

Motori Hall per propulsione spaziale

Fabio Conti

9 luglio 2010

Indice

- 1 Propulsione spaziale
- 2 Propulsione Hall
- 3 Modello 1-D
- 4 Correzioni

Indice

- 1 Propulsione spaziale
- 2 Propulsione Hall
- 3 Modello 1-D
- 4 Correzioni

Equazione del moto per un razzo

Conservazione dell'impulso:

$$\mathcal{T} \equiv M \frac{dv}{dt} = - \frac{dM}{dt} v_{ex} = -\dot{m}_p v_{ex}$$

dove $M = m_r + m_p$.

Soluzione (moto rettilineo): $v_f - v_i = \Delta v = v_{ex} \ln \left(\frac{M}{m_r} \right)$.

Un'elevata v_{ex} permette di ridurre la massa di combustibile a bordo e rende possibili missioni con un elevato Δv equivalente:

$$m_p = m_r (e^{\Delta v / v_{ex}} - 1)$$

Velocità di espulsione

- Per razzi a propulsione chimica è determinata dall'energia di legame delle molecole di carburante e dalla capacità delle pareti di trasportare il calore ($v_{ex} \leq 4 - 5$ km/s).

Con la propulsione elettrica si supera questo limite: non è il propellente stesso a fornire la potenza del motore, ma un generatore esterno, dalla cui potenza dipende la velocità di espulsione.

- Propulsione elettrostatica: $v_{ex} \leq 20 - 50$ km/s
(in sviluppo una $v_{ex} \approx 200$ km/s)
- Propulsione elettromagnetica: $v_{ex} \leq 10 - 30$ km/s
(in teoria $v_{ex} > 100$ km/s per MPD)

Spinta e potenza

La potenza necessaria per ottenere una spinta fissata è

$$P = \frac{1}{\eta} \frac{mv_{ex}^2}{2} = \frac{T v_{ex}}{2\eta}, \text{ dove } \eta = \text{efficienza del propulsore.}$$

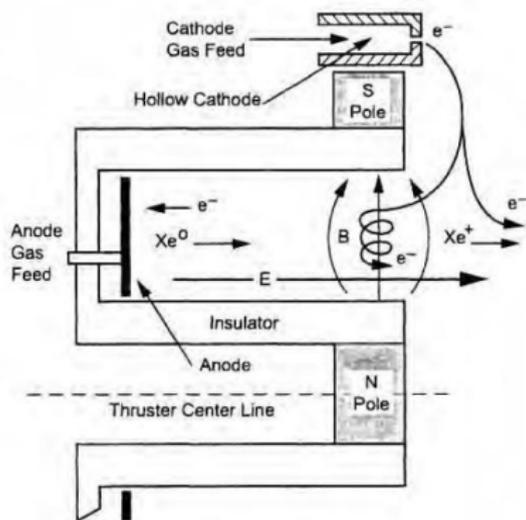
La massa del generatore di potenza aumenta in modo circa proporzionale alla potenza: $m_g = \alpha P$.

Questi fattori determinano il v_{ex} ottimale per ogni propulsore, e quale propulsore sia più adatto alla missione.

Indice

- 1 Propulsione spaziale
- 2 Propulsione Hall**
- 3 Modello 1-D
- 4 Correzioni

Schema generale



- simmetria cilindrica (anulare)
- **E** assiale (scarica fra anodo e catodo) e **B** radiale
- iniezione di gas neutro (Xe) dall'anodo
- ionizzazione e accelerazione nel canale
- neutralizzazione al catodo

Tipi di motori Hall

Magnetic layer

- pareti ceramiche (dielettriche)
- generazione di elettroni secondari nell'interazione plasma-parete
- T_e più bassa, estesa regione di accelerazione

Anode layer

- pareti metalliche (conduttrici)
- scarsa interazione plasma-parete (fascio di ioni più stretto)
- T_e aumenta rapidamente, breve regione di accelerazione vicina all'anodo

Closed drift

Elettroni magnetizzati

$$\Omega_e \equiv \frac{\omega_{ce}}{\nu_e} \gg 1 ; \quad \rho_e = \frac{v_{Te}}{\omega_{ce}} \approx \frac{m_e}{eB} \sqrt{\frac{T_e}{m_e}} \ll L$$

Mobilità assiale ridotta: $\mu_{cl\perp} = \frac{\mu_{cl}}{1+\Omega_e^2}$

Diffusione di Bohm $D_{Bohm} = \alpha \frac{T_e}{eB}$

Sono intrappolati in traiettorie di girazione più $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift, non fluiscono liberamente dal catodo all'anodo.

Ioni non magnetizzati

$$\Omega_i \equiv \frac{\omega_{ci}}{\nu_i} \ll 1 ; \quad \rho_i = \frac{v_i}{\omega_{ci}} \approx \frac{m_i}{eB} \sqrt{\frac{2eV_b}{m_i}} \gg L$$

Sentono il campo elettrico e fluiscono direttamente dall'anodo al catodo ($v_\theta \ll v_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$).

Trasferimento di impulso

I motori Hall sono propulsori elettrostatici, nel senso che gli ioni sono accelerati dal campo elettrico esterno; tuttavia la presenza del campo magnetico trasverso modifica il meccanismo di scambio di impulso fra ioni e propulsore.

