

Low-Momentum NN Interactions in a **Model Space Truncation Approach**

Luigi Coraggio

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Napoli

Calcoli microscopici di struttura nucleare

Calcoli microscopici di struttura nucleare



Calcoli in cui si tiene conto di **tutti** i gradi di libertà microscopici di **tutti** i nucleoni costituenti il nucleo

Calcoli microscopici di struttura nucleare



Calcoli in cui si tiene conto di **tutti** i gradi di libertà microscopici di **tutti** i nucleoni costituenti il nucleo

$$H\Psi = \left(\sum_i T_i + \sum_{i<j} V_{ij} + \sum_{i<j<k} V_{ijk} \right) \Psi = E\Psi$$

Ingredienti fondamentali per il nostro calcolo:

- un potenziale nucleone-nucleone “realistico” V_{ij}

Ingredienti fondamentali per il nostro calcolo:

- un potenziale nucleone-nucleone “realistico” V_{ij}
 - CD-Bonn

Ingredienti fondamentali per il nostro calcolo:

- un potenziale nucleone-nucleone “realistico” V_{ij}
 - CD-Bonn
 - Nijmegen I,II,93

Ingredienti fondamentali per il nostro calcolo:

- un potenziale nucleone-nucleone “realistico” V_{ij}
 - CD-Bonn
 - Nijmegen I,II,93
 - Argonne V18

Ingredienti fondamentali per il nostro calcolo:

- un potenziale nucleone-nucleone “realistico” V_{ij}
 - CD-Bonn
 - Nijmegen I,II,93
 - Argonne V18
 - potenziali “chirali”

Ingredienti fondamentali per il nostro calcolo:

- un potenziale nucleone-nucleone “realistico” V_{ij}
 - CD-Bonn
 - Nijmegen I,II,93
 - Argonne V18
 - potenziali “chirali”
- una forza a tre corpi (eventuale) V_{ijk}

Ingredienti fondamentali per il nostro calcolo:

- un potenziale nucleone-nucleone “realistico” V_{ij}
 - CD-Bonn
 - Nijmegen I,II,93
 - Argonne V18
 - potenziali “chirali”
- una forza a tre corpi (eventuale) V_{ijk}
 - Urbana IX

Ingredienti fondamentali per il nostro calcolo:

- un potenziale nucleone-nucleone “realistico” V_{ij}
 - CD-Bonn
 - Nijmegen I,II,93
 - Argonne V18
 - potenziali “chirali”
- una forza a tre corpi (eventuale) V_{ijk}
 - Urbana IX
 - Illinois 1-5

Nuclei per i quali è possibile effettuare un calcolo microscopico “esatto”:

- Deutone

Nuclei per i quali è possibile effettuare un calcolo microscopico “esatto”:

- Deutone
- ^3H , ^3He

Nuclei per i quali è possibile effettuare un calcolo microscopico “esatto”:

- Deutone
- ^3H , ^3He
- ^4He

... e per i nuclei $A > 4$?

... e per i nuclei $A > 4$?

Metodi “esatti” non esistono: è necessario utilizzare uno schema troncato e/o semplificato

... e per i nuclei $A > 4$?

Metodi “esatti” non esistono: è necessario utilizzare uno schema troncato e/o semplificato



I calcoli dipendono da un insieme di parametri $\{\alpha_i\}$ e dalle dimensioni d dello spazio di Hilbert troncato, al cui interno l'equazione di Schrödinger viene risolta

Un calcolo microscopico “**affidabile**” si ottiene variando i parametri $\{\alpha_i\}$ del calcolo in un intervallo ragionevolmente grande, all’interno del quale il risultato numerico deve essere stabile rispetto a tale variazione e all’aumentare della dimensionalità d dello spazio di Hilbert ridotto

Un calcolo microscopico “**affidabile**” si ottiene variando i parametri $\{\alpha_i\}$ del calcolo in un intervallo ragionevolmente grande, all’interno del quale il risultato numerico deve essere stabile rispetto a tale variazione e all’aumentare della dimensionalità d dello spazio di Hilbert ridotto

L’“**affidabilità**” del calcolo va quindi testata risolvendo l’eq. di Schrödinger per i sistemi nucleari per i quali un calcolo esatto è effettuabile e, possibilmente, riproducendo le quantità tramite quest’ultimo ottenibili

Situazione attuale: nell'ultimo decennio si è avuto un notevole progresso nella tecnologia dei calcolatori

Situazione attuale: nell'ultimo decennio si è avuto un notevole progresso nella tecnologia dei calcolatori



Modelli e tecniche di calcolo “microscopiche” per i sistemi a molti corpi sono stati implementati in modo da essere spinti ai limiti estremi della loro funzionalità

Quantum Monte Carlo

Metodo variazionale per ottenere soluzioni approssimate dell'equazione di Schrödinger per sistemi nucleari.

Quantum Monte Carlo

Metodo variazionale per ottenere soluzioni approssimate dell'equazione di Schrödinger per sistemi nucleari.

Lo scopo è di ottenere una funzione d'onda Ψ_V , opportunamente parametrizzata, per calcolare il limite superiore dell'energia esatta E_0 dello stato fondamentale.

$$E_V = \frac{\langle \Psi_V | H | \Psi_V \rangle}{\langle \Psi_V | \Psi_V \rangle} \geq E_0$$

No-Core Shell Model

Il punto di partenza è l'hamiltoniana ad A nucleoni a cui viene aggiunto il potenziale del centro di massa nella base dell'oscillatore armonico:

No-Core Shell Model

Il punto di partenza è l'hamiltoniana ad A nucleoni a cui viene aggiunto il potenziale del centro di massa nella base dell'oscillatore armonico:

$$H_A^\omega = \sum_{i=1}^A \left[\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \omega^2 r_i^2 \right] + \sum_{i < j=1}^A \left[V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) - \frac{m\omega^2}{2A} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 \right]$$

No-Core Shell Model

Il punto di partenza è l'hamiltoniana ad A nucleoni a cui viene aggiunto il potenziale del centro di massa nella base dell'oscillatore armonico:

$$H_A^\omega = \sum_{i=1}^A \left[\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \omega^2 r_i^2 \right] + \sum_{i < j=1}^A \left[V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) - \frac{m\omega^2}{2A} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 \right]$$

Questa hamiltoniana va diagonalizzata in uno spazio costituito dalle autofunzioni di oscillatore armonico, le dimensioni di questo spazio devono essere sufficienti da rendere stabili numericamente gli autovalori dello spettro più bassi in energia

Coupled-cluster approach

La teoria dei **coupled cluster** è stata introdotta per la prima volta in struttura nucleare nel 1958 da F. Coester

Coupled-cluster approach

La teoria dei **coupled cluster** è stata introdotta per la prima volta in struttura nucleare nel 1958 da F. Coester

Formalmente la funzione correlata del sistema a molti corpi viene scritta come:

$$|\Psi\rangle = \exp(-T)|\Psi_0\rangle$$

dove l'operatore di correlazione $T = T_1 + T_2 + \dots + T_A$ è espresso come somma di operatori di correlazione

$$T_1 = \sum_{i \langle \epsilon_f, a \rangle \epsilon_f} t_i^a a_a^\dagger a_i \quad T_2 = \sum_{ij \langle \epsilon_f, ab \rangle \epsilon_f} t_{ij}^{ab} a_a^\dagger a_b^\dagger a_i a_j \quad \dots$$

