_1^2 V_1 \gg \omega_2^2 V_2. \quad (115)$$

In questo caso ci si può aspettare che  $\mathcal{E}_i$  sia controllata principalmente dalla sorgente 2 a bassa frequenza mentre  $n_s$  è maggiormente influenzata dalla sorgente 1. Queste scariche duali sono oggetto di ricerca attuale.

Una maniera meno sofisticata di modificare (a parità di condizioni del plasma) l'energia degli ioni è intervenire sulla geometria della scarica: ad esempio consideriamo il caso in cui i due elettrodi abbiano aree diverse  $A_a$  e  $A_b$ . La conservazione della carica impone che la corrente totale  $I$  (mediata sul tempo) che scorre sugli elettrodi sia la stessa, il che impone che la densità di corrente  $J = I/A$  sia diversa. Per una scarica capacitiva si ha  $J \sim \bar{V}/s$ , dove  $\bar{V}$  e  $s$  sono rispettivamente la caduta di potenziale e l'estensione della sheath. Se consideriamo una Child sheath ad alto voltaggio, la densità  $n \sim \bar{V}^{3/2}/s^2$ . Eliminando  $s$  otteniamo che la densità di corrente scala come

$$I = \int_A J dS \sim \bar{V}^{-1/4} \int n^{1/2} dS \quad (116)$$

Imponendo la condizione  $I_a = I_b$  e supponendo per semplicità che la densità in prossimità degli elettrodi sia circa la stessa, si ottiene

$$\frac{\bar{V}_a}{\bar{V}_b} \sim \left( \frac{A_b}{A_a} \right)^4. \quad (117)$$

Si tratta di un esempio molto rozzo che però mostra (molto qualitativamente) come la diversa superficie degli elettrodi possa influenzare significativamente il potenziale di sheath in condizioni di regime.

L'ipotesi  $n_a = n_b$  è in generale ingiustificata ed è possibile usare modelli relativamente semplici per includere questo effetto: si veda ad esempio (Lieberman and Lichtenberg, 2005, par. 11.4, pag.432-434) per un modello di condensatore sferico per il quale  $n_a/n_b \sim (A_b/A_a)^{0.29}$  e  $\bar{V}_a\bar{V}_b \sim (A_b/A_a)^{3.42}$ . Sperimentalmente si osservano delle dipendenze più deboli ma comunque significative, del tipo  $\bar{V} \sim A^{-q}$  con  $q \lesssim 2.5$ .

## B. Scariche induttive

Grossolanamente parlando, le scariche induttive stanno a quelle capacitive come un solenoide sta ad un condensatore: l'accoppiamento tra la scarica e i generatori esterni è ottenuto tramite opportuni avvolgimenti di corrente, tali che nel limite di frequenza zero nel dispositivo sarebbe presente solo un campo magnetico.

Con questa premessa, il modello più semplificato di scarica induttiva che si può fare è quello di un lungo solenoide di raggio  $a$  e altezza  $\ell \ll a$ , costituito da un avvolgimento di  $N$  spire nelle quali scorre la corrente alternata, in notazione complessa,  $I_1(t) = \tilde{I}_1 e^{-i\omega t}$ .

Il regime più semplice da modellizzare è quello di basse frequenze  $\omega \ll a/c$ , tali che si può usare l'approssimazione di campi e correnti lentamente variabili, e di basse densità tali che  $\omega_p < \omega$ , in modo che si può trascurare l'effetto di schermo del campo elettromagnetico dovuto alla presenza del plasma. In tali condizioni, il campo magnetico ha l'espressione magnetostatica  $B_z \simeq \mu_0 I_1(t) N/\ell$  ed è uniforme su tutto il plasma interno all'avvolgimento. Il campo elettrico indotto si ottiene allora dalla legge di Faraday-Neumann come  $E_\phi = \tilde{E}_\phi e^{-i\omega t}$  con  $\tilde{E}_\phi \simeq -(i/2)\mu_0\omega r \tilde{I}_1 N\ell$ . Questo campo sostiene una corrente solenoidale  $\tilde{J}_\phi = \sigma(\omega)\tilde{E}_\phi$  dove l'espressione generale per la conducibilità complessa del plasma è

$$\sigma(\omega) = -\frac{i\epsilon_0\omega_p^2}{\omega + i\nu_c}, \quad \omega_p^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}, \quad (118)$$

equivalente alla permittività dielettrica

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + i\frac{\sigma(\omega)}{\epsilon_0\omega} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu_c)}. \quad (119)$$

