

# Bakamjian-Thomas mass operator for the few-nucleon system: an effective theory approach

Luca Girlanda, Michele Viviani  
INFN Sez. di Pisa

XI Convegno su Problemi di Fisica Nucleare Teorica

Cortona 11-14 Ottobre 2006

## Motivazioni

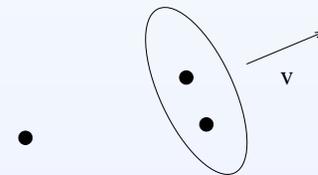
L'accuratezza dei potenziali fenomenologici, o derivati da principi primi (“secondi”) richiede un esame delle correzioni relativistiche all'interazione tra i nucleoni

Un problema dalla lunga storia:

- QFT  $\rightarrow$  Eq. di Schroedinger (Lippman-Schwinger)  
review di R.J.N.Phillips, RPP XXII 1959
- potenziale nonrelativistico  $\rightarrow$  correzioni relativistiche (“drift potential”)  
Dirac 1949, Krajcik-Foldy 1974

Il nostro tentativo:

- usare un'*equazione d'onda relativistica*, di cui si conoscano le proprietà di trasformazione di Lorentz



Sviluppiamo un approccio proposto da Klink [NPA716(2003)] e usato nell'ambito di modelli a quark chirali [Plessas, Glozman, ...] riferendolo a nucleoni e pioni come descritti dalla ChPT

Costruzione di Bakamjian-Thomas formulata nella point-form della dinamica relativistica

Il problema della covarianza à la Dirac: trovare interazioni per cui

$$\begin{aligned} [J^i, J^j] &= i\epsilon^{ijk} J^k, & [K^i, K^j] &= -i\epsilon^{ijk} J^k, & [J^i, K^j] &= i\epsilon^{ijk} K^k, & [P^\mu, P^\nu] &= 0, \\ [K^i, P^j] &= -i\delta^{ij} H, & [J^i, P^j] &= i\epsilon^{ijk} P^k, & [K^i, H] &= -iP^i, & [J^i, H] &= 0 \end{aligned}$$

Nella point-form, le interazioni sono contenute in  $P^\mu$  trasformazioni di Lorentz “cinematiche”  $\implies$  manifesta covarianza

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \quad U_\Lambda P^\mu U_\Lambda^{-1} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu P^\nu$$

Una soluzione è data dalla costruzione di Bakamjian-Thomas

La costruzione di Bakamjian-Thomas nella point-form

1. introdurre operatori ausiliari

$$\left\{ H_0, \vec{P}_0, \vec{K}_0, \vec{J}_0 \right\} \rightarrow \left\{ M_0, \vec{V}_0, \vec{K}_0, \vec{J}_0 \right\}$$

$$M_0 = \sqrt{H_0^2 - \vec{P}_0^2}, \quad V_0^\mu = \frac{P_0^\mu}{M_0}$$

2. aggiungere le interazioni all'operatore di massa

$$M \equiv M_0 + M_I, \quad P^\mu = M V_0^\mu$$

l'algebra di Poincaré è soddisfatta se

$$\left[ \vec{V}_0, M_I \right] = \left[ \vec{K}_0, M_I \right] = \left[ \vec{J}_0, M_I \right] = 0.$$

Partendo dalla teoria dei campi [cfr. Fubini, Hanson, Jackiw 1972]

$$P_I^\mu \equiv \int d^4x \delta(x^2 - \tau^2) x^\mu \theta(x_0) \mathcal{L}_I(x)$$

che non è della forma di Bakamjian-Thomas ( $v \neq v'$ )

$$\langle v | P_I^\mu | v' \rangle = \langle v | \mathcal{L}_I(0) | v' \rangle \int d^4x \delta(x^2 - \tau^2) x^\mu \theta(x_0) e^{-i(mv - m'v')x}$$

autostati di  $V_0^\mu$  :  $|v\rangle = |v, \vec{k}_1, \mu_1, \dots, \vec{k}_n, \mu_n\rangle = U_{B_c(v)} |\vec{k}_1, \mu_1, \dots, \vec{k}_n, \mu_n\rangle, \quad \sum_i \vec{k}_i = 0$

Si introduce quindi “a mano” una  $\delta^4(v - v')$

$$\langle v | P_I^\mu | v' \rangle = v_0 \delta^3(\vec{v} - \vec{v}') v^\mu f(\Delta m) \langle v | \mathcal{L}_I(0) | v' \rangle$$

Vi sarà un fattore di forma  $f(\Delta m)$  per ogni vertice.

