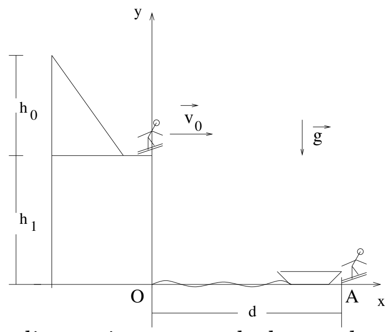
Compito di Fisica Generale 1 + Esercitazioni del 7 luglio 2017: testo e soluzioni



Problema 1: In una fredda mattina d'inverno, due detenuti evadono da un carcere situato in una regione montagnosa. Per superare un torrente impetuoso, nel quale si trova appostato anche un barcone della polizia, i due pensano di sfruttare una ripida discesa innevata e degli sci che avevano rubato in un vicino rifugio. Si possono fare le seguenti semplificazioni: (i) si approssimino gli evasi e gli sci come semplici masse puntiformi. (ii) La ripida discesa innevata può essere schematizzata con un piano inclinato liscio di altezza h_0 =2.20 m, che si raccorda con un breve tratto orizzontale, anch'esso liscio. Al termine del tratto orizzontale, il precipizio di altezza h_1, individua la sponda sinistra del fiume, che ha larghezza d =11.0 m. Il barcone della polizia è accostato alla sponda destra del torrente.

Il primo evaso tenta di superare il torrente semplicemente lanciandosi dalla sommità della discesa innevata ad altezza h_1, sfruttando la velocità acquisita nella discesa. Determinare:

1. il valore minimo di h_1 tale per cui l'evaso riesce a raggiungere la sponda destra senza essere catturato dalla polizia. (3,0)

   $h_{1,min}$ [m] = $\boxed{}$ A $\boxed{8.98}$ B $\boxed{11.0}$ C $\boxed{13.8}$ D $\boxed{2.43}$ E $\boxed{5.50}$

Tuttavia, essendo h_1 =3.20 m, il primo evaso cade nel fiume e viene catturato dalla polizia. Determinare:

2. la distanza dalla sponda destra (e NON sinistra) del fiume dove l'evaso cade in acqua. (3,0)

   $d_{sponda\ DX}$ [m] = $\boxed{}$ A $\boxed{12.9}$ B $\boxed{24.1}$ C $\boxed{3.43}$ D $\boxed{27.9}$ E $\boxed{5.69}$

Il secondo evaso intuisce di doversi dare una spinta verticale un attimo prima di staccarsi dal tratto orizzontale, con il risultato di acquisire anche una componente verticale v_1 della velocità e riuscire a saltare più lontano. Determinare:

3. la minima velocità $v_{1,min}$ necessaria per riuscire ad atterrare sulla sponda destra del torrente e sfuggire alla polizia. (3,0)

   $v_{1,min}$ [m/s] = $\boxed{}$ A $\boxed{6.30}$ B $\boxed{2.91}$ C $\boxed{10.7}$ D $\boxed{0.689}$ E $\boxed{3.15}$

Supponendo che v_1 =8.60 m/s, determinare:

4. la distanza dalla riva destra (e NON sinistra) del fiume dove l'evaso impatta il terreno; (4,0)

   $d_{impatto}$ [m] = $\boxed{}$ A $\boxed{2.59}$ B $\boxed{0.511}$ C $\boxed{0.648}$ D $\boxed{10.4}$ E $\boxed{1.32}$

5. la componente x e y della velocità dell'evaso nel momento in cui impatta sul terreno; (1,0) (2,0)

   v_x [m/s] = $\boxed{}$ A $\boxed{14.4}$ B $\boxed{-6.57}$ C $\boxed{1.31}$ D $\boxed{1.67}$ E $\boxed{6.57}$

   v_y [m/s] = $\boxed{}$ A $\boxed{11.7}$ B $\boxed{-11.7}$ C $\boxed{-6.57}$ D $\boxed{-14.7}$ E $\boxed{6.57}$

Soluzione del problema 1

1. Sia v_0 la velocità con cui l'evaso arriva alla fine della discesa. Questa si può trovare o imponendo la conservazione dell'energia meccanica (via più veloce), oppure risolvendo le equazioni del moto su un piano inclinato. Seguendo la prima via, abbiamo:

   $$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_0 \tag{1}$$

   e quindi

   $$v_0 = \sqrt{2gh_0} \tag{2}$$

   Con i valori numerici assegnati, $v_0 = 6.57$ m/s. A questo punto il primo evaso fa un moto parabolico, descritto da

   $$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \\ y(t) &= h_1 - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \tag{3}$$

