

Dinamica degli ioni nell'espansione di un plasma ultrafreddo

Mattia Lupetti

23 marzo 2010

Indice

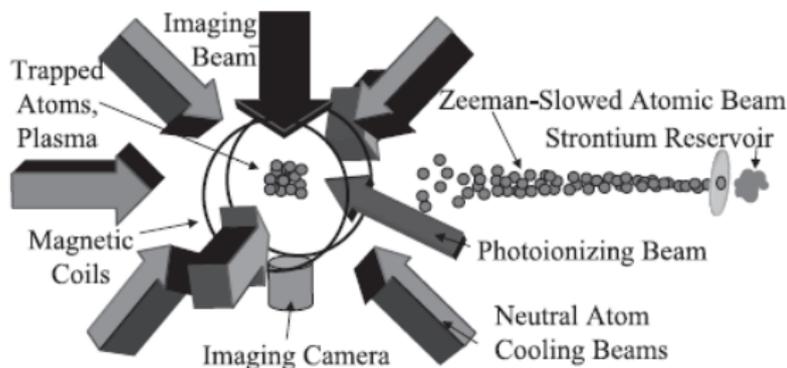
- 1 Creazione di un plasma ultrafreddo
- 2 Caratteristiche
- 3 Processi fisici

Indice

- 1 Creazione di un plasma ultrafreddo
- 2 Caratteristiche
- 3 Processi fisici

Laser-cooling...

Si effettua raffreddamento laser di una melassa atomica (tipicamente Stronzio, Calcio, Rubidio, Cesio...) fino a temperature dell'ordine del mK



...e fotoionizzazione

Mandando fotoni di energia molto vicina a quella di ionizzazione si può fare in modo di avere elettroni con bassa energia cinetica:

$$T_i \simeq \frac{m_e}{m_i} T_e \sim \mu K$$

Indice

- 1 Creazione di un plasma ultrafreddo
- 2 Caratteristiche**
- 3 Processi fisici

Comportamento classico

Soddisfa le seguenti condizioni:

- Distanza tipica dei costituenti molto maggiore del raggio di Bohr:

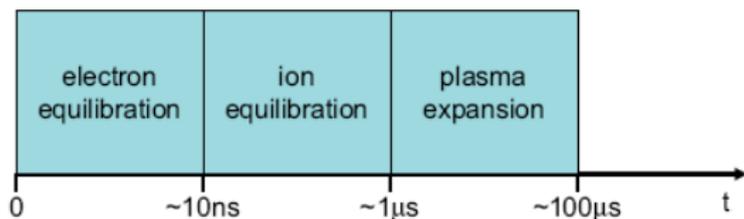
$$\langle d \rangle = \left(\frac{3}{4\pi n_e} \right)^{1/3} \sim \mu m \quad \text{contro} \quad a_B \sim 10^{-4} \mu m$$

- Energia di Fermi molto minore dell'energia cinetica dei costituenti:

$$\epsilon_f = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3} \sim 10^{-14} eV \quad \text{contro} \quad T \sim 10^{-10} eV$$

Evoluzione 'lenta'

L'evoluzione temporale del sistema è rappresentata in figura:



I tempi scala raffigurati sono dati, in ordine cronologico da:

$$\tau_e = \frac{1}{\omega_{pe}}, \quad \tau_i = \frac{1}{\omega_{pi}}, \quad \tau_{exp} = \sqrt{\frac{m_i \sigma_0^2}{T_e + T_i}} \simeq \frac{\sigma_0}{c_s}$$

Tempi scala *sperimentalmente accessibili*

Accoppiamento forte

Possibilità di ottenere accoppiamento molto elevato per gli ioni:
Parametro di Coulomb:

$$\Gamma_i = \frac{Ze\phi}{T_i} > 1$$



Possibilità di indagare sperimentalmente effetti di accoppiamento forte nella dinamica di un plasma

Indice

- 1 Creazione di un plasma ultrafreddo
- 2 Caratteristiche
- 3 Processi fisici**

Processi fisici

Ipotesi preliminari:

- 1 Distribuzione gaussiana nello spazio delle fasi
- 2 Ipotesi di quasi-neutralità
- 3 Termalizzazione istantanea degli elettroni su scale temporali ioniche
- 4 Simmetria sferica

Intrappolamento degli elettroni

Fotoionizzazione \longrightarrow espansione nube elettronica,
evaporazione superficiale



Separazione di carica \longrightarrow trappola per gli elettroni

Processo a soglia: La buca di potenziale deve essere più grande dell'energia cinetica; è sufficiente che $\lambda_D < \sigma$

Quasineutralità percentuale:

$$\frac{n_i - n_e}{n_e} = 3 \frac{\lambda_D^2}{\sigma^2}$$

Disorder-induced heating (Analisi qualitativa)

Distribuzione iniziale degli ioni è scorrelata
Correlazioni \iff Minimizzazione potenziale



Conservazione energia \iff Aumento T_i
Ci aspettiamo

$$T_i \sim \frac{e^2}{d}$$

Oscillazioni dell'energia cinetica

L'aumento di T_i a causa della creazione di correlazioni non è monotono.