Nella filosofia delle teorie effettive lo interpretiamo come un cutoff

$$f(\Delta m) = \frac{1}{m_N^3} \exp \left[ -\frac{(\Delta m)^2}{2\Lambda^2} \right]$$

Consideriamo l'interazione dominante tra nucleone e pione nel settore a 2 nucleoni

$$\mathcal{L}_{\pi N} = \frac{g_A}{2F_\pi} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \psi$$

La parte di interazione dell'operatore di massa ha elementi di matrice solo tra stati che differiscono nel numero di pioni di  $\pm 1$

Gli stati fisici sono combinazioni lineari degli stati di particelle libere soluzioni di

$$\begin{pmatrix} m_N(0) & & & & \\ & K & & & \\ & K & \sqrt{m_N(0)^2 + \vec{p}^2} + \sqrt{M_\pi^2 + \vec{p}^2} & & \\ & & D_2^\downarrow(0) & & \\ & & & \ddots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = m_N \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D_2 & K & 0 & & \\ K & D_3 & K & & \\ 0 & K & D_4 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \vdots \end{pmatrix} = \sqrt{s} \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

La soluzione formale

$$\left[ \sqrt{s} - D_2 - K \frac{1}{\sqrt{s} - D_3 - K \frac{1}{\sqrt{s} - D_4 - \dots} K} K \right] \phi_2 = 0$$

può essere sviluppata

$$(\sqrt{s} - D_2) - K \frac{1}{\sqrt{s} - D_3} K - K \left[ \frac{1}{\sqrt{s} - D_3} \right]^2 K \frac{1}{\sqrt{s} - D_4} K K \dots,$$

Se  $M_\pi, |\vec{p}| \ll \Lambda$  questa serie corrisponde a

$$O(p^{-2}) + O(p^0) + O(p^2) + \dots$$

Il troncamento dello spazio di Fock può essere giustificato nel quadro del conteggio chirale, esattamente come in HBChPT.

Dalla normalizzazione degli stati

$$\mathbf{1} = \int d_n \phi |\phi_n\rangle \langle \phi_n|, \quad d_n \phi \sim O(p^{2n-1})$$

Confrontiamo ad esempio

$$\langle 3 | \sqrt{s} - D_3 | 3' \rangle \quad \text{vs} \quad \langle 3 | K \frac{1}{\sqrt{s} - D_4} K | 3' \rangle$$

Siamo interessati a configurazioni cinematiche per cui  $\sqrt{s} - D_3 \sim O(p)$ , quindi

$$\langle 3 | \sqrt{s} - D_3 | 3' \rangle \sim O(p^{-4})$$

mentre

$$\langle 3 | K \frac{1}{\sqrt{s} - D_4} K | 3' \rangle \sim \int d_4 \phi \langle 3 | K | 4 \rangle \frac{1}{\sqrt{s} - D_4} \langle 4 | K | 3' \rangle \sim O(p^{-2}),$$

poiché

$$\langle 3 | K | 4 \rangle \sim O(p^{-4})$$

All'ordine più basso, detto  $\phi_2(\mathbf{k})_{\mu\mu',ii'} = \langle \mathbf{k}, \mu, i; -\mathbf{k}, \mu', i' | \phi_2 \rangle$ ,

$$2\omega_{\mathbf{k}}\phi_2(\mathbf{k})_{\mu\mu',ii'} + \int \omega_{\mathbf{q}} \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} V(\mathbf{k}, \mathbf{q})_{\mu\mu',ii'}^{\rho\rho',jj'} \phi_2(\mathbf{q})_{\rho\rho',jj'} = \sqrt{s}\phi_2(\mathbf{k})_{\mu\mu',ii'}$$

con

$$V(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = [B(\mathbf{k}, \mathbf{q}) + (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) A(\mathbf{k})] - (\mathbf{q} \leftrightarrow -\mathbf{q}, \rho \leftrightarrow \rho', j \leftrightarrow j')$$



$$B(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{g_A^2}{4F_\pi^2} \frac{(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^\pi)^3}{\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^\pi} \frac{f^*(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^\pi - \omega_{\mathbf{k}}) f(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^\pi - \omega_{\mathbf{q}})}{\sqrt{s} - \omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^\pi} \times$$