Ciò che permette l'accelerazione degli ioni in regime di quasi neutralità è infatti la corrente di Hall, lungo θ e costituita essenzialmente da elettroni (gli ioni sono non magnetizzati):

$$\mathbf{J}_{Hall} = -en_e \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} c = -en \frac{E}{B} c \hat{\theta}$$

La forza sugli ioni ($Z = 1$) è

$$\mathbf{F}_i = 2\pi \iint en_i \mathbf{E} \, dr \, dz$$

La forza sugli elettroni invece è

$$\mathbf{F}_e = 2\pi \iint \left[-en_e \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}_{Hall}}{c} \times \mathbf{B} \right] \, dr \, dz \approx 0$$

se gli elettroni sono vincolati a non muoversi lungo l'asse.
Grazie alla quasi neutralità si ha quindi che la spinta è pari alla forza magnetica dovuta alla corrente di Hall (approccio MHD):

$$\mathbf{F}_i = -\mathcal{T} = 2\pi \iint \left[\frac{\mathbf{J}_{Hall}}{c} \times \mathbf{B} \right] \, dr \, dz$$

Indice

- 1 Propulsione spaziale
- 2 Propulsione Hall
- 3 Modello 1-D**
- 4 Correzioni

Ipotesi e semplificazioni

Studiamo i processi fisici preferendo la consistenza fra equazioni e condizioni al bordo più che risultati quantitativi.

- modello fluido unidimensionale
- regime stazionario
- senza perdite dovute a pareti o conduzione di calore
- sezione del canale $S = \text{cost}$
- velocità dei neutri $v_n = \text{cost}$
- non consideriamo la coda: $z \in [0, L]$, $z = 0$ anodo, $z = L$ catodo
- quasi neutralità ovunque tranne che in una sheath all'anodo ($\lambda_D \ll L$)

Ipotesi e semplificazioni

Ionizzazione completa del plasma: $l_i = v_n/n_e \langle \sigma_i v_e \rangle \ll L$
ma trascuriamo le ionizzazioni multiple perché gli ioni vengono rapidamente spinti fuori dal canale.

Il campo magnetico ha un profilo a campana con il picco vicino all'uscita, che può essere approssimato con una gaussiana:

$$B_r(z) \approx B_0 \exp \left[-\frac{(z - z_m)^2}{L_m^2} \right]$$

Equazioni del modello

Equazione di continuità per ioni, elettroni, neutri:

$$\frac{d}{dz}(nv_i) = \frac{d}{dz}(nv_e) = -v_n \frac{dn_n}{dz} = \nu_i n = \langle \sigma_i v \rangle n_n n$$

con condizione $m_i S(nv_i + n_n v_n) = \dot{m}$

Equazione di Eulero per gli ioni (lungo \hat{z}):

ioni freddi ($T_i \approx 0.1 eV$, $\phi_A \approx 300V$), non magnetizzati, poco collisionali

$$\frac{d}{dz}(m_i n v_i^2) = enE = -en \frac{d\phi}{dz}$$

Equazione di Eulero per gli elettroni:

$$\nabla \cdot (m_e n \mathbf{v}_e \mathbf{v}_e) = -\nabla p_e - en \left[\mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}}{c} \right) \right]$$

Equazioni del modello

Nelle approssimazioni

$$dv_{e\theta}/dz \approx 0, \quad \nu_e \ll \omega_{ce}, \quad v_e \ll v_{Te} \quad (\text{si trascurano i termini convettivi})$$

le componenti $\hat{\theta}$ e \hat{z} diventano:

$$\hat{\theta}: \quad \nu_e m_e n v_{e\theta} = -en \frac{v_e B}{c} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{v_{e\theta}}{v_e} \right| = \left| -\frac{\omega_{ce}}{\nu_e} \right| \gg 1$$

$$\hat{z}: \quad 0 = -\frac{d}{dz}(nT_e) + en \frac{d\phi}{dz} - j_{Hall} B = -\frac{d}{dz}(nT_e) + en \frac{d\phi}{dz} - m_e n_e \frac{\omega_{ce}^2}{\nu_e} v_e$$

Sommando le equazioni per ioni ed elettroni otteniamo un'equazione per il bilancio dell'impulso lungo \hat{z} :

$$\frac{d}{dz}(nm_i v_i^2 + nT_e) = m_e \frac{j_e}{e} \frac{\omega_{ce}^2}{\nu_e}$$

Equazioni del modello

Per l'energia degli elettroni, si può imporre un profilo di temperatura noto (ad esempio da dati sperimentali) oppure specificare un'equazione. L'equazione per l'energia degli elettroni è:

$$nv_e \frac{d}{dz} \left(\frac{5}{2} T_e \right) = env_e \frac{d\phi}{dz} - \nu_i n \left(\alpha_i \varepsilon_i + \frac{5}{2} T_e \right)$$

Sommando questa e l'eq. per l'impulso degli ioni moltiplicata per v_i (energia cinetica) si ottiene un'equazione per il bilancio di energia:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{m_i n v_i^3}{2} + \frac{5}{2} n T_e v_e + j_D \phi + n v_i \alpha_i \varepsilon_i \right) = -n u_i n \left(\frac{m_i v_i^2}{2} \right)$$

dove $j_D = j_i + j_e = ne(v_i - v_e)$.