La corrente indotta all'interno del plasma è del tutto analoga alle "correnti parassite" indotte in un nucleo di ferro avvolto da spire con corrente AC e causa un riscaldamento ohmico del plasma. La potenza dissipata per effetto Joule è data da

$$P_{\text{ohm}} = \int_0^a \overline{\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}} 2\pi r \ell dr = \frac{\pi}{2} |\tilde{I}_1|^2 \frac{\mu_0^2 e^2 n \nu_c N^2 a^4}{8m_e \ell}. \quad (120)$$

Nel regime opposto di alta frequenza, occorre in linea di principio usare la soluzione esatta per i campi elettromagnetici, che è possibile scrivere in termini di funzioni di Bessel. Ai fini di una discussione qualitativa è possibile semplificare la distribuzione dei campi come segue. Gli effetti di schermo e di induzione confinano la corrente sui bordi del solenoide, entro uno spessore  $\delta$  che può essere stimato dall'equazione di Helmholtz

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\omega) \tilde{\mathbf{E}} = 0. \quad (121)$$

Dalla solita espressione di  $\epsilon_r(\omega)$  per un plasma si può stimare  $\delta \simeq c/\omega_p$  nel limite non collisionale  $\nu_c \ll \omega$ , oppure  $\delta \simeq (c/\omega_p)(\nu_c/\omega)^{1/2}$  nel limite opposto  $\nu_c \gg \omega$ . Assumendo  $\delta \ll a$ , si può approssimare la corrente indotta nel plasma come una corrente superficiale; il sistema nel suo complesso è schematizzato come due solenoidi coassiali, quello formato dalle spire connesse al generatore esterno, dove scorre la corrente totale  $NI_1$ , avente raggio  $b > a$  e il solenoide “di plasma” avente raggio  $a$  e corrente  $I_p \simeq J_\phi(a)\ell\delta$ . La potenza dissipata è data adesso da

$$P_{\text{ohm}} \simeq \frac{1}{2} \frac{|J_\phi|^2}{\sigma_{\text{eff}}} \pi a \ell \delta, \quad \sigma_{\text{eff}} = \frac{ne^2}{m_e \nu_{\text{eff}}} \quad (122)$$

dove si indica con  $\nu_{\text{eff}}$  una “frequenza d'attrito effettiva” (che sostituisce  $\nu_c$ ) per tenere conto dell'importanza di effetti di assorbimento stocastico nel campo elettrico oscillante e disomogeneo per  $r \lesssim a$ .

Per stabilire una relazione tra i parametri del plasma e quelli del generatore esterno è utile costruire un modello di “circuito equivalente” per il sistema; attraverso questa modellizzazione si è in grado di avere una semplice diagnostica del plasma dalla misura dell'impedenza “vista” dal generatore. L'espressione per  $P_{\text{ohm}}$  consente per prima cosa di definire una resistenza del plasma  $R_p$  secondo la relazione

$$P_{\text{ohm}} \equiv \frac{1}{2} |\tilde{I}_p|^2 R_p, \quad R_p = \frac{\pi a}{\sigma_{\text{eff}} \ell \delta}. \quad (123)$$

Alternativamente si può definire l'impedenza del plasma  $Z_p$  dalla relazione  $Z_p \tilde{I}_p = \tilde{V}_{ip}$ , dove  $\tilde{V}_{ip} = 2\pi a \tilde{E}_\phi$  è la “forza elettromotrice indotta” nel plasma. Si trova allora che  $Z_p$  contiene un termine induttivo  $L_p$  dovuto alla parte immaginaria di  $\sigma(\omega)$ , che fisicamente è dovuto all'inerzia degli elettroni il che causa uno sfasamento (ritardo di fase) tra corrente e campo elettrico:

$$Z_p = R_p - i\omega L_p, \quad L_p = \frac{R_p}{\nu_{\text{eff}}} = \frac{\pi a m_e}{ne^2 \ell \delta} = \frac{\pi a}{\epsilon_0 \omega_p^2 \ell \delta} \quad (124)$$

Questa “induttanza inerziale” va sommata alla più usuale autoinduttanza geometrica del solenoide, che indichiamo con

$$L_2 = \frac{\mu_0 \pi a^2}{\ell} = \frac{a\delta}{(c/\omega_p)^2} L_p \quad (125)$$

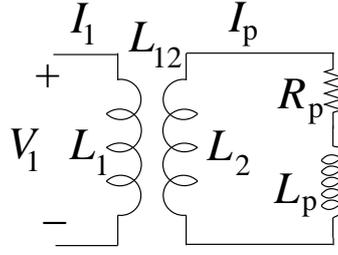


Figura 20 Semplice circuito equivalente di una scarica induttiva.