$$\times \bar{u}(\mathbf{k}) \gamma^\mu \gamma_5 u(\mathbf{q}) \bar{u}(-\mathbf{k}) \gamma^\nu \gamma_5 u(-\mathbf{q}) p_\mu^\pi p_\nu^\pi \vec{T}_{ij} \cdot \vec{T}_{i'j'}$$

$$A(\mathbf{k}) = \frac{3g_A^2}{4F_\pi^2} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^\pi)^3}{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^\pi} \omega_{\mathbf{k}}^2 \frac{|f(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^\pi - \omega_{\mathbf{k}})|^2}{\sqrt{s} - \omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^\pi} \times$$

$$\times \bar{u}(\mathbf{k}) \gamma^\mu \gamma_5 u(\mathbf{q}) \bar{u}(\mathbf{q}) \gamma^\nu \gamma_5 u(\mathbf{k}) p_\mu^\pi p_\nu^\pi$$

I diagrammi disconnessi rinormalizzano gli stati asintotici

Il limite non relativistico (Yukawa) è realizzato come  $m_N \rightarrow \infty$

Lo stesso diagramma produce, nel settore a un nucleone, la rinormalizzazione della massa del nucleone, che comincia a  $O(p^3)$

$$\begin{pmatrix} m_N(0) & K \\ K & D_2(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = m_N \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{3g_A^2}{4F_\pi^2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathbf{k}^2 \frac{(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}}^\pi)^3}{4\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}^\pi} \frac{[\omega_{\mathbf{k}}^\pi + \omega_{\mathbf{k}} + m_N(0)]^2}{\omega_{\mathbf{k}} + m_N(0)} \frac{|f(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}}^\pi - m_N(0))|^2}{m_N - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}}^\pi} = \frac{m_N - m_N(0)}{m_N(0)^3}$$

Se la teoria rispettasse il principio di decomposizione in cluster, queste due rinormalizzazioni dovrebbero essere compatibili, almeno al primo ordine dello sviluppo chirale

Per realizzare questa condizione dobbiamo scegliere

$$f^{(2)}(\Delta m) = \frac{1}{8} f^{(1)}(\Delta m) + \dots$$

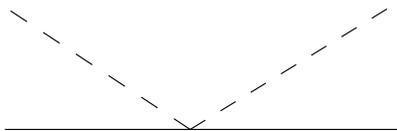
Questo è un primo vincolo che la teoria richiede per l'(altrimenti arbitrario) fattore di forma  $f(\Delta m)$ . Resta da vedere in che misura sia possibile rispettarlo ordine per ordine nello sviluppo chirale.

Abbiamo condotto uno studio dei sistemi  $\pi N$  e  $NN$  ai rispettivi ordini dominanti

I diagrammi in questione sono

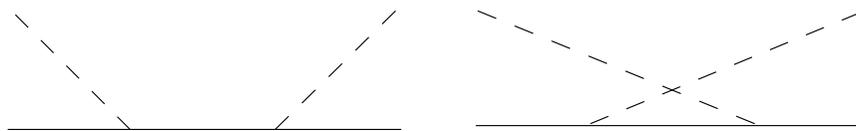
$\pi N$

Weinberg-Tomozawa



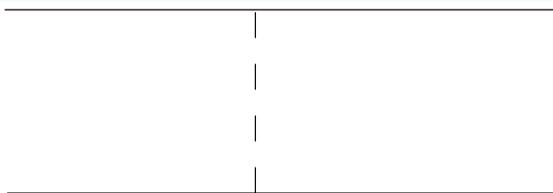
$$\mathcal{L}_{\pi N} = \frac{i}{8F_\pi^2} \bar{\psi} \gamma^\mu [\pi, \partial_\mu \pi] \psi$$

nucleon pole (direct + crossed)

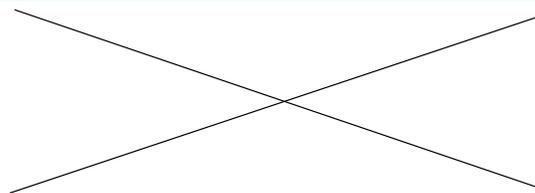


$$\mathcal{L}_{\pi N} = -\frac{g_A}{2F_\pi} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \pi \psi$$

$NN$



$$\mathcal{L}_{\pi N} = -\frac{g_A}{2F_\pi} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \pi \psi$$