Approccio perturbativo

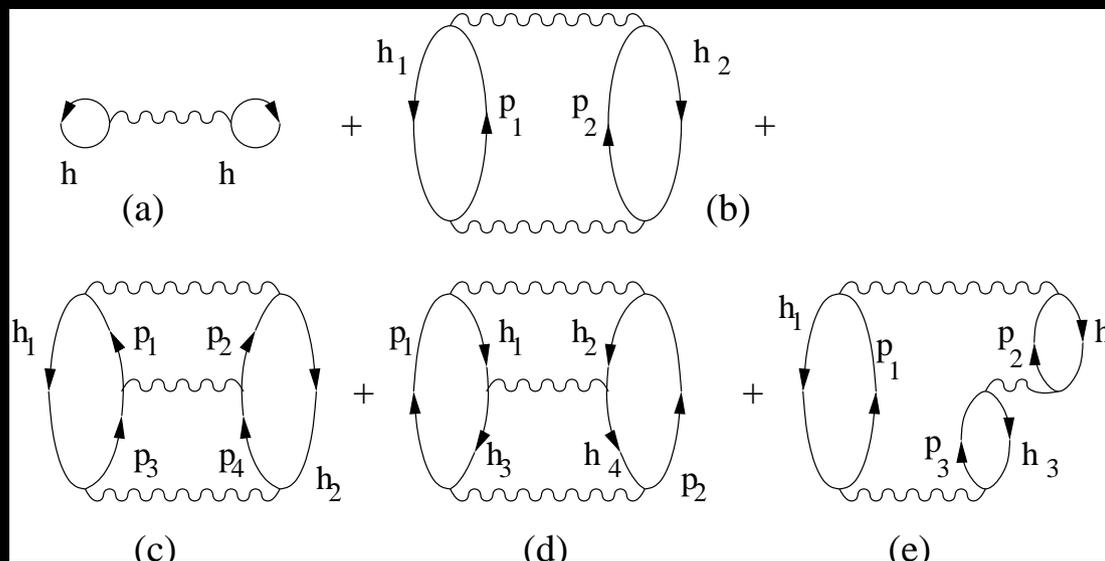
Questo schema è particolarmente funzionale al calcolo dello stato fondamentale di nuclei doppiamente magici (ad es. ${}^4\text{He}$, ${}^{16}\text{O}$, ${}^{40}\text{Ca}$, etc.). L'idea fondamentale è quella di introdurre un campo medio ausiliare U in modo tale da scrivere l'hamiltoniana

$$H = (T + U) + (V - U) = H_0 + H_1$$

H_0 descrive il nucleo come un insieme di nucleoni indipendenti immersi in un campo medio U , che potrebbe essere ad esempio il potenziale autoconsistente di Hartree-Fock

H_1 è l'hamiltoniana di interazione residua che viene trattata perturbativamente.

Lo sviluppo perturbativo dell'energia dello stato fondamentale del nucleo (**sviluppo di Goldstone**) può essere rappresentato diagrammaticamente:



Non è possibile arrestare lo sviluppo perturbativo ai bassi ordini utilizzando un potenziale realistico NN a causa della repulsione nel regime degli alti momenti relativi.

Non è possibile arrestare lo sviluppo perturbativo ai bassi ordini utilizzando un potenziale realistico NN a causa della repulsione nel regime degli alti momenti relativi.



Il potenziale NN va rinormalizzato: un'approccio molto conveniente è quello di costruire mediante un procedimento efficace un potenziale definito solo per valori bassi del momento relativo (sino a un momento di cutoff Λ), che preserva esattamente la fisica del problema nucleone-nucleone sino a Λ

Potenziali NN di basso momento

Il deutone:

Nello spazio completo:

$$\langle k|(T + V_{NN})|k'\rangle \langle k'|\Psi_n\rangle = E_n \langle k|\Psi_n\rangle \quad 0 < k, k' < \infty$$

In uno spazio modello ridotto $P = \sum_{k < \Lambda} |k\rangle \langle k|$

$$\langle k|(T + V_{\text{eff}})|k'\rangle \langle k'|\Phi_m\rangle = \tilde{E}_m \langle k|\Phi_m\rangle \quad 0 < k, k' < \Lambda$$

Vincolo fondamentale: $\tilde{E}_m \in \{E_n\}$

Potenziali NN di basso momento

Il deutone:

Nello spazio completo:

$$\langle k|(T + V_{NN})|k'\rangle \langle k'|\Psi_n\rangle = E_n \langle k|\Psi_n\rangle \quad 0 < k, k' < \infty$$

In uno spazio modello ridotto $P = \sum_{k < \Lambda} |k\rangle \langle k|$

$$\langle k|(T + V_{\text{eff}})|k'\rangle \langle k'|\Phi_m\rangle = \tilde{E}_m \langle k|\Phi_m\rangle \quad 0 < k, k' < \Lambda$$

Vincolo fondamentale: $\tilde{E}_m \in \{E_n\}$

Come ottenere $\langle k|H_{\text{eff}}|k'\rangle$?

Potenziali NN di basso momento

Il deutone:

Nello spazio completo:

$$\langle k|(T + V_{NN})|k'\rangle \langle k'|\Psi_n\rangle = E_n \langle k|\Psi_n\rangle \quad 0 < k, k' < \infty$$

In uno spazio modello ridotto $P = \sum_{k < \Lambda} |k\rangle \langle k|$

$$\langle k|(T + V_{\text{eff}})|k'\rangle \langle k'|\Phi_m\rangle = \tilde{E}_m \langle k|\Phi_m\rangle \quad 0 < k, k' < \Lambda$$

Vincolo fondamentale: $\tilde{E}_m \in \{E_n\}$

Come ottenere $\langle k|H_{\text{eff}}|k'\rangle$?



Metodo di Andreozzi-Lee-Suzuki

Energia di legame del deutone

Potenziale CD-Bonn

Λ (in fm^{-1})	$PV_{\text{eff}}P$ (in MeV)	V_{NN} (in MeV)
1.6	-2.225	-2.225
1.8	-2.225	
2.0	-2.225	
2.2	-2.225	

Calcolo degli sfasamenti

Equazione di Lipmann-Schwinger

$$\langle p' | T(\epsilon_p) | p \rangle = \langle p' | V_{NN} | p \rangle + \int_0^\infty k^2 dk \frac{\langle p' | V_{NN} | k \rangle \langle k | T(\epsilon_p) | p \rangle}{\epsilon_p - \epsilon_k}$$

$$\langle p' | T_{\text{eff}}(\epsilon_p) | p \rangle = \langle p' | V_{\text{eff}} | p \rangle + \int_0^\Lambda k^2 dk \frac{\langle p' | V_{\text{eff}} | k \rangle \langle k | T_{\text{eff}}(\epsilon_p) | p \rangle}{\epsilon_p - \epsilon_k}$$

Potenziali NN di basso momento

Sfasamenti nel canale di diffusione 1S_0 (in gradi)

E_{lab} (MeV)	CD-Bonn	$V_{\text{low-k}}$	Expt.
1	62.1	62.1	62.1
10	60.0	60.0	60.0
25	50.9	50.9	50.9
50	40.5	40.5	40.5
100	26.4	26.4	26.8
150	16.3	16.3	16.9
200	8.3	8.3	8.9
250	1.6	1.6	2.0
300	-4.3	-4.3	-4.5

Il momento di cutoff Λ

E' possibile definire il momento di cutoff Λ in modo da costruire un ricoprimento dello spazio delle configurazioni r a partire da quello dei momenti k ?

Il momento di cutoff Λ

E' possibile definire il momento di cutoff Λ in modo da costruire un ricoprimento dello spazio delle configurazioni r a partire da quello dei momenti k ?