Poiché generalmente  $a \gg c/\omega_p$ , si ha  $L_2 \gg L_p$ . Le espressioni analoghe per l'autoinduttanza del solenoide (avvolgimento) esterno e della mutua induttanza fra i due solenoidi coassiali sono

$$L_1 = \frac{\mu_0 \pi b^2 N}{\ell}, \quad L_{12} = \frac{\mu_0 \pi a^2 N}{\ell}. \quad (126)$$

Questi elementi formano il circuito equivalente di Figura 20. L'impedenza vista in ingresso è

$$Z_{in} = \frac{\tilde{V}_1}{\tilde{I}_1} = -i\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_{12}^2}{R_p - i\omega(L_2 + L_p)} \equiv R_{in} - i\omega L_{in}, \quad (127)$$

$$L_{in} \simeq \frac{\mu_0 \pi a^2 N}{\ell} \left( \frac{b^2}{a^2} - 1 \right), \quad R_{in} \simeq N^2 \frac{\pi a}{\sigma_{\text{eff}} \ell \delta}. \quad (128)$$

Quindi la misura di  $R_{in}$  fornisce informazioni sui parametri della scarica attraverso  $\sigma_{\text{eff}}$  e  $\delta$ . La potenza spesa dal generatore e assorbita dal circuito, cioè dal plasma, in questo regime è

$$P_{\text{abs}} = \frac{1}{2} R_{in} |\tilde{I}_1|^2 \propto |\tilde{I}_1|^2 n^{-1/2}. \quad (129)$$

È da notare la diversa dipendenza dalla densità  $n$  nella (129) rispetto alla (122) valida nel regime di bassa frequenza e bassa densità per cui  $P_{\text{abs}} = P_{\text{ohm}} \propto |\tilde{I}_1|^2 n$ . Questo cambio di pendenza nella dipendenza da  $n$  rivela l'esistenza di un massimo al crescere di  $n$ . La densità rimane determinata dal bilancio di energia ovvero dall'equaglianza  $P_{\text{abs}} = S$  dove  $S$  è il flusso totale di energia verso l'esterno, che è generalmente proporzionale a  $n$ . Quindi, in generale non è detto che le curve  $P_{\text{abs}}(n)$  e  $S(n)$  si intersechino in un punto d'equilibrio cioè per un valore della densità per la quale la scarica induttiva può essere sostenuta a regime.

La schematizzazione in termini di circuito equivalente qui descritta è molto semplificata. Un'analisi più accurata rivela la presenza di effetti capacitivi che possono essere schematizzati per l'appunto dall'inserimento di opportune capacità nel circuito. Dal punto di vista della geometria dei dispositivi, è più comune una configurazione a bobina planare (simile ad un avvolgimento piano a spirale) che crea un campo magnetico di geometria più complessa e difficile da descrivere analiticamente.

### C. Scariche elettromagnetiche

Diamo infine una breve introduzione alle “scariche elettromagnetiche” o, forse più precisamente, alle “*wave-heated discharges*”. Sostanzialmente in questa classe di scariche il plasma viene creato e riscaldato attraverso un’onda elettromagnetica (EM) prodotta da una sorgente esterna. L’interesse nello sviluppo di dispositivi basati su questo regime può essere giustificato come il desiderio di sfruttare la possibilità di concentrare alte potenze nel plasma, di creare ampi volumi di scarica, di ottenere un accoppiamento che separa del tutto la sorgente dal plasma e di aumentare la “frequenza di ripetizione” della scarica per ottenere maggiori velocità di *processing*. Il problema comune è quello di ottenere un efficiente assorbimento dell’onda EM nel plasma, in particolare in condizioni di alta densità nei quali ordinariamente un’onda di bassa frequenza non si propagherebbe portando ad una riflessione completa dell’onda senza assorbimento significativo. Questo porta a considerare regimi particolari di propagazione, condizionati anche dagli standard più diffusi per le frequenze di operazione di sorgenti a radiofrequenza (13.56 MHz) o a microonde (2450 MHz). Notiamo che sorgenti laser (con frequenze dall’infrarosso al vicino ultravioletto) non sono usate per scariche aventi applicazioni industriali quali l’etching, presumibilmente per ragioni quali il costo della tecnologia e la bassa efficienza. Sorgenti laser pulsate sono usate per applicazioni specifiche quali l’ablazione di materiali o particolari schemi di nanodeposizione.