Efficienza

Nel modello senza perdite l'efficienza è data da

$$\eta = \eta_m \eta_E \eta_C$$

dove

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_m = \frac{j_i(z=L)}{e} \frac{m_i S}{\dot{m}} = \text{utilizzo del propellente} \\ \eta_E = \left[\frac{v_i(z=L)}{v_0} \right]^2 = \text{utilizzo dell'energia} \quad \left(v_0 = \left(\frac{2e\phi_A}{m_i} \right)^{1/2} \right) \\ \eta_C = \frac{j_i(z=L)}{j_D} = \text{utilizzo della corrente} \end{array} \right.$$

Transizione sonica

Il sistema di equazioni ha una singolarità alla velocità sonica

$$v_i = \pm c_s = \pm \sqrt{\frac{5T_e}{3m_i}}$$

che è inferiore a quella di espulsione.

Ad es. l'equazione per la velocità degli ioni è:

$$(v_i^2 - c_s^2) \frac{dv_i}{dz} = \nu_i (v_i^2 - c_s^2) + \frac{5}{3} \frac{m_e \omega_{ce}^2}{m_i \nu_e} v_i^2 \frac{j_e}{j_i} - \frac{5}{3} \frac{\nu_i e v_i}{m_i j_e} \left(\frac{2}{5} \alpha_i \varepsilon_i + T_e \right)$$

Richiediamo che vi sia un punto sonico *regolare* per $v_i = +c_s$:
 ciò accade solo se il membro di destra fa zero e ciò costituisce una
 condizione che vincola la corrente j_e o j_D .

$$\frac{m_e \omega_{ce}^2}{m_i \nu_e} \frac{j_e^2}{j_i} v_i^2 = \frac{\nu_i e v_i}{m_i} \left(\frac{2}{5} \alpha_i \varepsilon_i + T_e \right)$$

Parametri di controllo e condizioni al bordo note

Il sistema differenziale ha bisogno di 4 condizioni al bordo per determinare una soluzione:

- $\phi_A = \phi(z = 0) = V_D$ tensione applicata all'anodo ($\phi(z = L) = 0$)
- $v_{iA} = v_i(z = 0)$ velocità ioni all'anodo
- transizione sonica regolare
- $T_C = T_e(z = L)$ temperatura elettroni all'uscita (catodo)

Casi rilevanti

La condizione su v_{iA} non è definita a priori; è stato mostrato (numericamente) che per basse tensioni V_D è presente la sheath, mentre per $V_D > V_D^{th}$ la sheath scompare. Consideriamo i due casi:

1) Senza sheath all'anodo

$$v_{iA} = 0$$

2) Sheath all'anodo

$$v_{iA} = -c_s = -\sqrt{\frac{5T_{eA}}{3m_i}}$$

spessore trascurabile, condizione di Bohm su v_{iA} (ion backflow)

$$\phi(z=0) = \phi_A + \phi_{sh}$$

Sheath all'anodo

Modello di Bohm:

- elettroni all'equilibrio (idrostatico + isoterma) $n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{T_e}\right)$
- ioni accelerati $m_i v^2/2 + e\phi = m_i v_0^2/2$
 $\Rightarrow v = \sqrt{2e(\phi_0 - \phi)/m_i}$, $n_i = n_0 v_0/v$

Equazione di Poisson: $\frac{d^2\phi}{d^2} = 4\pi en_0 \left[\exp\left(\frac{e\phi}{T_e}\right) - \left(1 - \frac{\phi}{\phi_0}\right)^{-1/2} \right]$

Integrando una volta per quadratura, in variabili adimensionali:

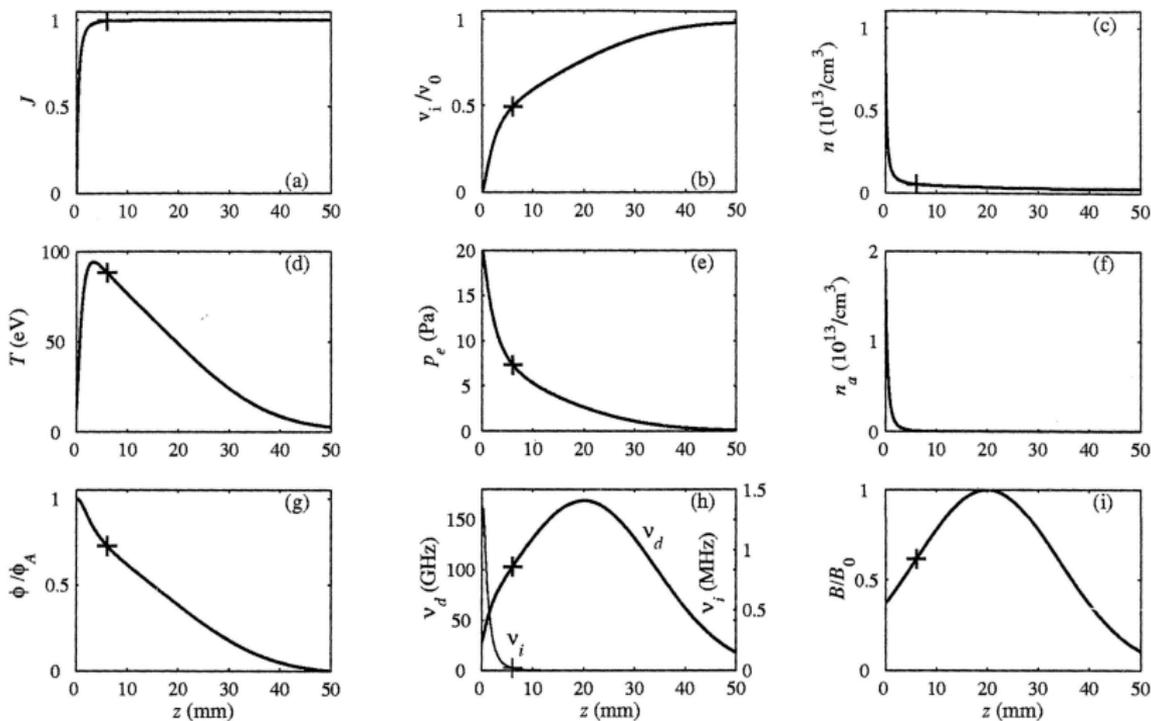
$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right)^2 = e^\varphi - 1 + M^2 \left(1 - \frac{2\varphi}{M^2} \right)^{1/2} - M^2 \approx \frac{\varphi^2}{2} \left(1 - \frac{1}{M^2} \right)$$