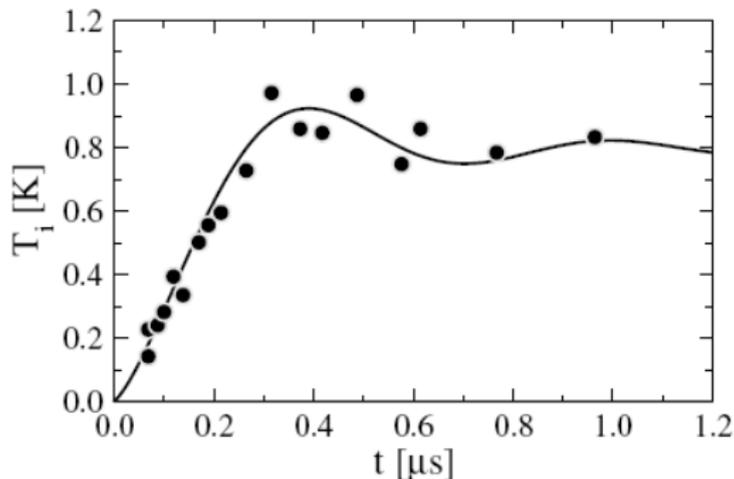
Da simulazioni MD si osserva che il fenomeno dell'oscillazione (smorzata) dell'energia cinetica intorno alla posizione di equilibrio avviene per $\Gamma_i \geq 0.5$



Effetto dovuto a violazione ipotesi di Bogoliubov

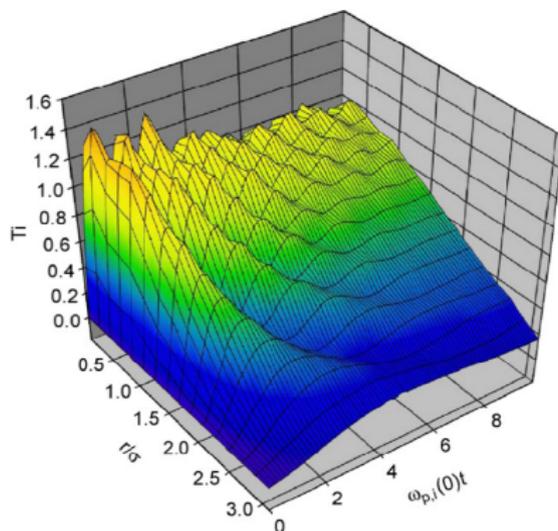
$$\tau_{rel} \sim \tau_{corr}$$

Oscillazioni dell'energia cinetica



Risoluzione spaziale delle oscillazioni dell'energia cinetica

Oscillazioni dell'energia cinetica



A causa della distribuzione spaziale gaussiana, si ha dipendenza spaziale delle correlazioni ioniche, con conseguente formazione di oscillazioni spaziali dell'energia cinetica degli ioni

Espansione del plasma (teoria non collisionale)

Trattazione cinetica non collisionale:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} - \frac{e}{m_e} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \right\} f_e(r, v, t) = 0$$

$$\nabla^2 \bar{\phi} = 4\pi e(n_i - n_e)$$

$$n_{i,e} = \int f_{i,e}(r, v, t) dv$$

Sfruttiamo approssimazione di quasi-neutralità: $n_i \simeq n_e$

$$e \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} = T_e \frac{\partial \ln n_e}{\partial r} \simeq T_e \frac{\partial \ln n_i}{\partial r}$$

Espansione del plasma (teoria non collisionale)

Il sistema ammette soluzione autosimilare:

$$\text{Ansatz: } f_i \propto e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2(t)}} e^{-\frac{m_i(v-\gamma(t)r)^2}{2T_i(t)}}$$

calcoliamo i seguenti momenti della funzione di distribuzione:

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle &= 3\sigma^2 \\ \langle \mathbf{r}\mathbf{v} \rangle &= 3\gamma\sigma^2 \\ \langle v^2 \rangle &= 3 \left(\frac{T_i}{m_i} + \gamma^2\sigma^2 \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Espansione del plasma (teoria non collisionale)