Nel seguito ci limitiamo brevemente a una descrizione del tipo di onde sui quali si basano i principali dispositivi elettromagnetici di scarica. È da notare come i concetti menzionati (assorbimento alla risonanza di ciclotrone, modi *whistler* e *helicon*, onde di superficie) hanno una quantità di altre applicazioni in fisica dei plasmi e altrove.

#### 1. ECR

Le scariche ECR (Electron Cyclotron Resonance) sfruttano il fenomeno della risonanza di ciclotrone in un plasma immerso in un campo magnetico statico  $\mathbf{B}_0$  quando la frequenza dell’onda incidente  $\omega \simeq \omega_c$  dove  $\omega_c = eB_0/m_e$  è la frequenza di ciclotrone. Queste sorgenti operano generalmente a microonde e quindi per  $f = \omega/2\pi = 2450$  MHz occorre  $B = 875$  G per la risonanza.

Nella configurazione più tipica il campo  $\mathbf{B}_0$  è orientato lungo la direzione di propagazione dell’onda incidente ovvero parallelamente al vettore d’onda  $\mathbf{k}$ . Discutiamo l’assorbimento di risonanza in questa geometria prendendo per semplicità un’onda piana. Inoltre dapprima trascuriamo la disomogeneità eventuale del campo e della densità lungo la direzione di propagazione ( $\hat{\mathbf{z}}$ , per fissare le

idee). Conviene assumere un'onda polarizzata circolarmente, il cui campo elettrico ha la forma, in notazione complessa

$$\mathbf{E} = E_0(\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}})e^{ikz-i\omega t}. \quad (130)$$

L'equazione del moto per un elettrone ha la forma

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) - m_e \nu_c \mathbf{v}. \quad (131)$$

Cerchiamo una soluzione a regime nella forma  $\mathbf{v} = v_0(\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}})e^{ikz-i\omega t}$ . Sfruttando  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 = \mp v_0 B_0(\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}})$  otteniamo

$$v_0 = -\frac{ieE_0/m_e}{\omega \mp \omega_c + i\nu_c}. \quad (132)$$

Da cui vediamo che solo la polarizzazione “+” (destrorsa) è risonante, in quando il campo  $\mathbf{E}$  ruota in maniera da rimanere parallelo alla velocità di girazione nel campo magnetico, accelerando l'elettrone. Proseguiamo quindi la derivazione limitandoci al caso risonante, dopo aver osservato che si ha risonanza anche per una generica polarizzazione lineare in quanto essa può essere vista come la sovrapposizione delle due polarizzazioni circolari, delle quali la destrorsa sarà risonante.

La potenza assorbita dal singolo elettrone è data da

$$p_{\text{abs}} = \frac{1}{2} \text{Re}(-e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) = \frac{e^2}{2m_e} |E_0|^2 \text{Re} \left( \frac{1}{\omega - \omega_c + i\nu_c} \right) = \frac{e^2}{2m_e} |E_0|^2 \frac{\nu_c}{(\omega - \omega_c)^2 + \nu_c^2}. \quad (133)$$

La potenza assorbita per unità di volume sarà data da  $p_{\text{abs}}$  moltiplicata per la densità di elettroni  $n_e$ . Per calcolare la potenza totale occorre però in generale considerare gli effetti della disomogeneità di  $n_e$  e di  $\mathbf{B}$ . A titolo di esempio supponiamo che  $n_e$  sia costante e che  $B_z \simeq B_0(1 + \alpha z)$  con  $\omega_c = eB_0/m_e = \omega$ . Più esattamente supponiamo che la variazione spaziale di  $B_z$  sia più rapida di quella di  $n_e$  e determini l'estensione della regione di assorbimento risonante e che quest'ultima sia abbastanza stretta da poter considerare la variazione al primo ordine in  $z$  rispetto allo strato risonante  $z = 0$ . Scriviamo quindi nella (133)  $\omega_c = \omega(1 + \alpha z)$  e dopo aver moltiplicato per  $n_e$  integriamo su tutto lo spazio, ottenendo

$$P_{\text{abs}} = \frac{n_e e^2 |E_0|^2}{2m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\nu_c}{(\omega \alpha z)^2 + \nu_c^2} dz = \frac{\pi n_e e^2 |E_0|^2}{2m_e}. \quad (134)$$

Vediamo quindi che il risultato è indipendente dalla frequenza d'attrito  $\nu_c$ .