Λ = frontiera nello spazio dei momenti

Il momento di cutoff Λ

E' possibile definire il momento di cutoff Λ in modo da costruire un ricoprimento dello spazio delle configurazioni r a partire da quello dei momenti k ?

Λ = frontiera nello spazio dei momenti



frontiera nello spazio della base dell'oscillatore armonico

Momento di cutoff Λ

A un dato valore di Λ corrisponde un valore massimo dell'energia del moto relativo nel sistema di due nucleoni:

$$E_{\max} = \frac{\hbar^2 \Lambda^2}{M}$$

Momento di cutoff Λ

A un dato valore di Λ corrisponde un valore massimo dell'energia del moto relativo nel sistema di due nucleoni:

$$E_{\max} = \frac{\hbar^2 \Lambda^2}{M}$$

Nella base di oscillatore armonico abbiamo:

$$E_{\max} = \left(2n + l + \frac{3}{2}\right) \hbar \omega = \left(N_{\max} + \frac{3}{2}\right) \hbar \omega$$

Momento di cutoff Λ

A un dato valore di Λ corrisponde un valore massimo dell'energia del moto relativo nel sistema di due nucleoni:

$$E_{\max} = \frac{\hbar^2 \Lambda^2}{M}$$

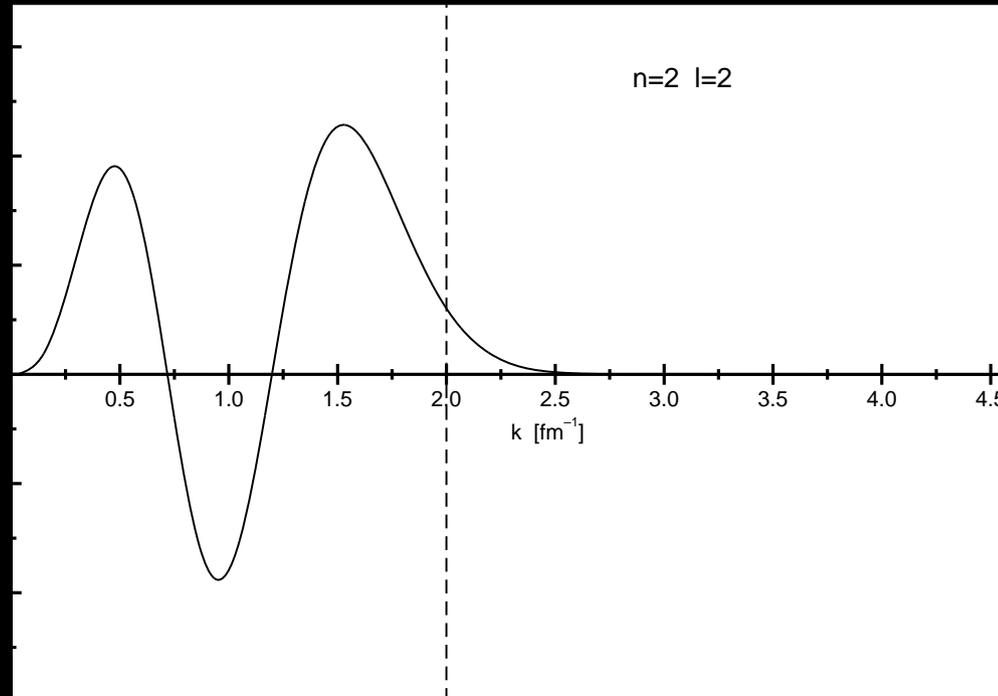
Nella base di oscillatore armonico abbiamo:

$$E_{\max} = \left(2n + l + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega = \left(N_{\max} + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega$$

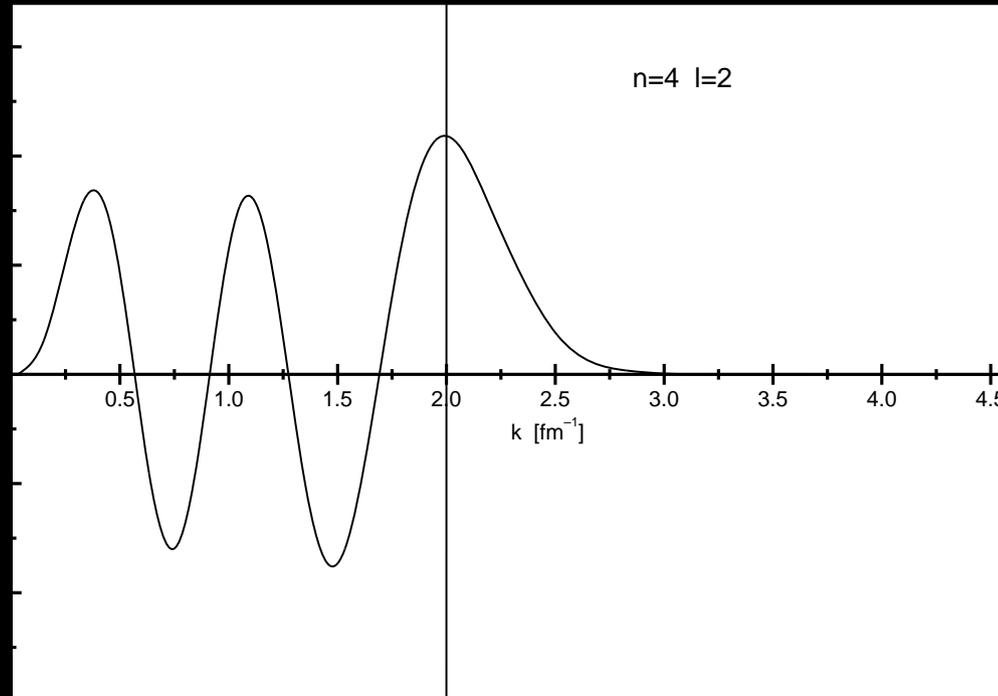
Fissato $\hbar\omega$, poniamo in relazione Λ con il valore massimo N_{\max} dei quanti di oscillatore armonico delle configurazioni a due corpi