E la loro derivata temporale sfruttando l'equazione di Vlasov:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \langle r^2 \rangle &= 2 \langle \mathbf{r}\mathbf{v} \rangle \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{r}\mathbf{v} \rangle &= \langle v^2 \rangle + 3 \frac{T_e}{m_i} \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle v^2 \rangle &= 2 \frac{T_e}{m_i} \int n_i(r) \frac{\partial u}{\partial r} dr = 2\gamma \frac{T_e}{m_i}\end{aligned}\quad (2)$$

Espansione del plasma (teoria non collisionale)

Insieme con la conservazione dell'energia:

$$E = \frac{1}{2}m_i \langle v^2 \rangle + \frac{3}{2}T_e$$

si ottiene un sistema per i parametri dipendenti dal tempo

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\sigma^2 &= 2\gamma\sigma^2 \\ \frac{\partial}{\partial t}\gamma &= \frac{T_e + T_i}{m_i\sigma^2} - \gamma^2 \\ \frac{\partial T_{i,e}}{\partial t} &= -2\gamma T_{i,e}\end{aligned}\tag{3}$$

Espansione del plasma (teoria non collisionale)

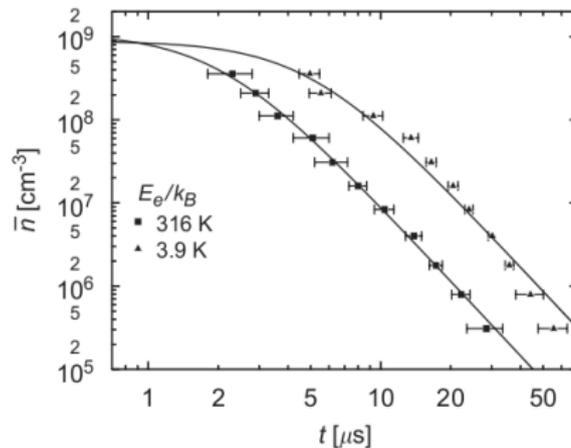
La cui soluzione (analitica) è:

$$\begin{aligned}\sigma^2(t) &= \sigma^2(0) \left(1 + \frac{t^2}{\tau_{exp}^2} \right) \\ \gamma(t) &= \frac{t/\tau_{exp}}{\left(1 + \frac{t^2}{\tau_{exp}^2} \right)^2} \\ T_{i,e}(t) &= \frac{T_{i,e}(0)}{\left(1 + \frac{t^2}{\tau_{exp}^2} \right)}\end{aligned}\tag{4}$$

$$\text{con } \tau_{exp} = \sqrt{m_i \sigma^2(0) / (T_e + T_i)} \simeq \sigma_0 / c_s$$

Espansione del plasma (Dati sperimentali)

$$\sigma^2(t)T(t) = \sigma^2(0)T(0), \quad \text{dunque} \quad \bar{n} = \frac{3N}{4\pi [\sigma^2(0) + c_s^2 t^2]^{3/2}}$$



Espansione del plasma (teoria collisionale)

Disorder-induced heating fa crollare la correlazione degli ioni a

$$\Gamma_i \simeq 2$$

Tuttavia per tempi lunghi il plasma si raffredda adiabaticamente

$\rightarrow n_i^{1-\gamma} T_i = \text{cost}$ e i dati sperimentali confermano questo andamento non collisionale

\Downarrow

$$\Gamma_i = \frac{q\bar{\phi}}{T_i} = \frac{q^2}{dT_i} \sim \bar{n}_i^{-1/3}$$

Che fine fanno le correlazioni ioniche?

Come può avvenire un'espansione libera se le correlazioni aumentano con l'espansione?

Gerarchia BBGKY

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \sum_i L(i) - \frac{1}{n} \sum_{i \neq j} V(i, j) \right] f_s(1, \dots, s; t) =$$

$$= \sum_i \int V(i, s+1) f_{s+1}(1, \dots, s+1) d(s+1)$$

con

$$L(i) = v_i \frac{\partial}{\partial r_i}$$

$$V(i, j) = \frac{Ze^2}{m} \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{1}{|r_i - r_j|} \frac{\partial}{\partial v_i}$$

$$\frac{1}{V} \int f_{s+1} d(s+1) = f_s(1, \dots, s)$$

$$\frac{1}{V} \int f_1 d(1) = 1$$

Gerarchia BBGKY

Al primo ordine, considerando entrambe le specie cariche:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + L(1) \right] f_{\alpha}(1; t) = \sum_{\beta} \int V(1, 2) f_{\alpha\beta}(1, 2) d2$$