   Il valore minimo richiesto è tale che per $x(\tilde{t}) = d$, $y(\tilde{t}) = 0$. Imponendo queste due condizioni si trova:

   $$\begin{aligned} \tilde{t} &= d/v_0 \\ h_1 &= \frac{1}{2}g(\frac{d}{v_0})^2 = \frac{d^2}{4h_0} \end{aligned} \tag{4}$$

   Con i valori numerici assegnati, $h_{1,min} = 13.8$ m.

2. Le equazioni del moto adesso sono ancora le stesse. Si trova $x(\hat{t})$, dove $\hat{t}$ è ora il tempo di caduta dall'altezza h_1, quindi:

$$\begin{aligned} 0 &= h_1 - \frac{1}{2}g\hat{t}^2 \Rightarrow \hat{t} = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \\ x(\hat{t}) &= v_0\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 2\sqrt{h_0h_1} \end{aligned} \tag{5}$$

La distanza richiesta vale $d - x(\hat{t}) = d - 2\sqrt{h_0h_1}$. Con i valori numerici si trova $d_{sponda\ DX} = 5.69$ m.

3. Adesso le equazioni del moto diventano:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0t \\ y(t) &= h_1 + v_1t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \tag{6}$$

La velocità minima richiesta è quella per cui $x(t) = d$ (il che avviene al tempo $\tilde{t} = d/v_\circ$ già calcolato nella risposta 1) e a quello stesso tempo $y(\tilde{t}) = 0$:

$$\begin{aligned} d &= v_0\tilde{t} \\ 0 &= h_1 + v_1\tilde{t} - \frac{1}{2}g\tilde{t}^2 \end{aligned} \tag{7}$$

e quindi

$$v_1 = \frac{1}{2}g\tilde{t} - \frac{h_1}{\tilde{t}} = \frac{gd}{2v_\circ} - \frac{h_1v_0}{d} = \sqrt{\frac{g}{2h_\circ}}\frac{d}{2} - \frac{h_1\sqrt{2h_0g}}{d} \tag{8}$$

Con i valori numerici del testo, si trova $v_1 = 6.30$ m/s.

4. La distanza richiesta è data da $x(t_{imp}) - d$, dove $x(t_{imp})$ è la posizione sull'asse x al momento dell'impatto. Perciò dalla condizione

$$0 = h_1 + v_1t_{imp} - \frac{1}{2}gt_{imp}^2 \tag{9}$$

si ricava che

$$t_{imp} = \frac{v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + 2h_1g}}{g} \tag{10}$$

e la soluzione fisica è quella col segno $+$. Quindi

$$d_{impatto} = v_\circ t_{imp} - d = \sqrt{\frac{2h_\circ}{g}}[v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2h_1g}] - d \tag{11}$$

Con i valori numerici del testo si trova $d_{impatto} = 2.59$ m.

5. Le componenti della velocità al momento dell'impatto sono:

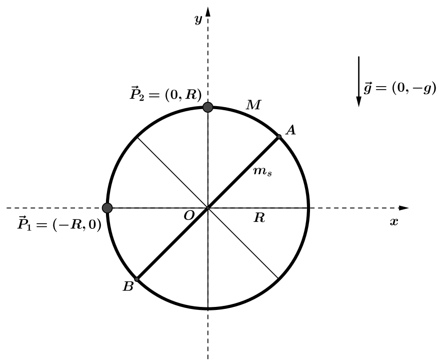
$$\begin{aligned} v_x(t_{imp}) &= v_0 \\ v_y(t_{imp}) &= v_1 - gt_{imp} \end{aligned} \tag{12}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} v_x &= \sqrt{2h_\circ g} \\ v_y &= -\sqrt{v_1^2 + 2gh_1} \end{aligned} \tag{13}$$

Con i valori numerici del testo, si trova $v_x = 6.57$ m/s e $v_y = -11.7$ m/s.