che ha senso solo per $M = v_0/c_s \geq 1$ (condizione di Bohm).

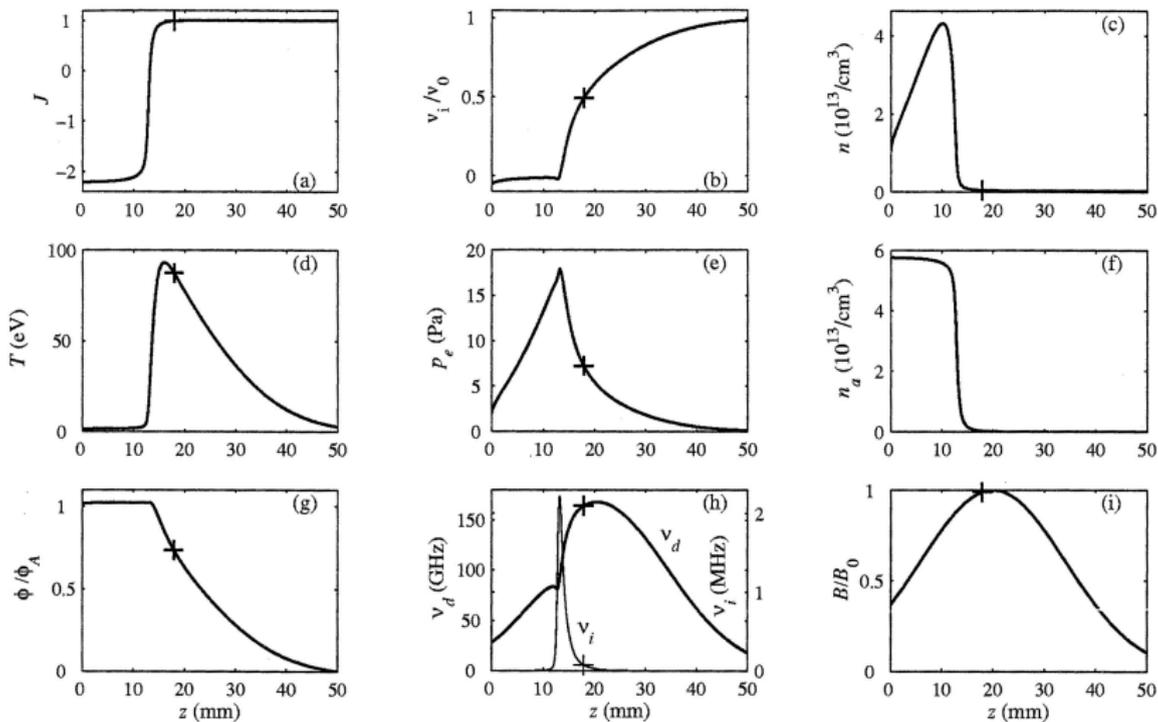
Il salto di potenziale nella sheath è

$$\phi_{sh} \approx \frac{T_e}{e} \ln \sqrt{\frac{m_i}{2\pi m_e}}$$

Soluzione numerica: caso 1



Soluzione numerica: caso 2



Calcoli numerici

In entrambi i casi sono confermati i seguenti fatti:

- nel caso 1 $\phi(z)$ è monotono decrescente;
- nel caso 2 $\phi(z)$ non è monotono, ma ha un massimo in $z_p \approx z_{ion}$;
- completa ionizzazione: $(nv_i)(z > z_p) \approx \frac{\dot{m}}{m_i S}$
 $\Rightarrow (nv)_{i,e}(z > z_p) = \text{cost} \quad , \quad \eta_m \approx 1$;
- completa accelerazione: $v_i(z = L) \approx v_0 = \left(\frac{2e\phi_A}{m_i} \right)^{1/2} \Rightarrow \eta_E \approx 1$;
- $(nT_e)_C \ll \frac{\dot{m}}{S} v_0$;
- $v_i(z_p) \approx 0$;

Integrazione

Dall'equazione dell'impulso:

$$(nT_e)_p = \frac{4\dot{m}}{5S} v_0 \quad ; \quad v(z = z_s) = \frac{v_0}{2}$$

$$\frac{\dot{m}}{5S} v_0 = \frac{m_e}{e} j_{eC} \int_{z_p}^L \frac{\omega_{ce}^2}{\nu_e} dz$$

$$\frac{4\dot{m}}{5S} v_0 - (nT_e)_A = \frac{m_e}{e} j_{eA} \int_0^{z_p} \frac{\omega_{ce}^2}{\nu_e} dz$$

da cui

$$\frac{T}{S} = \frac{\dot{m}}{S} v_0 = (nT_e)_A + \frac{m_e}{e} j_{eA} \int_0^{z_p} \frac{\omega_{ce}^2}{\nu_e} dz + \frac{m_e}{e} j_{eC} \int_{z_p}^L \frac{\omega_{ce}^2}{\nu_e} dz$$

La spinta è la somma della pressione del plasma all'anodo e della forza magnetica.