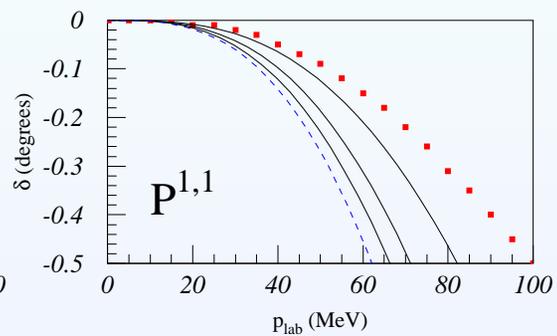
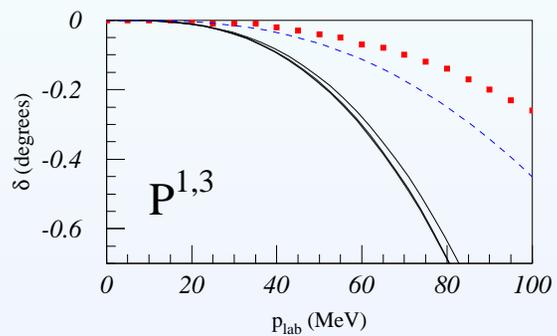
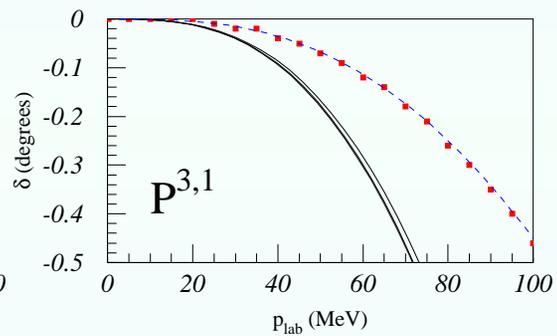
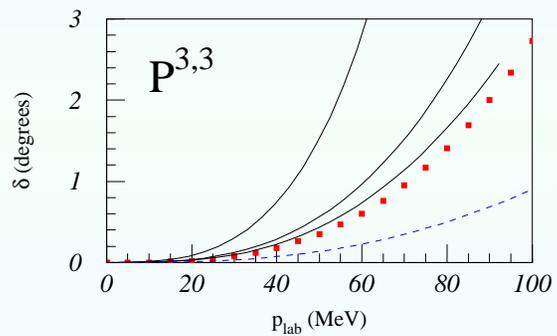
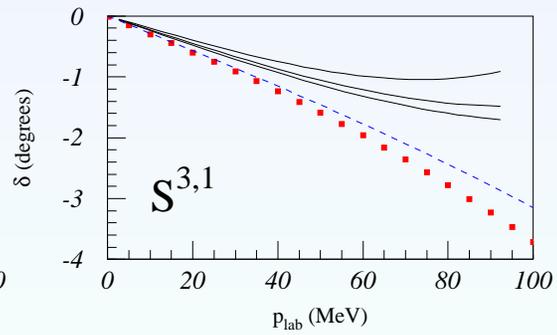
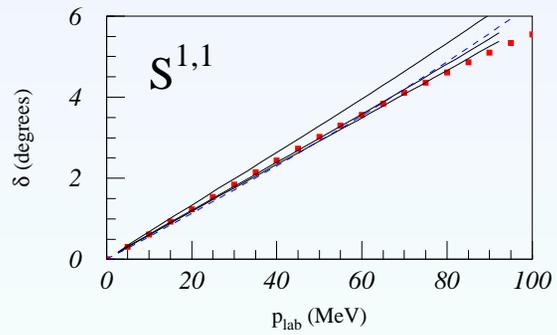


$$\mathcal{L}_{NN} = -\frac{1}{2} C_S \bar{\psi} \psi \bar{\psi} \psi - \frac{1}{2} C_T \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi$$

Fissiamo  $g_A$  dalle onde periferiche di  $NN$ ,  $C_S$  e  $C_T$  dalle onde  ${}^3S_1$  e  ${}^1S_0$ , WT dall'onda  $S$  ( $I = 3/2$ ), per diversi valori di  $\Lambda = 300 \text{ MeV} - 500 \text{ MeV}$