Ponendo $f_{\alpha\beta}(1, 2) = F_{\alpha}(1)F_{\beta}(2) + G_{\alpha\beta}(1, 2)$ si ha:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + L(1) - \int V_{\alpha\beta}(1, 2) F_{\beta}(2) d2 \right] F_{\alpha}(1) = \int V_{\alpha\beta}(1, 2) G_{\alpha\beta}(1, 2) d2$$

considerando che $\Gamma_e, \Gamma_{ie} < \Gamma_i$ il sistema si disaccoppia:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} + \frac{e}{m_e} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial v} \right] F_e(1) = 0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} - \frac{e}{m_i} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial v} \right] F_i(1) = \int \frac{\partial \phi_{ii}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial v} G_{ii}(1, 2) d2$$

Momenti della funzione di distribuzione

Assumiamo di nuovo elettroni all'equilibrio termico e quasi-neutralità e con queste ipotesi calcoliamo le derivate temporali dei valori medi trovati in precedenza sfruttando le nuove equazioni del trasporto trovate:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{rv} \rangle = \langle v^2 \rangle + 3 \frac{T_e}{m_i} + \frac{1}{m_i} \int n_i(r) r \Phi_{ii}(r) dr$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle v^2 \rangle = 2\gamma \frac{T_e}{m_i} - \int \frac{\partial \phi_{ii}}{\partial r} G_{ii}(1, 2) d1 d2$$

con:

$$\Phi(r) = \int n_i(r') g_{ii}(r, r') dr'$$

$$n_i(r') n_i(r) g_{ii}(r, r') = \int G_{ii}(r, v, r', v') dv dv'$$

$$u(r) = \int F(1) dv$$

Momenti della funzione di distribuzione

Con la II equazione della gerarchia BBGKY possiamo porre:

$$\int v \frac{\partial \phi_{ii}}{\partial r} G_{ii}(1, 2) d1 d2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \phi_{ii} G_{ii}(1, 2) d1 d2 \equiv -\frac{\partial}{\partial t} U_{ii}$$

In approssimazione di densità locale (i.e.

$g_{ii}(r, r') = g_{ii}(|r - r'|)$) si ha (vedere [1]):

$$U_{ii} = \int n_i u_{ii} dr$$

$$\Phi_{ii} = -\frac{1}{3} \left(\frac{u_{ii}}{n_i} + \frac{\partial u_{ii}}{\partial n_i} \right) \frac{\partial n_i}{\partial r}$$

$$\text{con } u_{ii}(r) = \frac{e^2}{2} n_i \int \frac{g_{ii}(x; n_i)}{x} dx$$

Momenti della funzione di distribuzione

Osservando che con questa approssimazione

$$\int n_i(r)r\Phi_{ii}(r)dr = \frac{1}{3}U_{ii}$$

il set dei momenti si semplifica a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{rv} \rangle &= \langle v^2 \rangle + 3 \frac{T_e}{m_i} + \frac{1}{3m_i} U_{ii} \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle v^2 \rangle &= 2\gamma \frac{T_e}{m_i} + \frac{\partial}{\partial t} U_{ii}\end{aligned}$$

Cerchiamo di nuovo soluzione autosimile e cerchiamo giustificazione a posteriori:

i parametri devono soddisfare il seguente sistema

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma^2 = 2\gamma \sigma^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma = \frac{T_e + T_i + \frac{1}{3}U_{ii}}{m_i \sigma^2} - \gamma^2$$

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} = -2\gamma T_e$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = -2\gamma T_i - \frac{2}{3}\gamma U_{ii} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_{ii}}{\partial t}$$

Soluzione complicata che comunque non predice il fatto che per tempi lunghi il plasma si comporta in modo non collisionale.

Osservazione:

Γ_i è un buon indice per quantificare correlazioni quando il sistema è all'equilibrio termodinamico, ma in questo caso il plasma si espande liberamente, e quindi è costantemente in uno stato di non-equilibrio.

Bisogna vedere se effettivamente Γ_i parametrizza realmente le correlazioni presenti nel plasma