$$\Lambda = \sqrt{\frac{M\omega}{\hbar} \left(N_{\max} + \frac{3}{2}\right)}$$

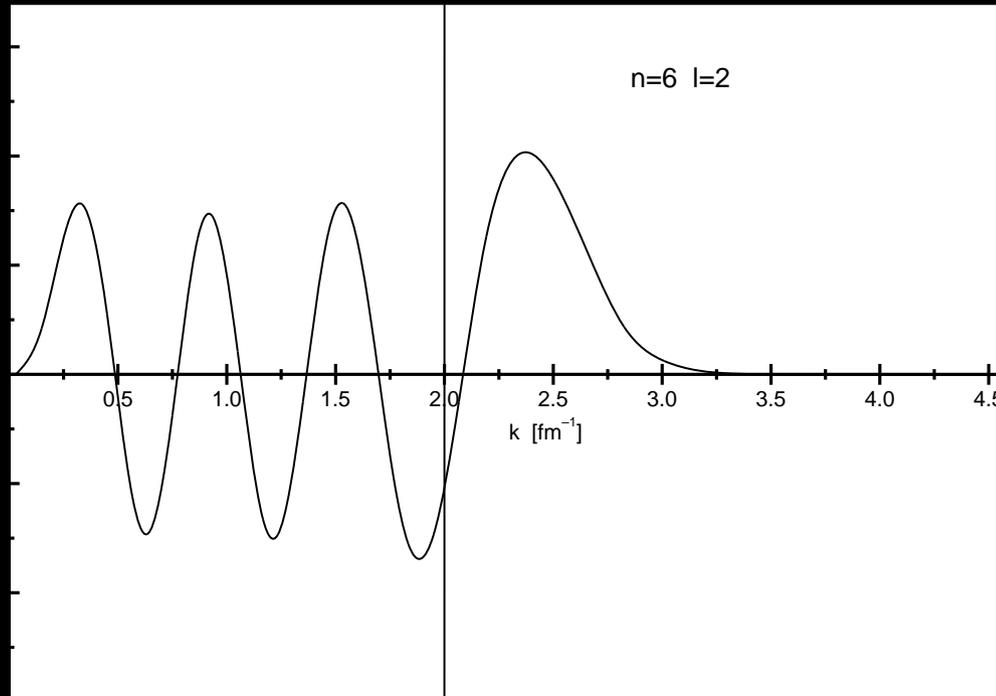
Momento di cutoff Λ



Momento di cutoff Λ



Momento di cutoff Λ



Applicazioni

Nuclei doppiamente magici

- Energie di legame

Dobbiamo risolvere l'eq. di Schrödinger $H\Psi = E\Psi$ dove

$$H = T + V = (T + U) + (V - U) = H_0 + H_1$$

potenziale ausiliario di Hartree-Fock

- Sviluppo perturbativo

Correzione del centro di massa

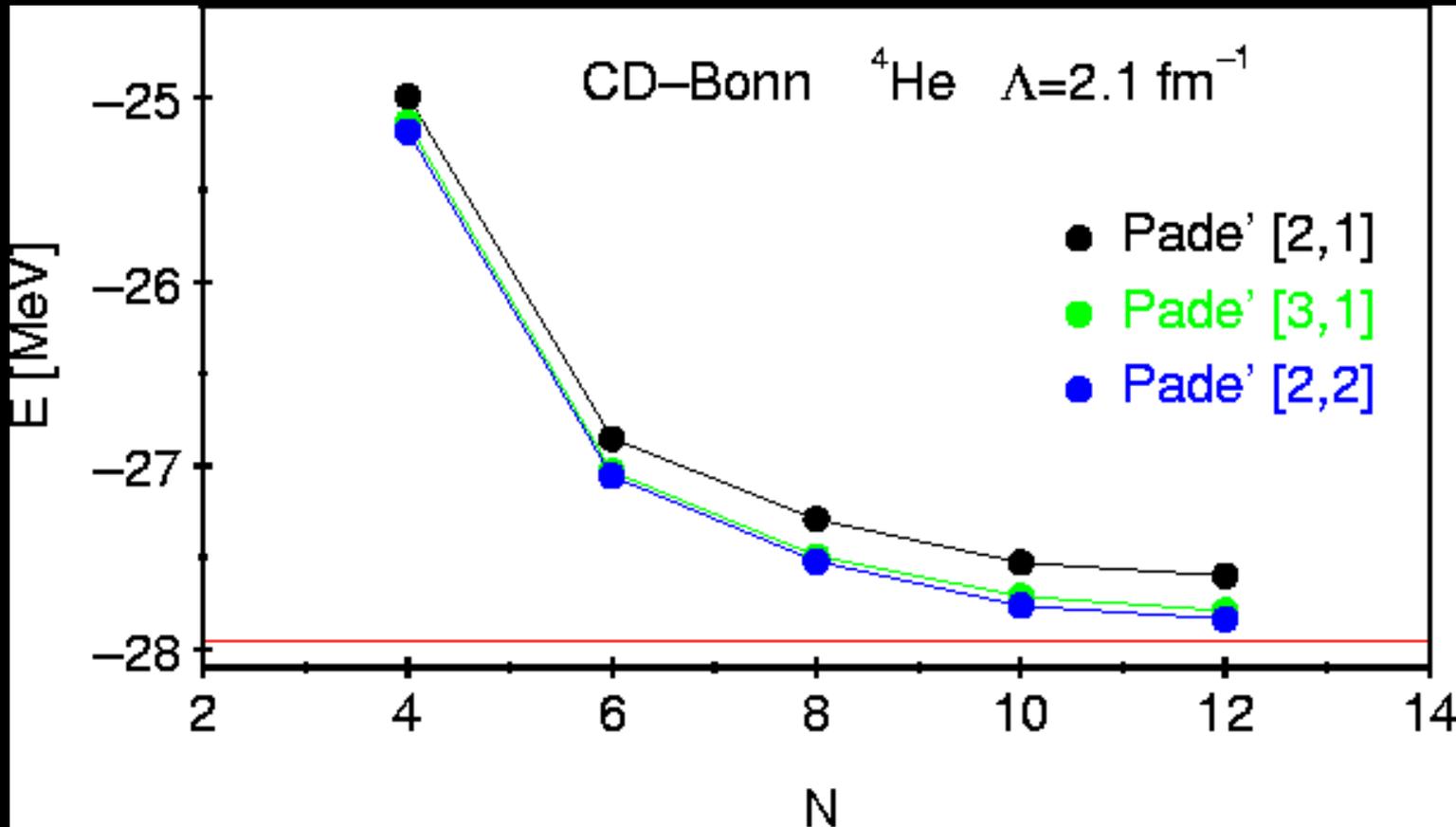
Rimuoviamo l'energia cinetica spuria del centro di massa scrivendo l'operatore T come

$$T = \frac{1}{2Am} \sum_{i < j} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)^2$$