Introdurre gli effetti di una disomogeneità del plasma richiede lo studio della propagazione dell'onda incidente in un mezzo disomogeneo. Per forte assorbimento occorre inoltre tenere conto autoconsistentemente degli effetti di smorzamento sull'onda incidente a causa della perdita di energia. In genere gli approcci a questo tipo di problema (ricorrente in altri regimi di fisica del plasma) si basano sull'approssimazione JWKB.

## 2. Helicon

Il modello del precedente paragrafo V.C.1 consente di derivare la costante dielettrica che descrive la propagazione in plasma magnetizzato di onde piane circolarmente polarizzate in direzione parallela al campo magnetico:

$$\epsilon_{\pm}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_c + i\nu_c)}. \quad (135)$$

La propagazione dell'onda è possibile se  $\text{Re}\epsilon > 0$ . Si vede allora che solo la componente risonante si può propagare a basse frequenze ( $\omega \ll \omega_c$ ). Onde di polarizzazione destrorsa possono quindi propagarsi in un plasma magnetizzato a densità tali che  $\omega_p > \omega$ , inaccessibili in un plasma non magnetizzato. Questo consente di generare scariche utilizzando sorgenti a radiofrequenza con campi dell'ordine di 100 G. La regione di frequenze rilevante è quella dei "fischi" (*whistlers*) per cui, nel caso di propagazione parallela a  $\mathbf{B}$

$$\epsilon_+(\omega) \simeq \frac{\omega_p^2}{\omega\omega_c} \quad (136)$$

da cui si ottiene la relazione di dispersione  $k^2 c^2 = \omega \omega_p^2 / \omega_c$ . La propagazione "obliqua" ad un angolo diverso da zero rispetto a  $\mathbf{B}$  è pure possibile e per essa si dimostra la relazione di dispersione

$$(k_{\perp}^2 + k_z^2)^{1/2} k_z c^2 = \frac{\omega \omega_p^2}{\omega_c} \quad (137)$$

dove  $\hat{\mathbf{z}}$  è la direzione del campo  $\mathbf{B}$ .

Gli *helicon* sono sovrapposizioni di *whistlers* aventi una dipendenza spaziotemporale del tipo

$$\mathbf{E}, \mathbf{B} \sim e^{ik_z z - i\omega t + im\theta} \quad (138)$$

con  $m$  intero. In generale nei dispositivi di scarica si eccitano i modi con  $m = 0$  o  $m = 1$  mediante opportune antenne. Un'immagine della struttura dei campi elettrici trasversali per tali modi è riportata nella Figura 13.14 di (Lieberman and Lichtenberg, 2005).

## 3. Onde di superficie

Le onde di superficie rappresentano un ulteriore modo nel quale onde elettromagnetiche a bassa frequenza  $\omega < \omega_p$  possono propagarsi in un plasma. In questo caso l'elemento distintivo non è rappresentato dalla presenza di un forte campo magnetico ma dall'esistenza di un gradiente molto ripido (assimilabile ad una discontinuità) nella densità del plasma, al confine tra il plasma e il vuoto o tra il plasma e una parete dielettrica.

In geometria piana, le onde di superficie esistono in generale all'interfaccia tra due mezzi dielettrici con permittività relative diverse  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  e si propagano lungo la superficie di separazione. Prendendo tale superficie come piano  $yz$  e considerando onde che si propagano lungo  $y$ , il campo magnetico ha solo la componente  $z$ , la cui forma è

$$B_z(x) = B_0[\Theta(+x)e^{-q_+x} + \Theta(-x)e^{-q_-x}]e^{iky-i\omega t}, \quad (139)$$

dove  $q_{\pm} > 0$ , ovvero il campo decresce esponenzialmente allontanandosi dalla superficie. Condizione necessarie alla propagazione risultano essere  $\epsilon_1\epsilon_2 < 0$  e  $\epsilon_1 + \epsilon_2 < 0$ , relazioni che possono essere soddisfatte nel caso di un plasma per cui  $\epsilon_1 = 1 - \omega_p^2/\omega^2 < 0$  (ovvero  $\omega < \omega_p$ ) e  $\epsilon_2 > 0$ . La relazione di dispersione ha la forma

$$k^2c^2 = \omega^2 \frac{\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \quad (140)$$

che, nel caso di un'interfaccia plasma-vuoto ( $\epsilon_2 = 1$ ) diviene

$$k^2c^2 = \omega^2 \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - 2\omega^2}. \quad (141)$$