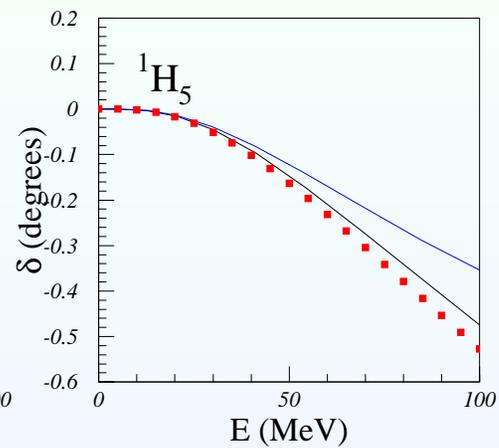
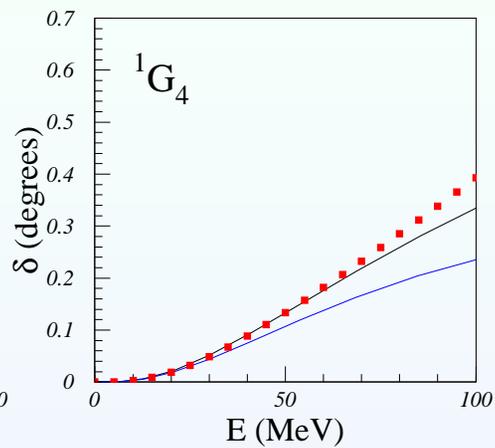
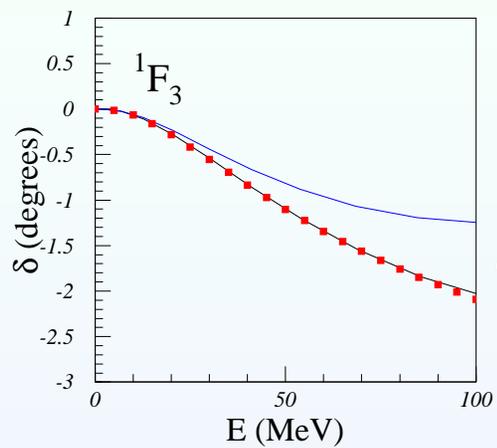
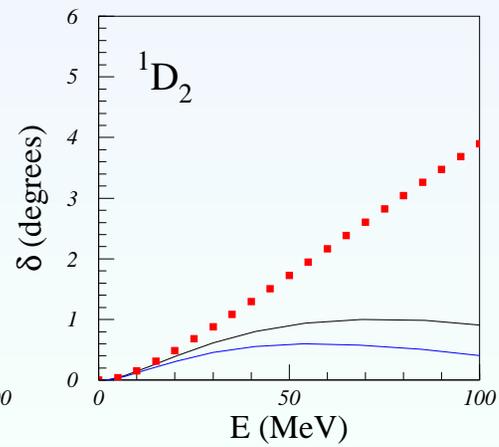
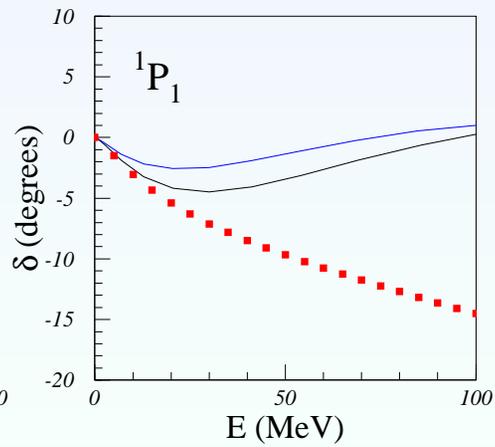
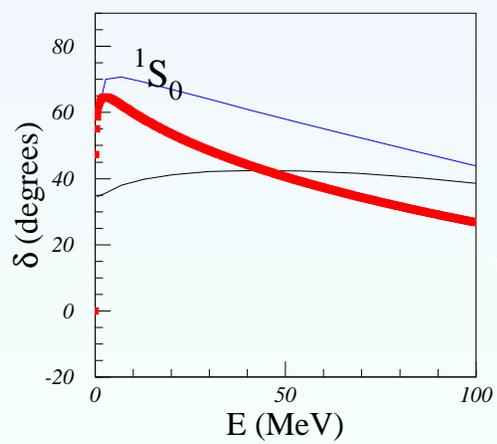
Studiamo la dipendenza dal cutoff  $\Lambda$  e confrontiamo con il limite non relativistico

$$T(\mathbf{q}, \mathbf{k}) = V(\mathbf{q}, \mathbf{k}) + \int \omega_{\mathbf{p}} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{V_{\sqrt{s}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) T(\mathbf{p}, \mathbf{k})}{\sqrt{s} - 2\omega_{\mathbf{p}} + i\epsilon},$$