L'hamiltoniana viene quindi riscritta come

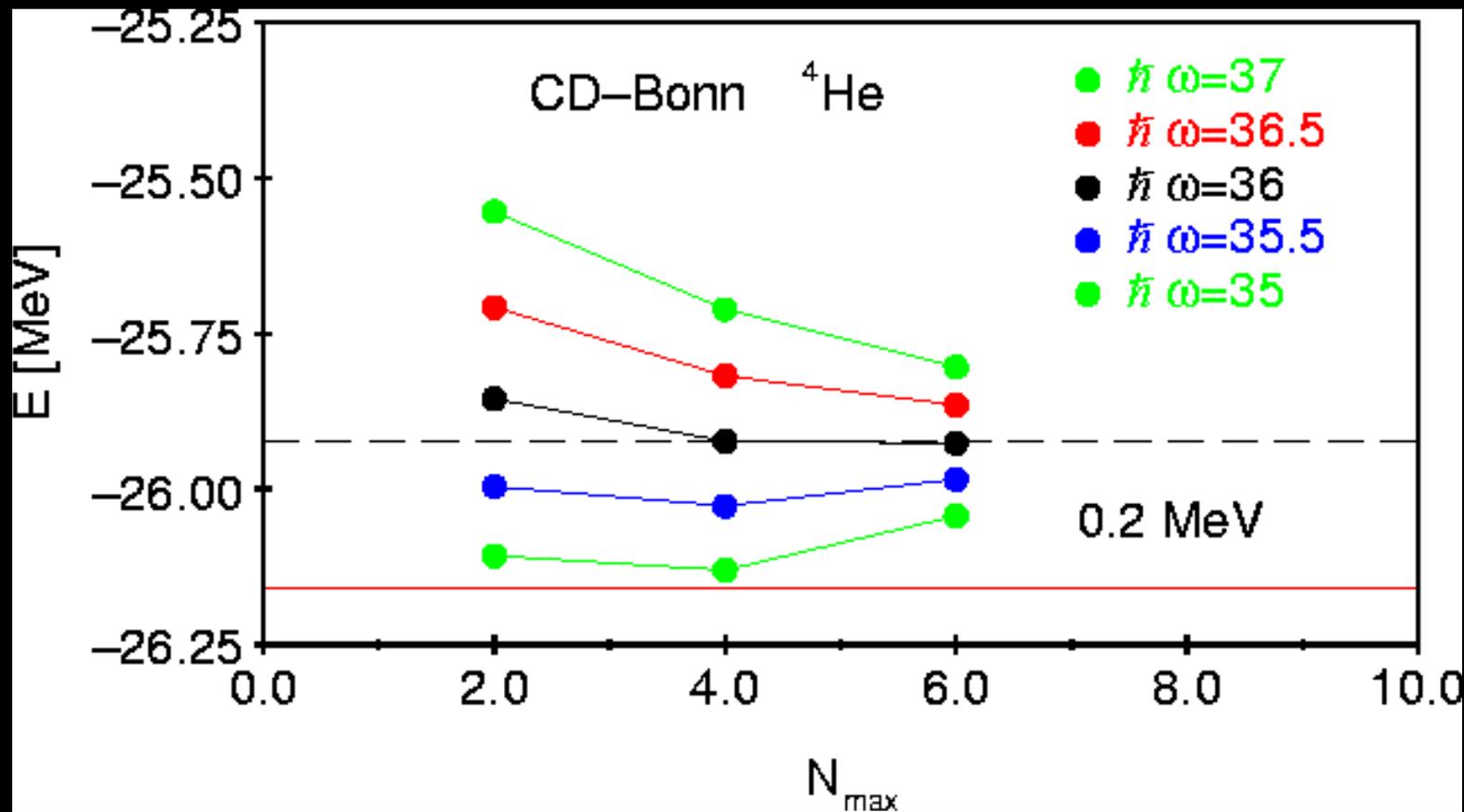
$$H = \left(1 - \frac{1}{A}\right) \sum_{i=1}^A \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i < j} \left(V_{ij} - \frac{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j}{mA} \right)$$

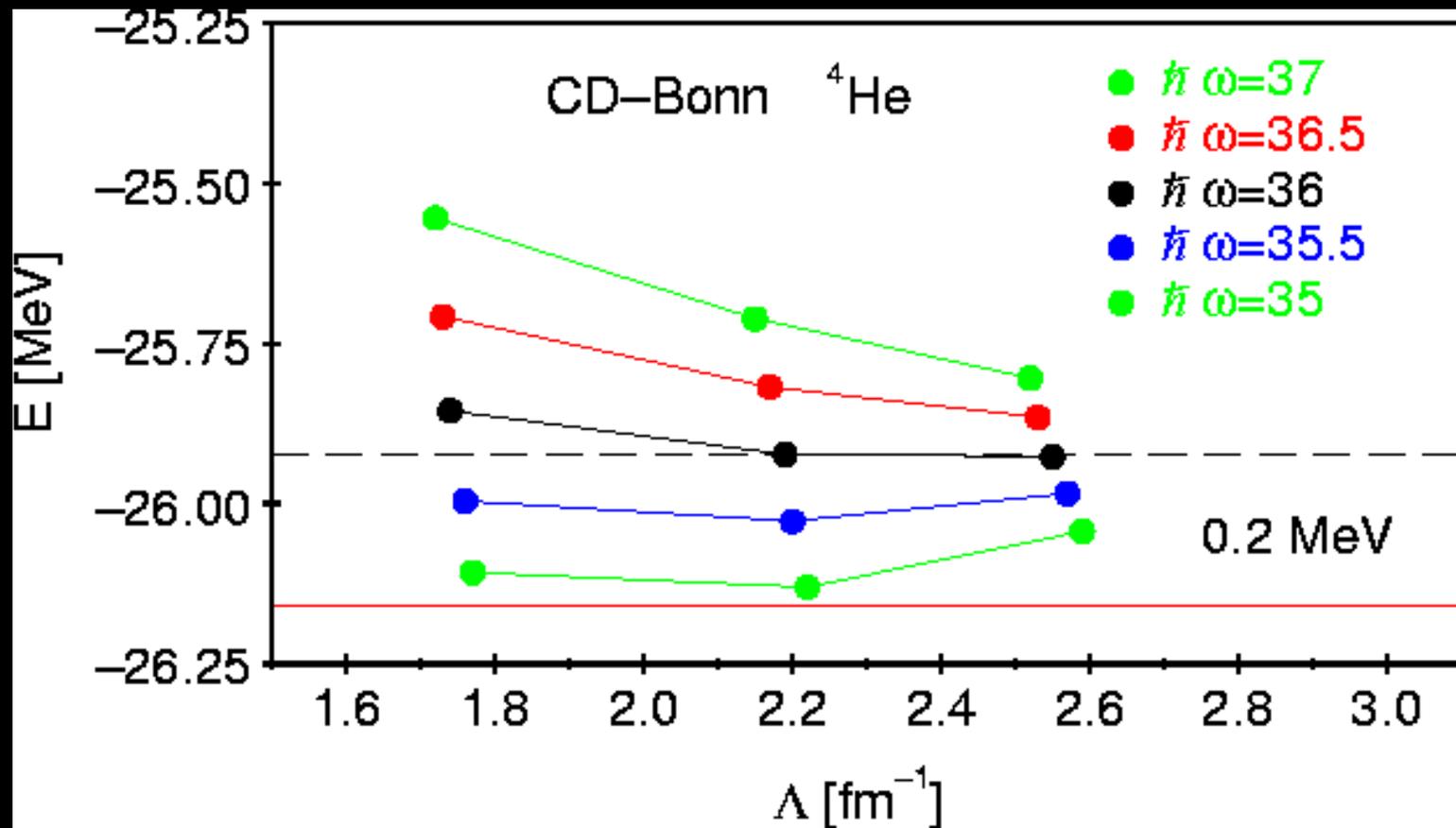
Test: calcoli per $\Lambda = 2.1 \text{ fm}^{-1}$