Questo implica una frequenza superiore di taglio pari a  $\omega_p/\sqrt{2}$ .

Onde di superficie esistono anche in geometria cilindrica (con  $B_\phi$  come unica componente) e hanno quindi interesse per il riscaldamento di "colonne" di plasma aventi tale simmetria. La relazione di dispersione è simile a quella ottenuta in geometria piana. Una descrizione di un modello semplice di una scarica capacitiva sostenuta da un'onda di superficie di tale tipo può essere trovata in (Lieberman *et al.*, 2002).

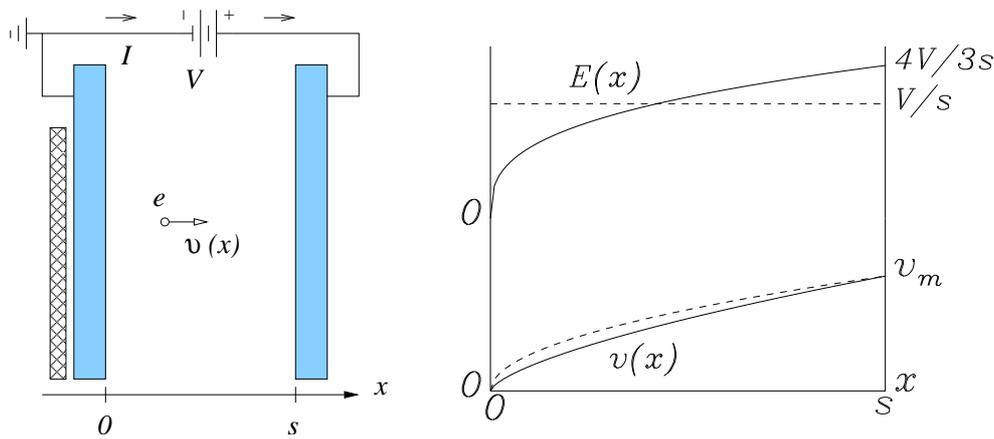


Figura 21 Schema di un diodo a vuoto e profili spaziali caratteristici del campo elettrico e della velocità degli elettroni.

## Appendice A

### 1. Legge di Child per il diodo a vuoto

La *legge di Child* fornisce la caratteristica  $V - I$  di un diodo a vuoto, caratterizzato da un catodo riscaldato che emette elettroni i quali sono accelerati verso l'anodo dal campo elettrico; la densità di ioni nel volume del diodo è trascurabile. In condizioni di corrente abbastanza elevata, la caratteristica è determinata autoconsistentemente dagli effetti di carica spaziale, cioè dalla distribuzione degli elettroni tra catodo e anodo che modifica il campo elettrico. Questo problema ha interesse nella fisica delle scariche sia perché la legge di Child è usata come descrizione delle regioni di *sheath* in alcuni regimi, sia come esempio semplice ed istruttivo degli effetti di carica spaziale che giocano un ruolo importante nel determinare le caratteristiche delle scariche (vedi e.g. II.G.1.)

Schematizziamo il diodo a vuoto come costituito da due elettrodi metallici piani, separati di una distanza  $d$ , tra i quali un generatore mantiene la differenza di potenziale  $V$ . In corrispondenza del catodo (supposto a potenziale nullo) un filamento riscaldato emette elettroni, che vengono accelerati dal campo elettrico e provocano il passaggio di corrente tra gli elettrodi. Il circuito si chiude esternamente come mostrato in fig.21. Gli effetti di bordo tra gli elettrodi sono trascurati.