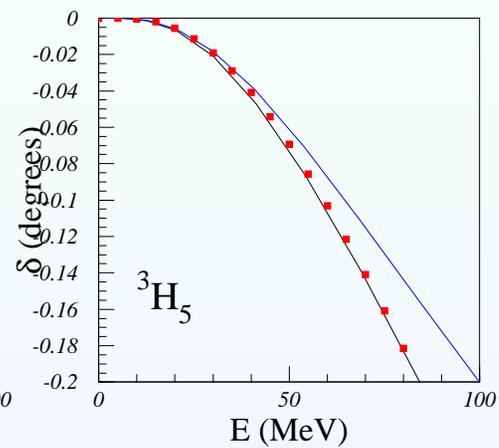
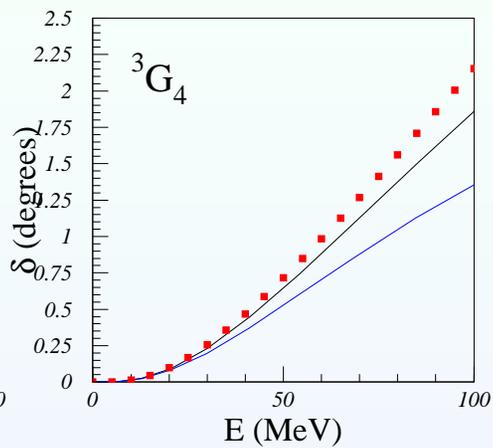
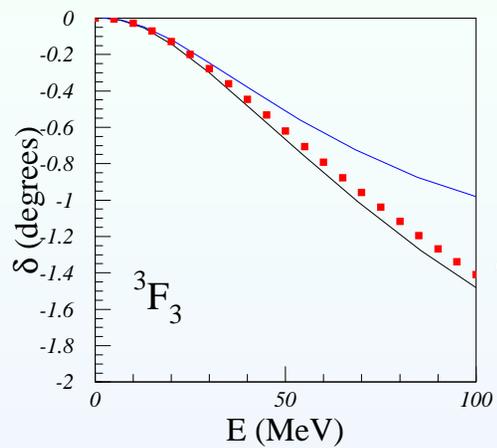
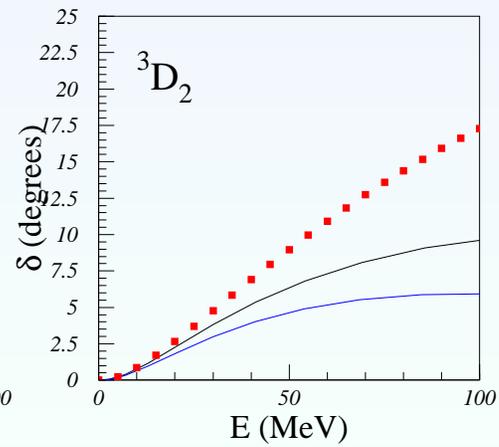
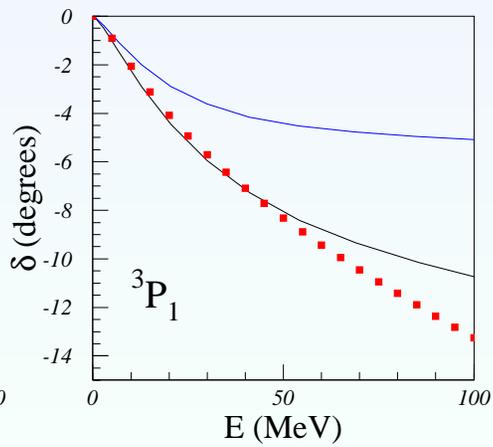
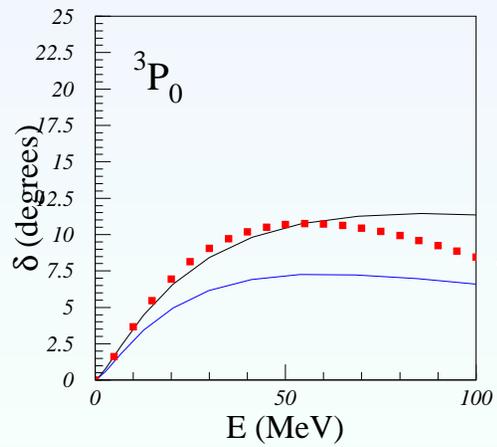