Integrazione

Dall'equazione dell'energia:

$$\Gamma_E = \frac{1}{2} m_i n v_i^3 + \frac{5}{2} n T_e v_e + n v_i \alpha_i \varepsilon_i + j_D \phi = \text{cost}$$

e imponendo $\Gamma_{EC} = \Gamma_{EA}$ si trova

$$-\frac{5j_{eA}}{2e} T_{eA} - \frac{j_{bf}}{e} \alpha_i \varepsilon_i + \frac{\dot{m}}{S m_i} (e\phi_A + \alpha_i \varepsilon_i) = j_D \phi_A$$

L'energia fornita è spesa in riscaldamento elettroni, ionizzazione del backflow ($j_{bf} = j_D - j_{eA}$), accelerazione e ionizzazione degli ioni espulsi.

Imponendo invece $\Gamma_{EC} = \Gamma_{Ep}$ si trova

$$-\frac{5j_D}{2e} T_{ep} - j_D \phi_A = \frac{\dot{m}}{S m_i} (e\phi_A + \alpha_i \varepsilon_i)$$

Variabili adimensionali

$$\xi = \frac{x}{L} \quad \psi = \frac{\phi}{\phi_A} \quad t = \frac{T_e}{e\phi_A} \quad E_i = \frac{\alpha_i \varepsilon_i}{e\phi_A}$$

$$N = n \frac{m_i v_0 S}{\dot{m}} \quad J_\alpha = \frac{j_\alpha S m_i}{e \dot{m}} \quad P = (n T_e) \frac{S}{\dot{m} v_0}$$

$$F = \int_0^L \frac{m_e \omega_{ce}^2}{m_i \nu_e} \frac{1}{v_0} dz \quad f = \frac{1}{F} \int_0^{z_p} \frac{m_e \omega_{ce}^2}{m_i \nu_e} \frac{1}{v_0} dz$$

F e E_i sono note, le altre sono incognite.

Sistema adimensionale

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{5} = (J_D - 1)F(1 - f) \\ \frac{4}{5} - P_A = (J_D - J_{bf})Ff \\ \frac{5}{2}(J_D - J_{bf})t_A + (1 + E_i) - J_{bf}E_i = J_D \\ J_D \left(1 - \frac{5}{2}t_p\right) = 1 + E_i \\ N_p = \frac{8}{5} \frac{1}{t_p} \end{array} \right.$$

Sono 5 equazioni per 7 incognite ($J_D, J_{bf}, t_p, N_p, t_A, P_A, f$)
ma con alcune approssimazioni si può ridurre il numero di incognite.

L'efficienza totale è

$$\eta \approx \eta_C = \frac{1}{J_D}$$

Caso 1: senza sheath

In questo caso:

$$z_p = 0 \quad , \quad j_{bf} = 0$$

e il sistema si riduce a

$$\begin{cases} f = 0 \quad , \quad J_{bf} = 0 \quad , \quad t_p = t_A \\ \frac{1}{5} = (J_D - 1)F \\ \frac{4}{5} = P_A \\ J_D \left(1 - \frac{5}{2}t_A\right) = 1 + E_i \\ N_p = N_A = \frac{8}{5} \frac{1}{t_A} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f = 0 \quad , \quad J_{bf} = 0 \quad , \quad t_p = t_A \\ J_D = 1 + \frac{1}{5F} \\ P_A = \frac{4}{5} \\ t_A = \frac{2}{5} \left(\frac{1 - 5FE_i}{1 + 5F} \right) \\ N_p = N_A = 4 \left(\frac{1 + 5F}{1 - 5FE_i} \right) \end{cases}$$

Caso 1: senza sheath

$$(nT_e)_A = \frac{4 \dot{m}v_0}{5 S} = \frac{4 T}{5 S} , \quad \frac{m_e}{e} j_{eC} \int_0^L \frac{\omega_{ce}^2}{\nu_e} dz = \frac{1 \dot{m}v_0}{5 S} = \frac{1 T}{5 S}$$

$$\frac{\dot{m}}{S m_i} (e\phi_A + \alpha_i \varepsilon_i) + \frac{5 j_D}{2e} T_{eA} = j_D \phi_A$$

L'energia "sprecata" va nel riscaldamento degli elettroni a T_{eA} .

L'efficienza è

$$\eta = \frac{1}{J_D} = \left(\frac{1}{1 + E_i} \right) \left(1 - \frac{5}{2} t_A \right) = \left(\frac{1}{1 + \frac{\alpha_i \varepsilon_i}{e\phi_A}} \right) \left(1 - \frac{5 T_{eA}}{2 e\phi_A} \right)$$

ed è massima per $T_{eA} = 0$ ossia

$$F = F_{max} = \frac{1}{5 E_i} , \quad J_D = J_{Dmin} = 1 + E_i , \quad n_A \rightarrow \infty$$