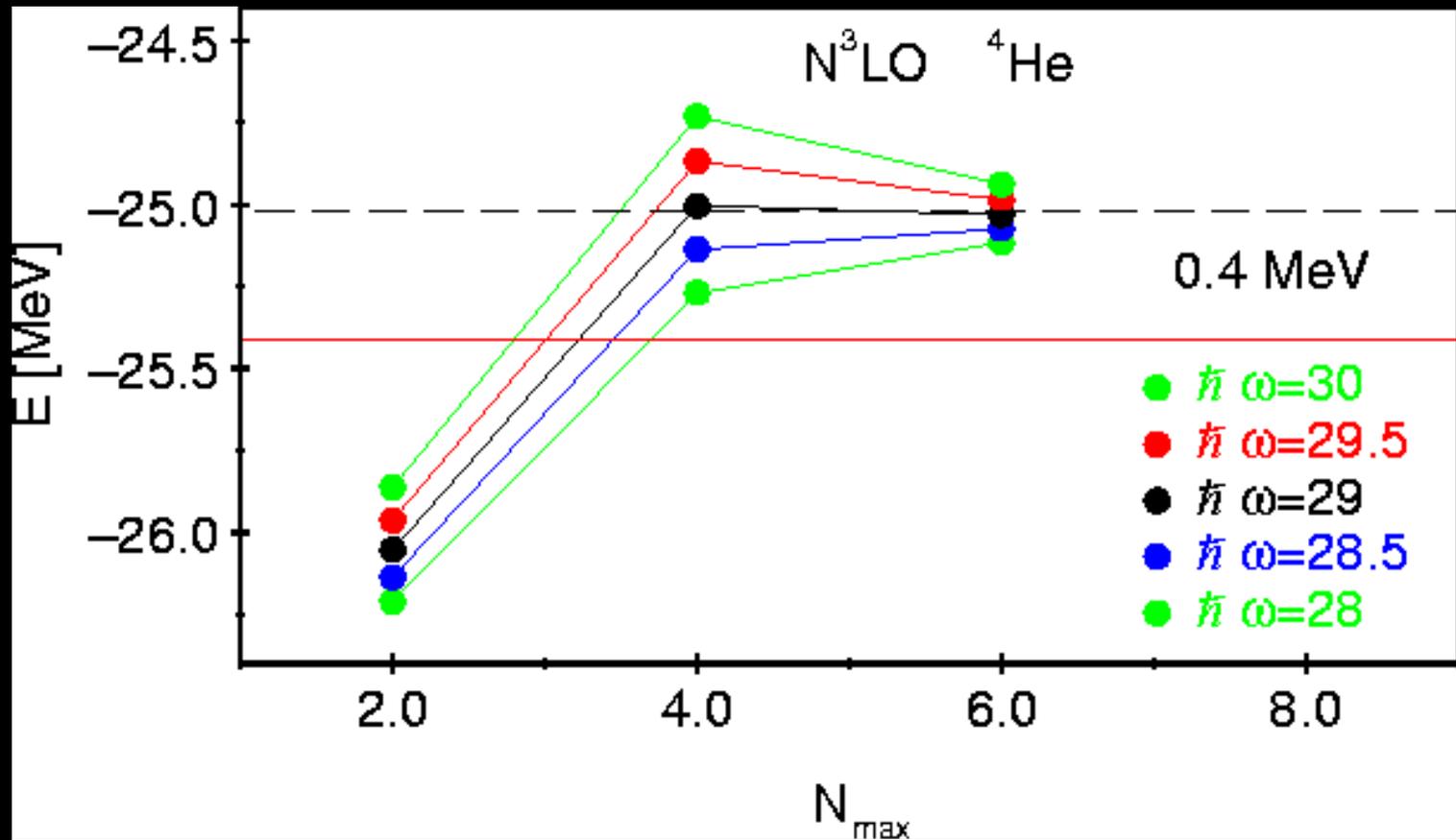


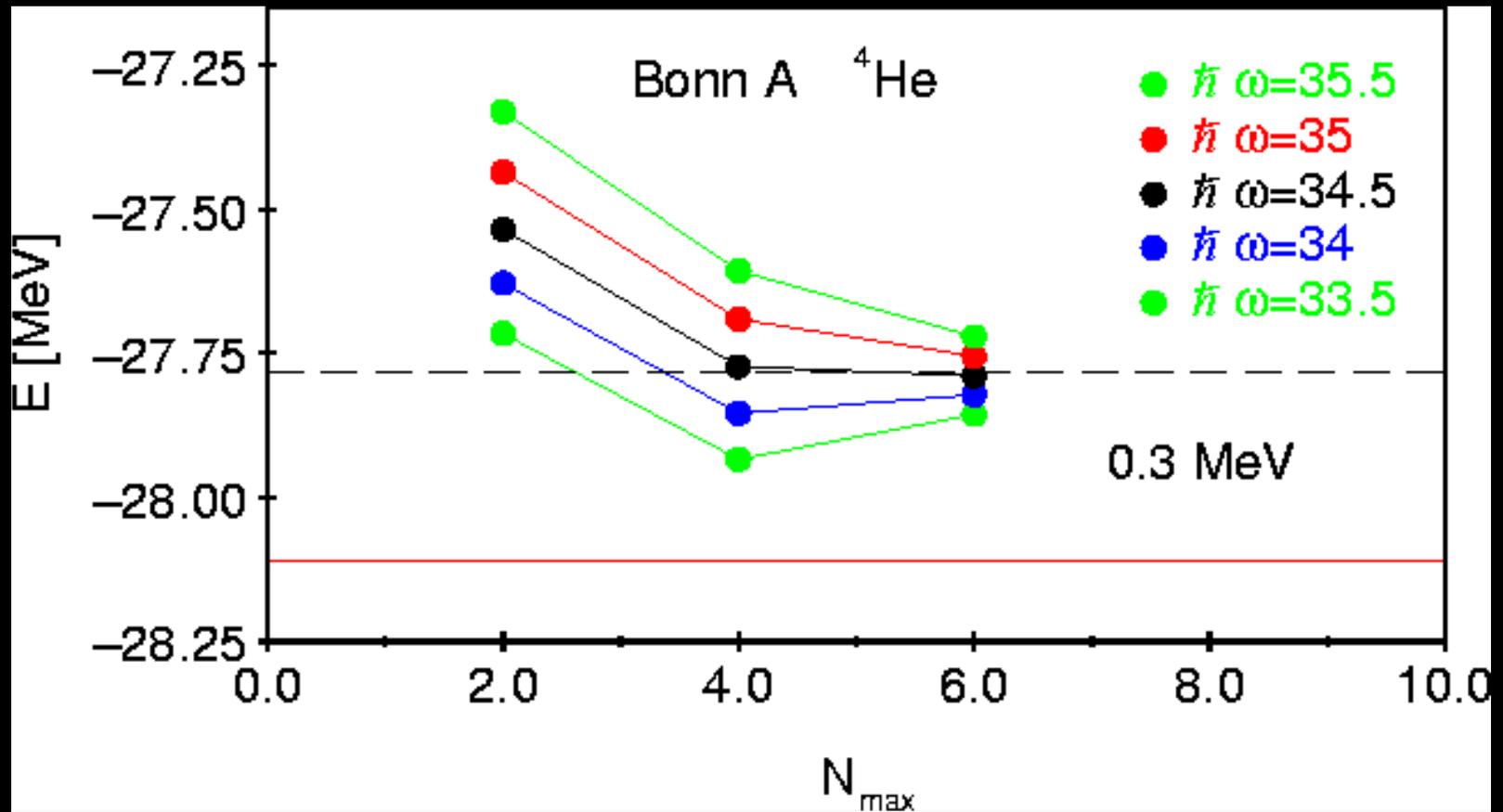
Calcolo esatto di M. Viviani; *M. Viviani, A. Kievsky, and S. Rosati, Phys. Rev. C 71, 024006 (2005)*