$\pi - N$

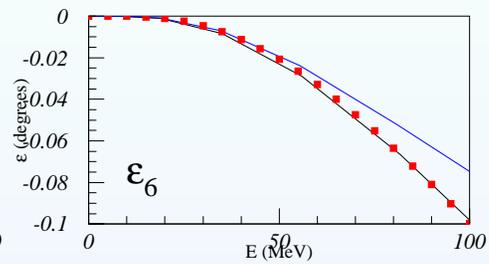
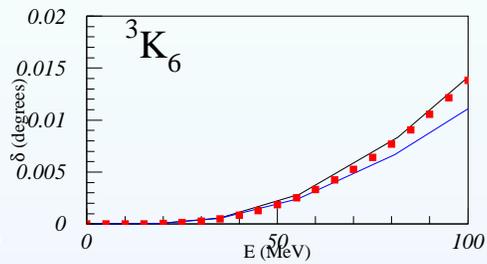
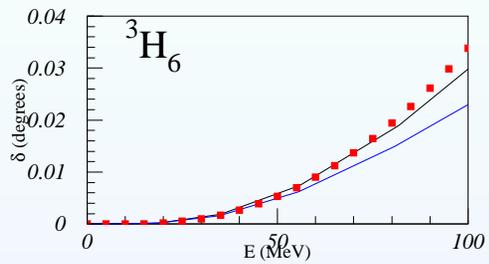
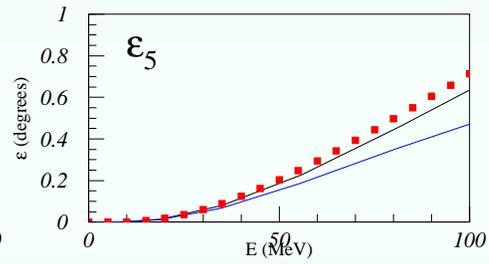
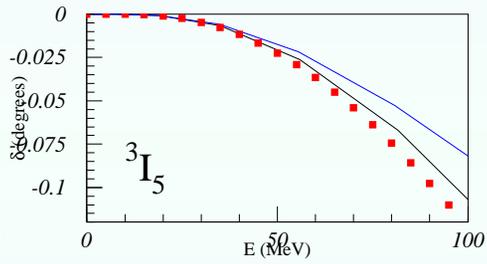
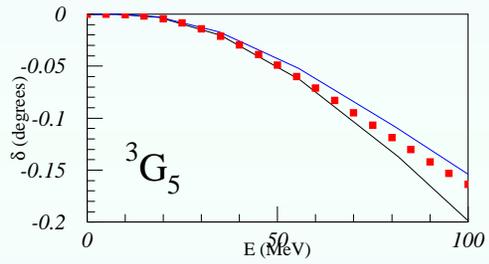
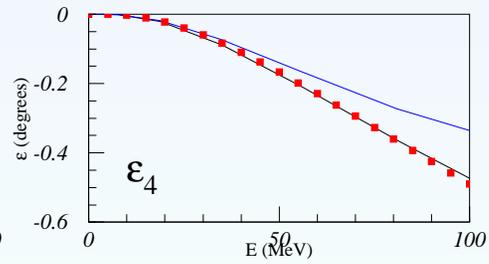
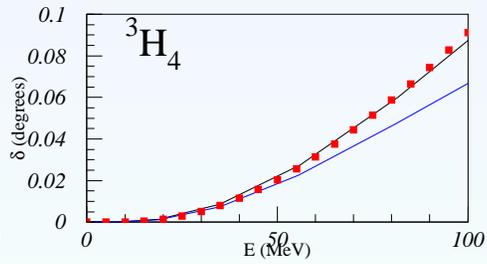
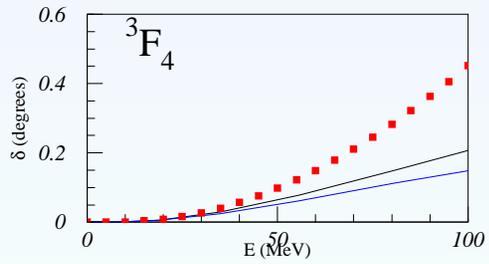
# $N - N$