Caso 2: sheath all'anodo

In questo caso:

$$v_{iA} = -c_s = -\sqrt{\frac{5T_{eA}}{3m_i}}$$

$$T_{eA} \ll \alpha_i \varepsilon_i \quad , \quad (nT_e)_A \ll (nT_e)_p = \frac{4\dot{m}}{5S} v_0$$

in quanto la ionizzazione avviene in una regione separata dall'anodo.
Il sistema si riduce quindi a

$$\begin{cases} t_A = 0, & P_A = 0 \\ \frac{1}{5} = (J_D - 1)F(1 - f) \\ \frac{4}{5} = (J_D - J_{bf})Ff \\ 1 + E_i - J_{bf}E_i = J_D \\ J_D \left(1 - \frac{5}{2}t_p\right) = 1 + E_i \\ N_p = \frac{8}{5} \frac{1}{t_p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_A = 0, & P_A = 0 \\ f = \left(\frac{4E_i}{1+5E_i}\right) \\ J_D = 1 + \left(\frac{1}{5F} \frac{1+5E_i}{1+E_i}\right) \\ J_{bf} = 1 - \left(\frac{1}{5F} \frac{1+5E_i}{E_i(1+E_i)}\right) \\ t_p = \frac{2}{5} \left[\frac{(1+5E_i) - 5FE_i(1+E_i)}{(1+5E_i) + 5f(1+E_i)}\right] \\ N_p = 4 \left[\frac{5F(1+E_i) + (1+5E_i)}{(1+5E_i) - 5FE_i(1+E_i)}\right] \end{cases}$$

Caso 2: sheath all'anodo

$$\frac{\dot{m}v_0}{S} = \frac{\mathcal{T}}{S} = \frac{m_e}{e} j_{eA} \int_0^{z_p} \frac{\omega_{ce}^2}{\nu_e} dz + \frac{m_e}{e} j_{eC} \int_{z_p}^L \frac{\omega_{ce}^2}{\nu_e} dz$$

$$\frac{\dot{m}}{sm_i} (e\phi_A + \alpha_i \varepsilon_i) - \frac{j_{bf}}{e} \alpha_i \varepsilon_i = j_D \phi_A$$

L'energia "sprecata" va nella ionizzazione del backflow.
L'efficienza è

$$\eta = \frac{1}{J_D} = 1 - \frac{1 + 5E_i}{5F(1 + E_i) + (1 + 5E_i)} =$$

$$= \left(\frac{1}{1 + \frac{\alpha_i \varepsilon_i}{e\phi_A}} \right) \left[1 + \frac{J_{bf} \alpha_i \varepsilon_i}{e\phi_A + \alpha_i \varepsilon_i (1 - J_{bf})} \right]$$

ed è massima per $j_{bf} = 0$ ossia

$$F = F_{max} = \frac{1}{5E_i} \frac{1 + 5E_i}{1 + E_i}, \quad J_D = J_{Dmin} = 1 + E_i, \quad n_p \rightarrow \infty, \quad T_{ep} = 0$$

Risultati

La spinta $\dot{m}v_0$ dipende dal flusso di massa \dot{m} e dal potenziale applicato ϕ_A ma non dall'intensità del campo magnetico B .
Aumentando l'intensità di B si ha però una riduzione della corrente e una più alta utilizzazione, quindi una maggiore efficienza.

Il valore di F (e quindi di B) richiesto per una data efficienza η è minore nel caso 1, dove si ha anche il contributo della pressione.

Indice

- 1 Propulsione spaziale
- 2 Propulsione Hall
- 3 Modello 1-D
- 4 Correzioni**

I limiti maggiori del modello, a parte l'unidimensionalità, risiedono nell'assenza di perdite.

Ciò conduce a:

- temperature troppo elevate rispetto alle misure (circa 100eV contro 50eV),
- gradienti molto ripidi, soprattutto nella regione di ionizzazione,
- efficienze più elevate.

Possibili correzioni sono l'inclusione della conduzione termica e delle perdite dovute alle pareti laterali.

Conduzione di calore

Eq. dell'energia degli elettroni

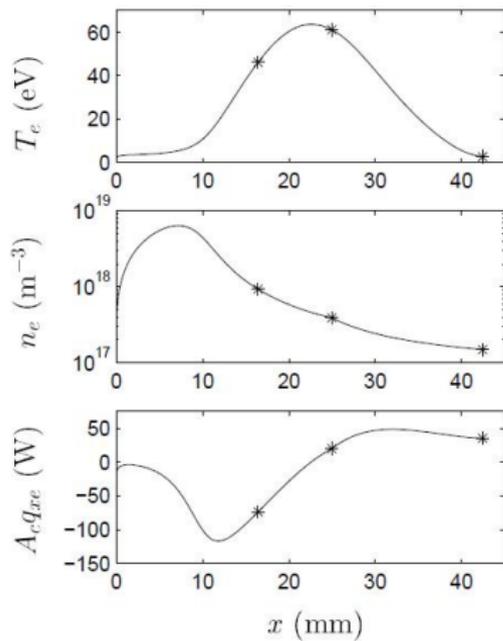
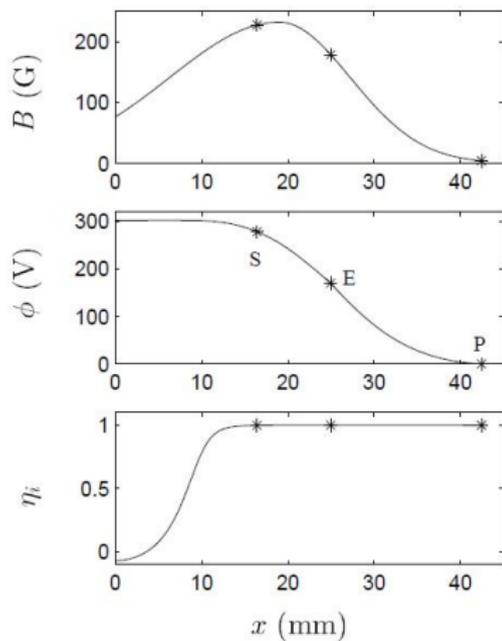
$$nv_e \frac{d}{dz} \left(\frac{5}{2} T_e \right) + \frac{dq_e}{dz} = env_e \frac{d\phi}{dz} - \nu_i n \left(\alpha_i \varepsilon_i + \frac{5}{2} T_e \right)$$

dove q_e = flusso di calore.