Problema 2: È dato un anello di massa $M = 8.4\,\mathrm{kg}$ e raggio $R = 0.62\,\mathrm{m}$ posto nel piano verticale x, y e dotato di raggi realizzati con 4 sbarrette, ciascuna di massa $m_s = 2.20\,\mathrm{kg}$, i cui estremi sono fissati all'anello (vedi la sbarretta AB in figura). Anello e sbarre hanno densità di massa uniforme e si possono considerare di spessore trascurabile. Le sbarre sono fissate in O in modo che insieme all'anello formano una ruota che può girare attorno ad Onel piano x, y. Nel punto $\vec{P}_1$ la ruota ha un meccanismo (la cui massa è trascurabile) che permette di agganciare istantaneamente (mantenendola poi agganciata) una massa puntiforme m che vi arrivi con velocità non nulla $\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y})$. Al tempo iniziale $t_\circ = 0$ la massa m ha velocità $\vec{v}(0) = (v_\circ, 0)$ con $v_\circ > 0$. Non ci sono attriti.



1. In quale quadrante dovete mettere la massa m al tempo $t_\circ = 0$ affinché, grazie alla sola accelerazione locale di gravità $\vec{g}$, essa arrivi nel punto $\vec{P}_1$ in modo da mettere in rotazione la ruota? Motivate la risposta nel foglio protocollo e disegnate sulla figura del compito la massa m in un punto permesso con la sua velocità iniziale. (1,0)

2. Avendo scelto la posizione iniziale $\vec{P}(0) = (x_\circ, y_\circ)$ di m, e sapendo che $\vec{v}(0) = (v_\circ, 0)$ con $v_\circ > 0$, scrivete le equazioni del moto di m e calcolate la sua velocità $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ e posizione $(x(t), y(t))$ ad un generico tempo $t > 0$. (2,0)

3. Imponete che al tempo $t_1 > 0$ la massa m arrivi esattamente in $\vec{P}_1 = (-R, 0)$, calcolate il tempo t_1 e scrivete l'equazione che deve legare $x_\circ$ ad $y_\circ$ e $v_\circ$ affinché questo accada. Prendendo $|y_\circ| = 1.2\,\mathrm{m}$ e $v_\circ = 2.5\,\mathrm{ms}^{-1}$, calcolate il valore di $|x_\circ|$. (2,0)

   $|x_\circ|$ [m] = ☐ A $\boxed{1.37}$ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

4. Calcolate le componenti x ed y della velocità con cui la massa m arriva in P_1. (1,0) (1,0)

   $\dot{x}(t_1)$ [m/s] = ☐ A $\boxed{2.5}$ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

   $\dot{y}(t_1)$ [m/s] = ☐ A $\boxed{-4.85}$ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

5. Calcolate la velocità angolare ω_1 con cui la ruota inizia a girare subito dopo l'aggancio della massa m. Dite in che verso gira la ruota e come è diretto il vettore $\vec{\omega}_1$. (4,0)

   ω_1 [rad/s] = ☐ A $\boxed{4.14}$ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

6. Ricordando che non ci sono forme di attrito, dite quale condizione dovete soddisfare nello scegliere le condizioni iniziali affinché con la velocità angolare $\vec{\omega}_1$ acquistata all'aggancio la ruota giri fino a portare la massa agganciata nella posizione $\vec{P}_2 = (0, R)$ (vedi figura). In particolare dite se ciò potrebbe accadere con un valore $y_\circ = R$ (Si o NO, con motivazione sul foglio protocollo) (5,0)

Soluzione Problema 2

1. Al tempo iniziale la massa m deve avere $y_\circ > 0$ perché deve cadere su $\vec{P}_1$ (quindi deve partire da una altezza maggiore) e $x_\circ < -R$ perché la sua velocità lungo x, che si conserva non essendoci forze, deve avvicinarla a $\vec{P}_1$, che si trova ad una ascissa $-R$.

2. Le equazioni del moto sono:

   $\ddot{x}(t) = 0$, $\ddot{y}(t) = -g$

   con condizioni iniziali:

   $x(0) = x_\circ < -R \quad y(0) = y_\circ > 0; \quad \dot{x}(0) = v_0 > 0 \;\; \dot{y}(0) = 0$

Integrando:

$\dot{x}(t) = v_\circ$
$\dot{y}(t) = -gt$
$x(t) = x_\circ + v_\circ t$
$y(t) = y_\circ - \frac{1}{2}gt^2$

3. $x(t_1) = x_\circ + v_\circ t_1 = -R \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{-x_\circ - R}{v_\circ} > 0 \quad (|x_\circ| > R)$
   $y(t_1) = y_\circ - \frac{1}{2}gt_1^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2y_\circ}{g}} > 0 \quad (y_\circ > 0)$