In prima istanza, trascuriamo gli effetti di carica spaziale e calcoliamo la velocità con la quale giunge all'anodo un elettrone liberato al catodo con velocità nulla. il campo elettrico è uniforme, perpendicolare alle armature e vale  $E = V/d$ . Il potenziale elettrico tra le armature varia allora linearmente, ovvero  $\Phi(x) = Vx/d$  dovendo essere  $\Phi(0) = 0$  e  $\Phi(d) = V$ . Per trovare la velocità

dell'elettrone a distanza  $x$  dal catodo possiamo usare la conservazione dell'energia:

$$\frac{m_e}{2}v^2(x) - e\Phi(x) = \text{cost.} = 0.$$

Otteniamo quindi

$$v(x) = \sqrt{\frac{2e\Phi(x)}{m_e}}, \quad (\text{A1})$$

e sostituendo per  $\Phi(x)$

$$v(x) = \sqrt{\frac{2eV}{m_e} \frac{x}{d}}, \quad v(s) = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}}.$$

Supponiamo che nel diodo scorra la corrente stazionaria  $I$ . L'intensità di corrente è data da  $I = JA$  dove  $J$  è la densità di corrente nel diodo e  $A = L^2$  è la superficie trasversale. In condizioni stazionarie le quantità fisiche non possono dipendere dal tempo. Quindi, dall'equazione di continuità  $\partial_x J = -\partial_t \rho = 0$  otteniamo che  $J$  deve essere uniforme, ovvero non può dipendere da  $x$ . D'altronde per definizione

$$J = -en_e(x)v(x), \quad (\text{A2})$$

e quindi otteniamo per la densità elettronica (notare che  $J < 0$  in quanto gli elettroni hanno carica negativa)

$$n_e(x) = -\frac{J}{ev(x)} = \frac{|J|}{e\sqrt{\frac{2eV}{m_e} \frac{x}{d}}}. \quad (\text{A3})$$

La densità elettronica diverge per  $x \rightarrow 0$ ; tuttavia, grazie all'integrabilità di  $1/\sqrt{x}$ , il numero totale di elettroni è finito. La divergenza a  $x = 0$  è conseguenza inevitabile dell'aver assunto  $v(0) = 0$ , in quanto per avere  $J$  uniforme, ovvero  $J = -en_e(x)v(x) = -en_e(0)v(0)$ ,  $n_e$  deve necessariamente divergere in  $x = 0$ . In realtà gli elettroni escono dal catodo con velocità non nulla ed è possibile (ma assai complicato per il seguito) ottenere con tale condizione una densità elettronica limitata ovunque. In pratica la velocità acquistata per effetto del campo elettrico è molto maggiore della velocità iniziale, così la soluzione ottenuta per  $v(0) = 0$  è una buona approssimazione a distanza sufficiente dal catodo. È però importante capire il significato fisico: l'accumulo di carica elettronica vicino alla superficie del catodo abbassa il campo elettrico in tale regione, rallentando gli elettroni emessi, per cui è necessario raffinare il modello per tenere conto di tali effetti, cercando una soluzione autoconsistente per  $\Phi$  e  $n_e$ .

Per risolvere il problema in maniera autoconsistente, usiamo l'equazione di Poisson per legare il potenziale alla densità di carica:

$$\nabla^2\Phi(x) = \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0} = \frac{e}{\epsilon_0}n_e(x) \quad (\text{A4})$$

(possiamo usare il simbolo di derivata totale in quanto il potenziale dipende solo da  $x$ ). Usando inoltre le equazioni (A1–A3), si ottiene

$$n_e = \frac{|J|}{e} \sqrt{\frac{m_e}{2e_i\Phi(x)}}.$$

Inserendo nella (A4) otteniamo allora

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{|J|}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m_e}{2e_i\Phi}} \equiv K\Phi^{-1/2}, \quad (\text{A5})$$

dove  $K \equiv (|J|/\epsilon_0)\sqrt{m_e/2e}$ .