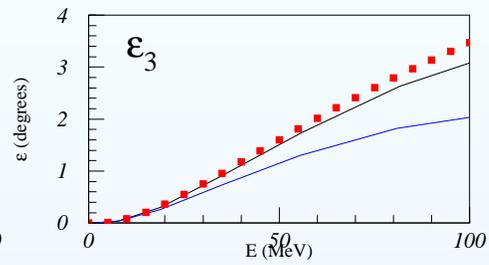
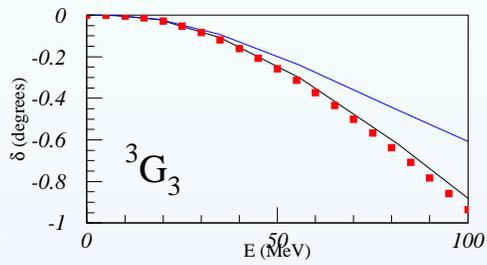
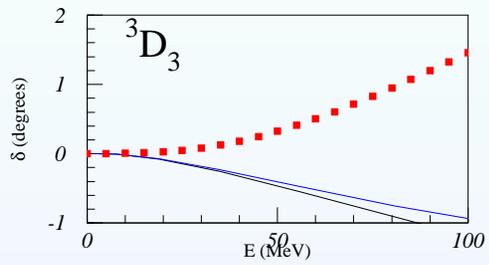
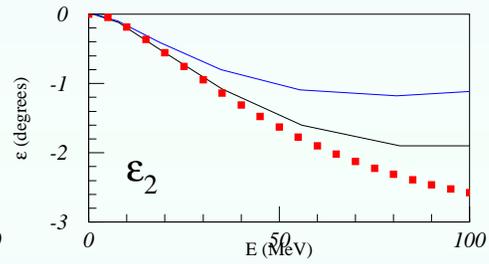
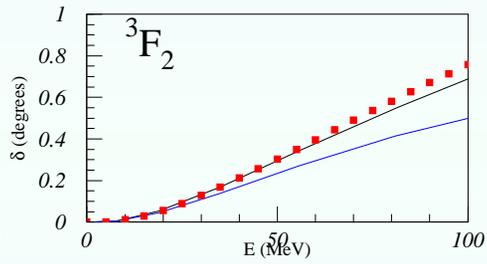
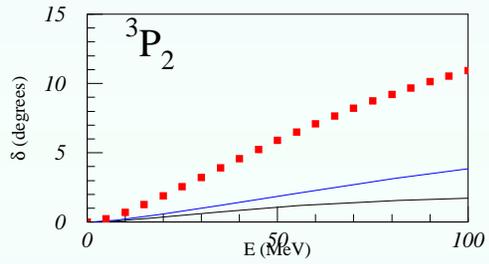
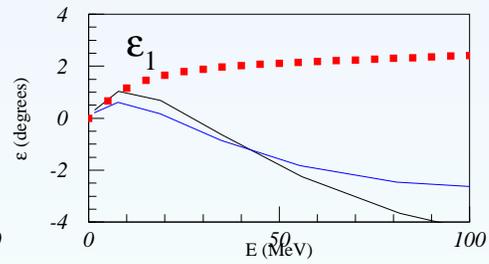
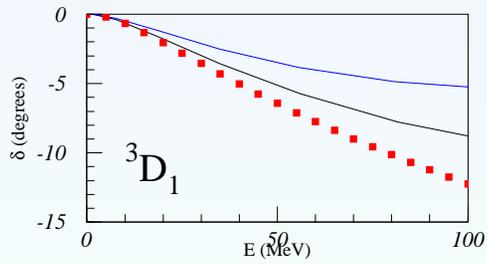
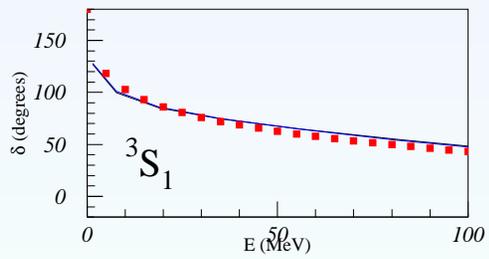
# $N - N$



# $N - N$



# $N - N$



## Bilancio:

- Abbiamo implementato la costruzione di Bakamjian-Thomas nella point form nel contesto della teoria chirale
- Troncamento dello spazio di Fock giustificato a bassa energia nel conteggio chirale
- Ruolo della decomposizione in cluster nel vincolare il fattore di forma arbitrario  $f(\Delta m)$
- Prospettive: ordini chirali più alti, produzione di pioni (canali inelastici),...