Dalla teoria cinetica, usando un modello collisionale di rilassamento della funzione di distribuzione, si trova l'equazione per q_e :

$$\frac{5}{2} n T_e \nabla T_e + e \mathbf{q}_e \wedge \mathbf{B} + m_e \nu_e \mathbf{q}_e = 0$$

Questo modello presenta un'equazione in più ed ulteriori punti singolari.



Effetto delle pareti

Pareti dielettriche (ceramiche).

- La condizione di zero corrente implica la formazione di una sheath radiale,
- Gli ioni attratti alla parete si ricombinano e riducono l'utilizzo del propellente η_m ,
- Gli elettroni che impattano con la parete vi depositano la loro energia, raffreddando il plasma e alterando i processi di ionizzazione,
- Si genera emissione secondaria di elettroni, che modificano la struttura della sheath e la collisionalità.

Questi fenomeni provocano erosione delle pareti che costituisce il primo limite alla vita di un motore Hall. Sono fenomeni radiali e dunque non possono essere descritti accuratamente in un modello 1-D.

Ciò che si può fare è inserire termini mediati nelle equazioni.

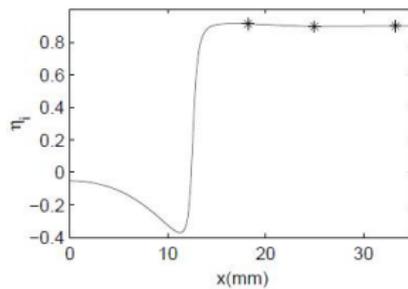
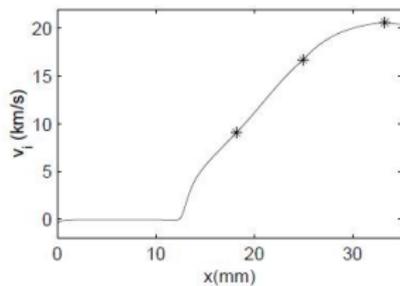
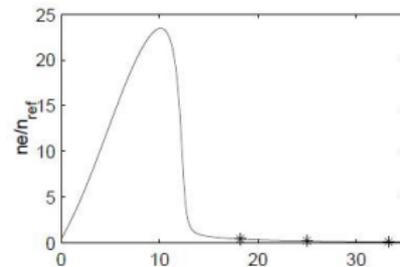
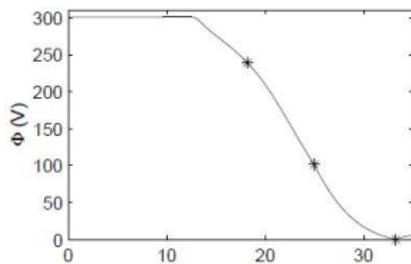
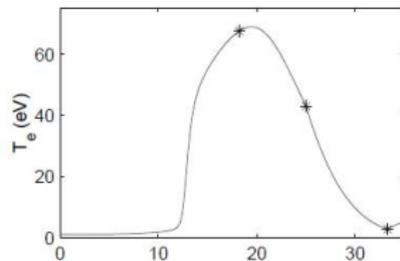
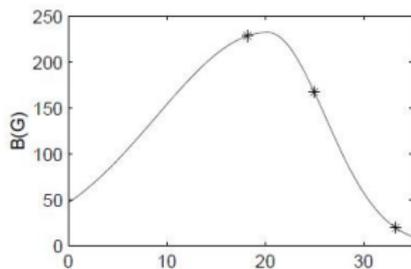
Aggiunta di tre termini nelle equazioni:

$$\begin{cases} \frac{d}{dz}(nv_i) = \frac{d}{dz}(nv_e) = n(\nu_i - \nu_w) \\ \frac{d}{dz}(m_i nv_i^2) = -en \frac{d\phi}{dz} - m_i n \nu_w v_i \\ \frac{d}{dz} \left(\frac{5}{2} nv_e T_e \right) = en v_e \frac{d\phi}{dz} - \nu_i n \alpha_i \varepsilon_i - \nu_w E n T_e \end{cases}$$

dove

ν_w = freq. perdita di particelle, $n u_w E$ = freq. perdita di energia.

Formalmente questo sistema è analogo a quello senza perdite.



Indice

5 Scaling

Scaling

Le ipotesi fondamentali sono:

$$\phi_A = V_D = \text{cost} , \quad l_{cm}/L = \text{cost} , \quad T_e(\xi) = \text{cost}$$

In aggiunta bisogna specificare lo scaling geometrico di costruzione.