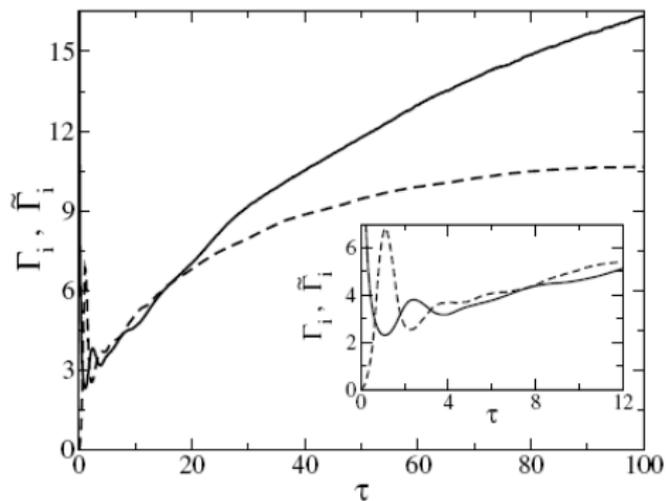
A questo proposito si definisce un Γ_i^* ottenuto nel seguente modo:

si calcola la distribuzione delle distanze tra gli ioni

si fa un best fit della funzione di correlazione $g_{ii}(r, \Gamma_i^*)$ ricavata da simulazioni MD

da questo si estrae il valore di Γ_i^* a tempi diversi

Confronto tra i parametri di accoppiamento



Confronto tra Γ_i (solido) e Γ_i^ (tratteggiato)*

Osservazioni

La divergenza che si osserva per tempi lunghi ($t \gg \omega_{pi}^{-1}$) ci dice che il plasma *NON* si rilassa verso una situazione di equilibrio

Inoltre si osserva che Γ_i tende ad un valore costante ($\simeq 10$)
CONGELAMENTO DELLE CORRELAZIONI

Questo fenomeno può essere interpretato di nuovo come una violazione dell'ipotesi di separazione delle scale temporali (ipotesi di Bogoliubov) riguardanti l'espansione del plasma e il rilassamento della funzione di correlazione

Controprova

Controprova proposta: prendiamo il tempo idrodinamico dell'espansione del plasma calcolato come il tempo tipico di evoluzione di una quantità macroscopica (per semplicità sia essa la densità media):

$$\tau_{hyd} \equiv \frac{\bar{n}}{\dot{\bar{n}}} \simeq \left(1 + \frac{t^2}{\tau_{exp}^2} \right) \frac{\tau_{exp}^2}{3t}$$

e confrontiamolo con il tempo di rilassamento della funzione di correlazione, che è uguale, per un plasma fortemente accoppiato, a $\tau_{corr} \simeq \omega_{pi}^{-1}$:

$$\tau_{corr} \simeq \left(1 + \frac{t^2}{\tau_{exp}^2} \right)^{3/4}$$

Controprova

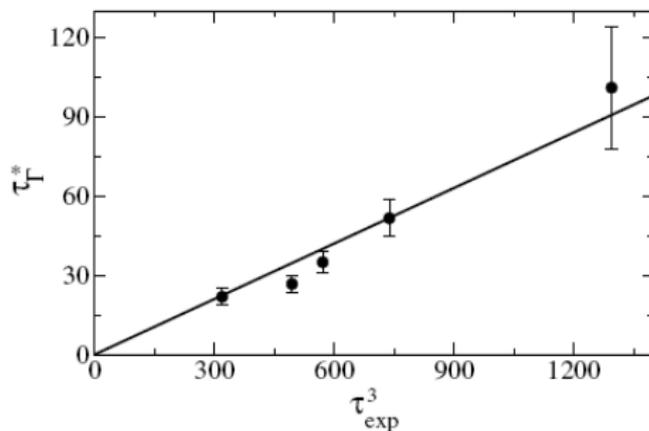
Inizialmente $\tau_{hyd} \gg \tau_{corr}$

I due tempi caratteristici assumono lo stesso valore per

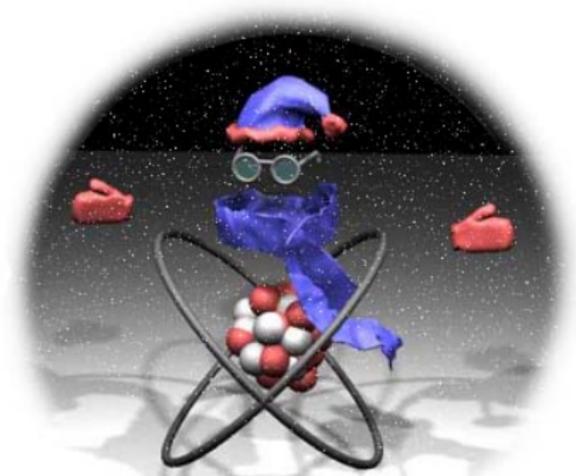
$$t^* \simeq \frac{1}{9} \tau_{exp}^3 \omega_{pi}^2$$

A questo punto si confronta la curva teorica con i valori dei tempi per i quali Γ_i e Γ_i^* si discostano definitivamente l'uno dall'altro per più del 5%

Controprova



Ogni punto corrisponde ad un set diverso di condizioni iniziali



Ultracold Atoms and Plasmas