${}^4\text{He}$

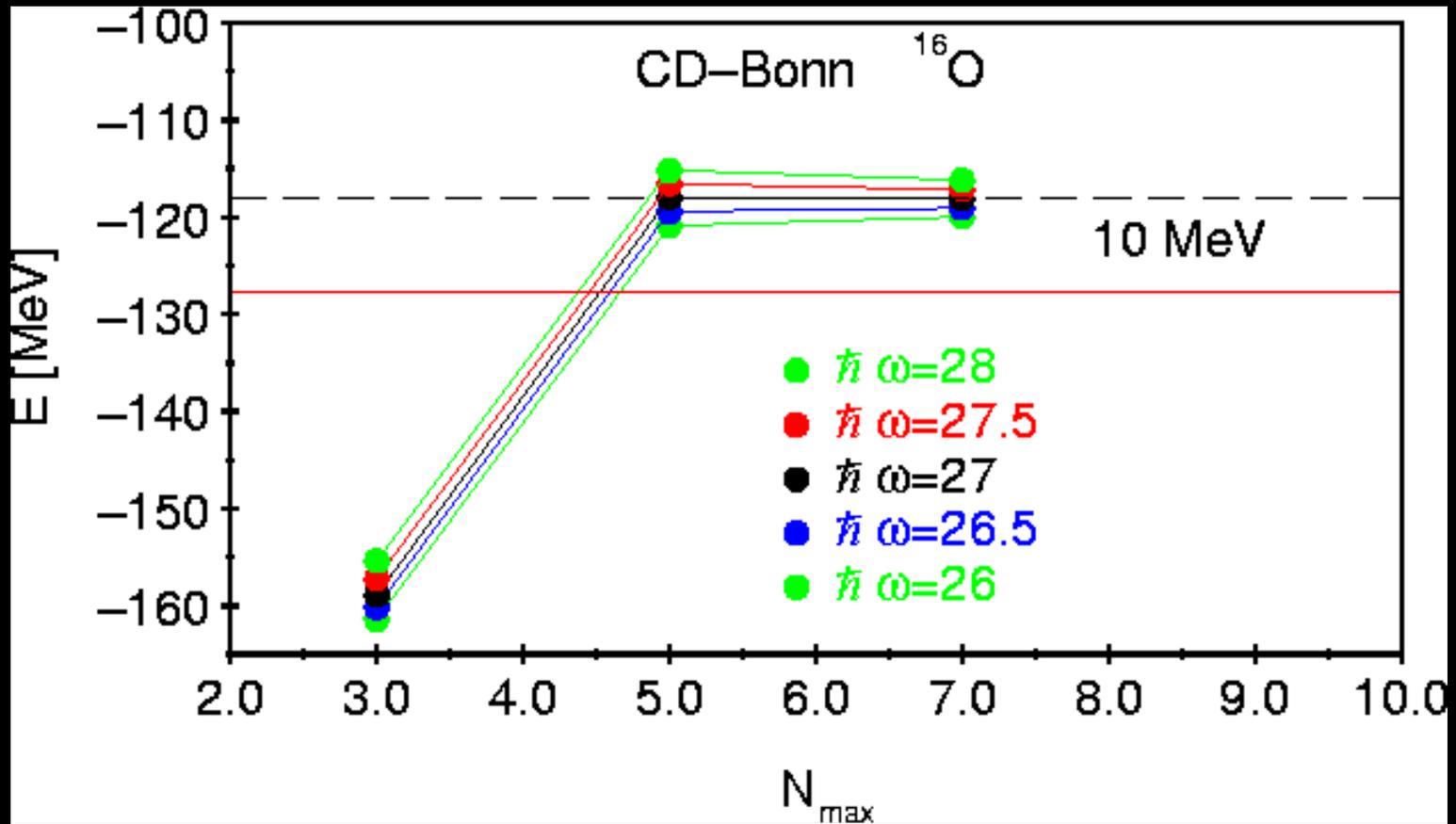




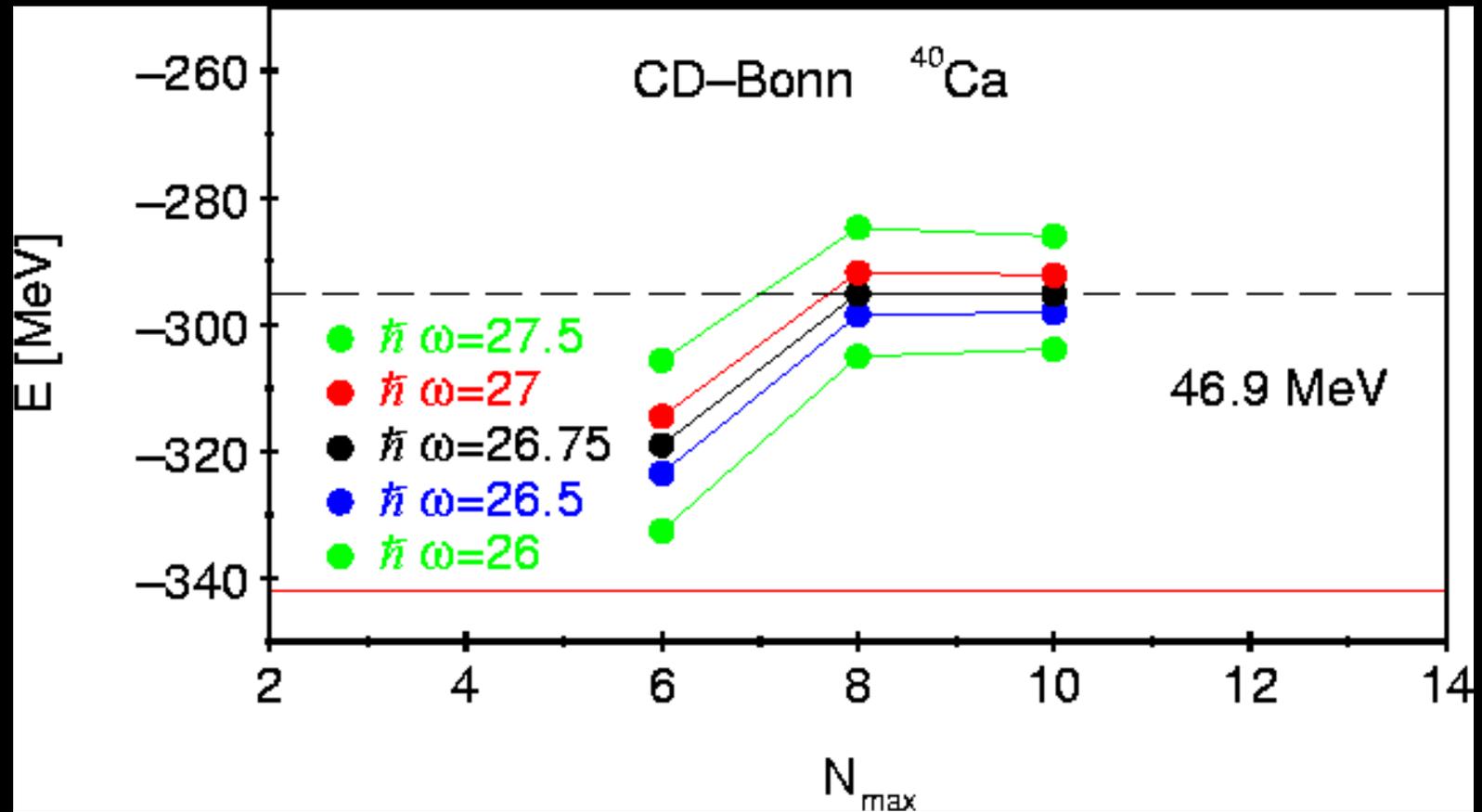




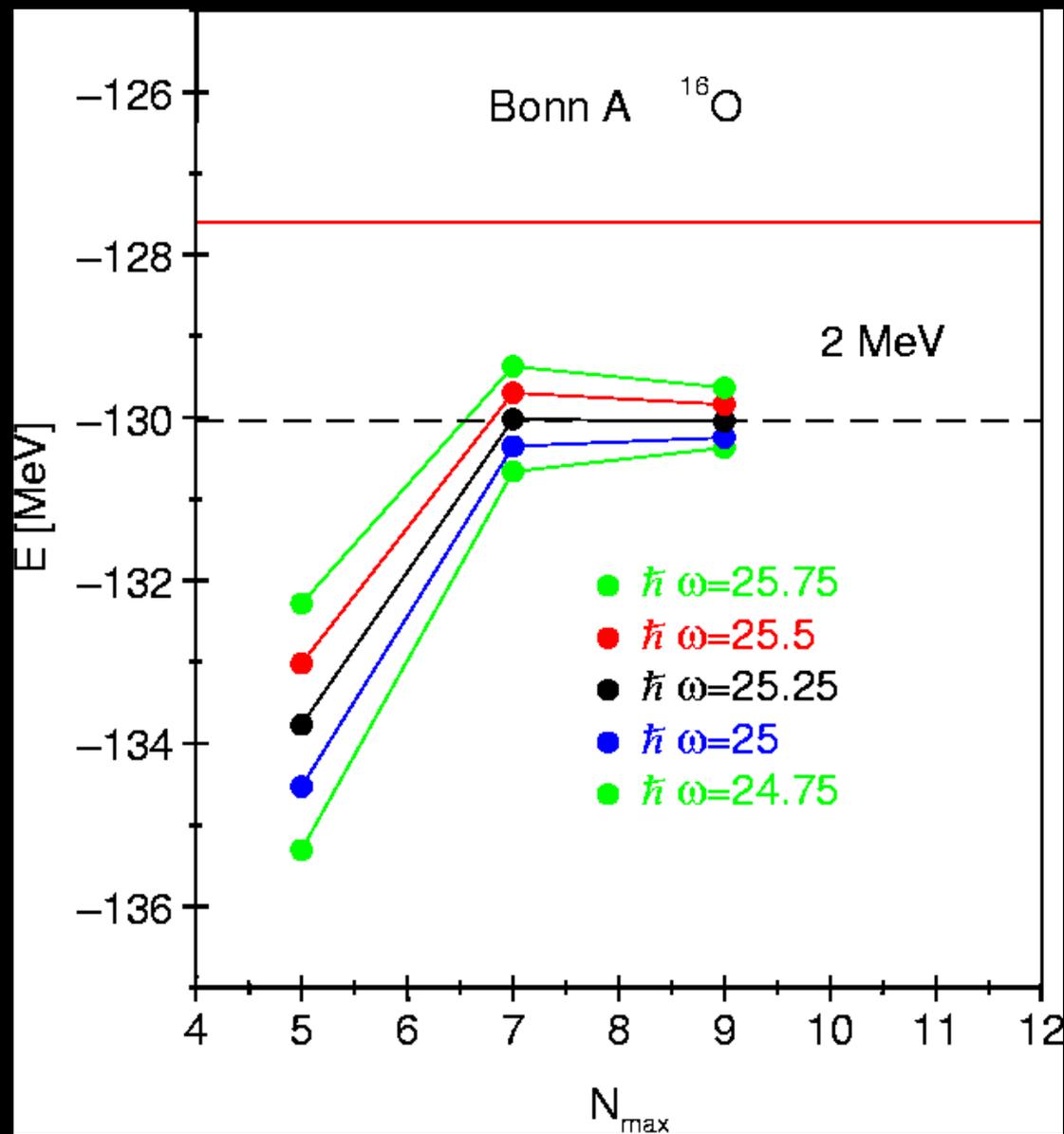
^{16}O

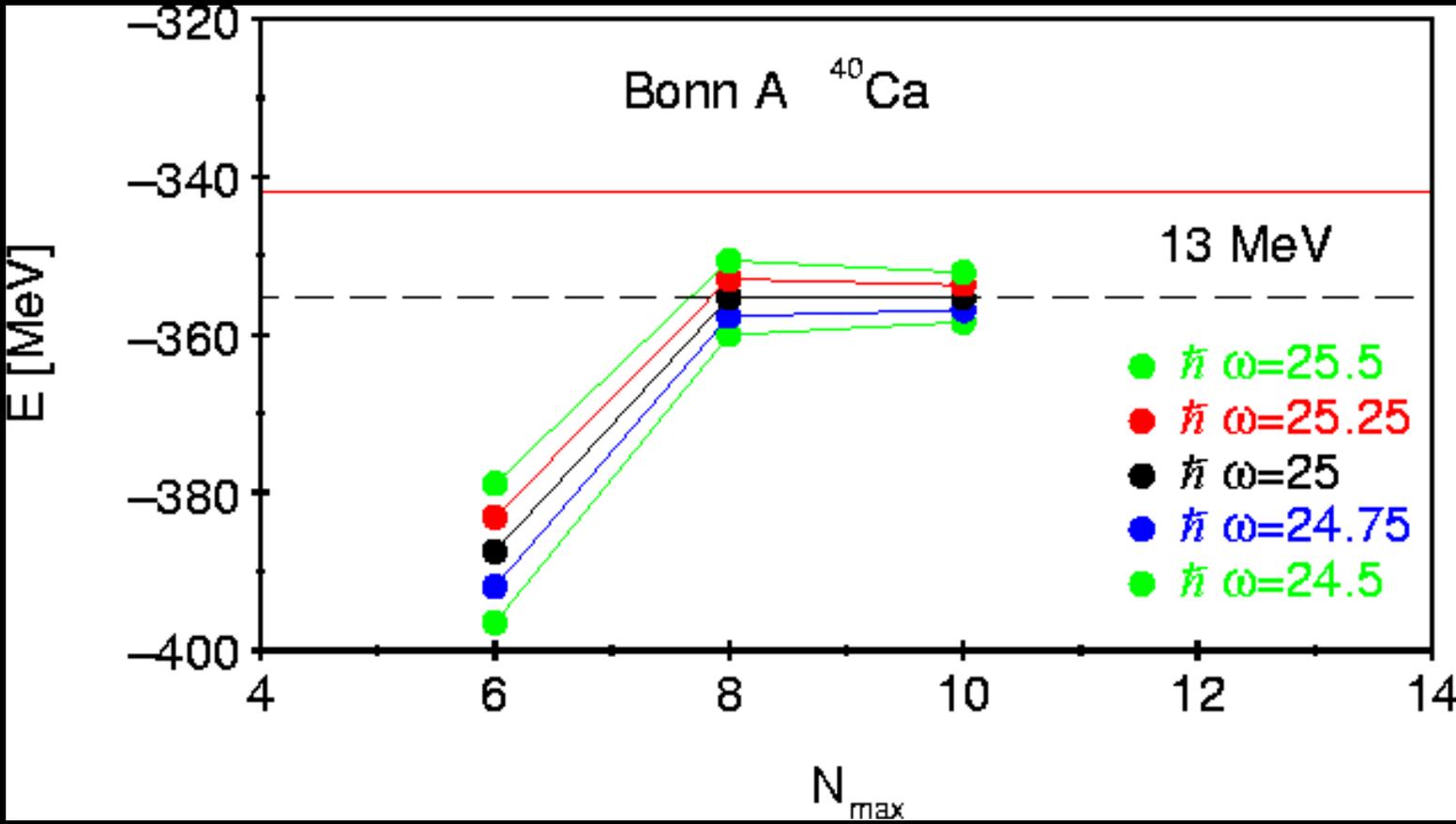


^{40}Ca



Calcoli con il potenziale Bonn A





Prospettive future

- Calcoli per nuclei semimagici con un nucleone di valenza

Prospettive future

- Calcoli per nuclei semimagici con un nucleone di valenza
- Inclusione di forze a tre corpi

Prospettive future

- Calcoli per nuclei semimagici con un nucleone di valenza
- Inclusione di forze a tre corpi
- Calcoli di interazioni efficaci per il modello a shell

Collaborazione

Napoli

A. Covello

A. Gargano

N. Itaco

L. C.

SUNY - Stony Brook:

T. T. S. Kuo

University of Idaho - Moscow:

R. Machleidt