   $|x_\circ| = R + v_\circ\sqrt{\frac{2y_\circ}{g}}$ valore numerico $|x_\circ| = 1.37\,\mathrm{m}$

4. $\dot{x}(t_1) = v_\circ$ valore numerico $2.5\,\mathrm{m/s}$
   $\dot{y}(t_1) = -\sqrt{2gy_\circ}$ valore numerico $-4.85\,\mathrm{m/s}$

5. Il momento angolare attorno al punto O che la massa m ha all'istante t_1 in cui arriva in P_1 con velocità $\dot{y}(t_1) = -\sqrt{2gy_\circ}$ si trasferisce tutto al sistema ruota (con raggi) più la massa stessa una volta agganciata. La ruota gira in senso antiorario. Il vettore $\vec{\omega}_1$ è perpendicolare al piano x, y di verso uscente.
   $I_{tot} = I_{ruota+massa} = I_{anello} + 4I_{sbarretta} + I_{massa} = MR^2 + 4\frac{m_s R^2}{3} + mR^2 = (M + \frac{4}{3}m_s + m)R^2$
   $m\sqrt{2gy_\circ}R = I_{tot}\omega_1$
   $\omega_1 = \frac{mR\sqrt{2gy_\circ}}{I_{tot}} = \frac{m\sqrt{2gy_\circ}}{(M+\frac{4}{3}m_s+m)R}$ $4.14\,\mathrm{rad/s}$
   Si noti che l'aggancio della massa m nel punto $\vec{P}_1$ fa cambiare la posizione del centro di massa della ruota. Tuttavia il testo ci dice che essa gira nel piano verticale x, y intorno al suo centro di simmetria O, quindi ai fini del problema questo fatto non è rilevante.

6. Usiamo la conservazione dell'energia tra la posizione $\vec{P}_1$ appena verificatosi l'aggancio della massa m, e la posizione $\vec{P}_2$. In $\vec{P}_1$ c'è solo l'energia cinetica di rotazione della ruota (con i suoi raggi) più la massa m alla velocità angolare ω_1 appena calcolata. L'energia potenziale gravitazionale della ruota è sempre nulla (per simmetria tra sopra e sotto il livello di zero, che per ovvie ragioni scegliamo essere quello dell'asse orizzontale x). Quella di m in $\vec{P}_1$ è nulla perché è allo zero. In $\vec{P}_2$ c'è l'energia cinetica di rotazione con velocità angolare ω_2 (che al minimo sarà nulla) e l'energia potenziale di m ad altezza R:
   $E_1 = \frac{1}{2}I_{tot}\omega_1^2$
   $E_2 = \frac{1}{2}I_{tot}\omega_2^2 + mgR$
   quindi:
   $\frac{1}{2}I_{tot}\omega_2^2 = \frac{1}{1}I_{tot}\omega_1^2 - mgR \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1^2 \geqslant \frac{mgR}{\frac{1}{2}I_{tot}}$
   Usando ω_1 calcolata al punto 5, risulta che l'altezza $y_\circ$ di rilascio della massa m deve essere:
   $y_\circ \geqslant \frac{I_{tot}}{mR} = \frac{M+\frac{4}{3}m_s+m}{m}R > R$

   Come si vede, $y_\circ > R$, quindi la riposta è: NO, un valore iniziale $y_\circ = R$ non permetterebbe mai al sistema ruota più massa m di ruotare fino a portare m in posizione $\vec{P}_2$.

   Si vece anche che il valore minimo dell'altezza di rilascio per il quale $\omega_2 = 0$, cioè la massa m agganciata alla ruota arriva in $\vec{P}_2$ da ferma, è:
   $y_{\circ-min} = \frac{I_{tot}}{mR}$ valore numerico $1.17\,\mathrm{m}$

Nota: Quello che conta è solo l'altezza di caduta della massa m. Se essa non si trova allineata col punto $\vec{P}_1$ ma più indietro bisogna darle una velocità orizzontale $v_\circ$ opportuna in modo che possa coprire la distanza che la separa da $\vec{P}_1$ nello stesso tempo che impiega a cadere dall'altezza scelta. Altro concetto importante è che la ruota ha energia potenziale gravitazionale nulla per simmetria (infatti se la lascio non succede nulla...) ma una volta agganciata la massa m, questa ha una energia potenziale gravitazionale che dipende dalla sua altezza dal livello zero (quello del centro di massa della ruota è la scelta ovvia, sempre per simmetria).