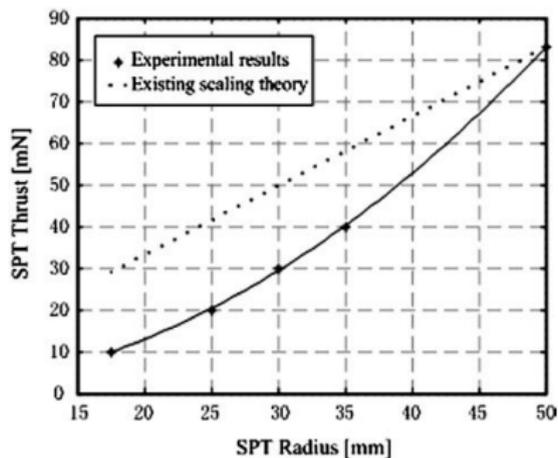
La più semplice similarità geometrica è:

$$r/L = \text{cost} , \quad R/L = \text{cost}$$

Questo scaling conduce alle seguenti dipendenze da R (raggio maggiore):

- $l_{cm}/L = \text{cost} = 1/n\sigma_i L$, $\sigma_i(T_e) = \text{cost} \Rightarrow n \propto R^{-1}$
- $\dot{m} = (n_i v_i + n_n v_n) m_i \pi (R^2 - r^2)$, $v_i(V_D) = \text{cost}$, $v_n = \text{cost} \Rightarrow \dot{m} \propto R$
- $L^2 \approx D_{\perp}/\nu_i = \frac{D}{[1+(\omega_{ce}/\nu_e)^2]\nu_i} \approx \frac{v_e \nu_e}{\omega_{ce}^2} \approx \frac{m_e V_D \nu_e}{e B^2 \nu_i}$,
 $\nu_e \propto 1/R$, $n u_i = n_n \langle \sigma_i v \rangle R^{-1} \Rightarrow B \propto R^{-1}$
- $E \approx V_D/L \propto R^{-1}$
- $j_D = j_i + j_e = e n_i v_i + \sigma_{\perp} E$, $\sigma_{\perp} = \text{cost} \Rightarrow j_D \propto R^{-1}$
- $\rho_e \propto T_e^{1/2}/B \propto R$
- $P = V_D I_D = V_D j_D \pi (R^2 - r^2) \propto R$
- $T = \dot{m} v_i \propto R$

Tuttavia, seguendo questa legge, l'efficienza e in particolare la spinta sono inferiori alle previsioni quando le dimensioni vengono ridotte.



Si propone allora uno scaling geometrico differente, del tipo

$$r/L = \text{cost} , \quad R^{2-\gamma}/L = \text{cost}$$

che conduce alle seguenti dipendenze da R :

n	\dot{m}	B	E	j_D	ρ_e	P	T
$R^{\gamma-2}$	R^γ	$R^{(\gamma-3)/2}$	$R^{\gamma-2}$	$R^{\gamma-2}$	$R^{(\gamma-3)/2}$	R^γ	R^γ

Per avere un modello realistico deve essere $\gamma > 0$. Il caso $\gamma = 2$ permette di mantenere costante la densità e la lunghezza L .

Volendo progettare un propulsore di potenza e dimensioni ridotte ($P_2 < P_1$ dove P_1 è nota) il problema maggiore è la saturazione dei magneti del core. Secondo il primo scaling infatti:

$\Phi \approx 2\pi BL(r + R)/2$, $B_{core} \approx \Phi/(\pi r_c^2)$, e poiché $r_c \propto R$ si ha che

$$\frac{B_{c,2}}{B_{c,1}} \propto \frac{P_1}{P_2}$$

Con il secondo modello invece risulta

$$\frac{B_{c,2}}{B_{c,1}} \propto \left[\frac{P_1}{P_2} \right]^{(\gamma+1)/2\gamma}$$

Dunque scegliendo $\gamma > 1$ questo problema è alleviato.

Volendo aumentare la potenza e le dimensioni ($P_2 > P_1$) risulta difficile migliorare le prestazioni in rapporto alla massa totale, che si assume variare nel modo $M \propto LR^2$. Secondo il primo scaling, infatti:

$$\frac{P_2/M_2}{P_1/M_1} \propto \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2, \quad \frac{T_2/M_2}{T_1/M_1} \propto \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2$$

Con il secondo modello invece risulta

$$\frac{P_2/M_2}{P_1/M_1} \propto \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{2-4/\gamma}, \quad \frac{T_2/M_2}{T_1/M_1} \propto \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{2-4/\gamma}$$

Per $\gamma > 2$ le prestazioni in rapporto alla massa totale aumentano all'aumentare delle dimensioni.

-  Goebel, Katz - Fundamentals of Electric Propulsion [Wiley, 2008]
-  Zhurin, Kaufman, Robinson - Physics of closed drift thrusters [Plasma Sources Science and Technology Vol.8, No.1, p.1 (1999)]
-  Ahedo, Martínez-Cerezo, Martínez-Sánchez - One-dimensional model of the plasma flow in a Hall thruster [Physics of Plasmas Vol.8, p.3058 (2001)]
-  Cohen-Zur, Fruchtman, Ashkenazy, Gany - Analysis of the steady-state axial flow in the Hall thruster [Physics of Plasmas Vol.9, p.4363 (2002)]
-  Ahedo, Gallardo, Martínez-Sánchez, Martínez-Cerezo - Characterization of the Plasma in a Hall Thruster [IEPC-01-017]
-  Daren, Yongjie, Zhi - Improvement on the scaling theory of the Stationary Plasma Thruster [Journal of Propulsion and Power Vol.21, No.1, p.139 (2005)]