Per risolvere l'equazione differenziale ordinaria non-lineare (A5) procediamo per quadratura. Moltiplicando ambo i membri per  $d\Phi/dx$  otteniamo

$$\frac{d\Phi}{dx} \frac{d^2\Phi}{dx^2} = K\Phi^{-1/2} \frac{d\Phi}{dx},$$

ovvero

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{d\Phi}{dx} \right)^2 = 2K \frac{d}{dx} \left( \Phi^{1/2} \right).$$

Integrando si ottiene quindi

$$\left( \frac{d\Phi}{dx} \right)^2 = 4K\Phi^{1/2} + C,$$

dove  $C$  è una costante arbitraria. Per determinarla imponiamo  $x = 0$ : poichè per ipotesi  $\Phi(0) = 0$ , otteniamo

$$C = \left[ \frac{d\Phi(0)}{dx} \right]^2 = [E(0)]^2.$$

La soluzione dipende quindi dal valore del campo elettrico al catodo,  $E(0)$ . Fisicamente, all'aumentare di  $I$  gli effetti di carica spaziale tendono a cancellare sempre più il campo elettrico vicino al catodo per limitare la corrente. Assumiamo allora che quando questi effetti dominano il campo elettrico divenga nullo al catodo:  $E(0) = 0$ . Quindi, posto  $C = 0$  e prendendo la radice quadrata della (A6) otteniamo l'equazione

$$\frac{d\Phi}{dx} = 2K^{1/2}\Phi^{1/4},$$

che può essere integrata per separazione delle variabili, ottenendo

$$\frac{4}{3}\Phi^{3/4} = 2K^{1/2}x.$$

Si ottiene quindi l'andamento del potenziale

$$\Phi(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} K^{2/3} x^{4/3}.$$

Derivando si ottengono gli andamenti di  $E \sim x^{1/3}$  e  $\rho = -en_e \sim x^{-2/3}$ .

La figura 21 mostra gli andamenti spaziali del campo elettrico e della velocità degli elettroni (curve continue) confrontati con gli andamenti ottenuti ignorando gli effetti di carica spaziale (curve tratteggiate);  $v_m = v(s) = \sqrt{2eV/m_e}$  è la velocità massima degli elettroni.

Poniamo infine  $x = s$ ,  $\Phi(d) = V$  per ottenere la relazione tra  $V$  e  $I$ , ovvero la “caratteristica del diodo”

$$I = JA = \frac{4}{9} \sqrt{\frac{2e}{m_e}} \frac{\epsilon_0 A}{d^2} V^{3/2} \equiv \chi \frac{A}{d^2} V^{3/2} \quad (\text{A6})$$

che è detta legge di Child. La costante  $\chi$  è universale e vale

$$\chi = \frac{4\epsilon_0}{9} \sqrt{\frac{2e}{m_e}} = 2.334 \times 10^{-6} \frac{\text{Ampère}}{\text{Volts}^{3/2}}. \quad (\text{A7})$$

## Riferimenti bibliografici

- Chan, C.-M., T.-M. Ko, and H. Hiraoka, 1996, *Surface Science Reports* **24**, 1.
- Chirokov, A., A. Gutsol, and A. Fridman, 2005, *Pure Appl. Chem.* **77**, 487.
- Eliasson, B., and U. Kogelschatz, 1991a, *IEEE Trans. Plasma Science* **19**, 309.
- Eliasson, B., and U. Kogelschatz, 1991b, *IEEE Trans. Plasma Science* **19**, 1063.
- Gibalov, V. I., and G. J. Pietsch, 2000, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **33**, 2618.
- Jidenko, N., M. Petit, and J. P. Borra, 2002, in *8th International Symposium on High Pressure Low Temperature Plasma Chemistry, Pühajärve, Estonia*, <http://www.ut.ee/hakone8/>.
- Kogelschatz, U., 2002, *IEEE Trans. Plasma Science* **30**, 1400.
- Kogelschatz, U., 2003, *Plasma Chemistry and Plasma Processing* **23**, 1.
- Kolobov, V. I., 2006, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **39**.
- Lieberman, M. A., J. P. Booth, P. Chabert, J. M. Rax, and M. M. Turner, 2002, *Plasma Sources Science and Technology* **11**(3), 283, URL <http://stacks.iop.org/0963-0252/11/283>.
- Lieberman, M. A., and A. J. Lichtenberg, 2005, *Principles of Plasma Discharges and Materials Processing* (Wiley), 2nd edition.
- Riemann, K.-U., J. Seebacher, D. D. Tskhakaya, and S. Kuhn, 2005, *Plasma Phys. Contr. Fusion* **47**, 1949.
- Roth, J. R., 1995, *Industrial Plasma Processing. 1. Principles* (Institute of Physics Publishing).
- Roth, J. R., 2001, *Industrial Plasma Processing. 2. Applications to Nonthermal Plasma Processing* (Institute of Physics Publishing).
- Uman, M. A., 2001, *The lightning discharge* (Dover).