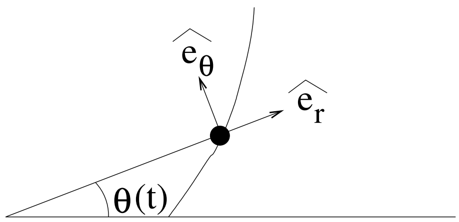
Compito di Fisica Generale 1 + Esercitazioni del 14/09/2017: testo e soluzioni

Problema 1: Si consideri il sistema in figura. Un punto materiale si muove su un piano orizzontale, facendo una traiettoria descritta in coordinate polari dall'equazione



$$r(t) = r_0 e^{\theta(t)} ,$$

dove r_0 è una costante pari a r_0 =1.00 m. La traiettoria viene percorsa con velocità angolare costante pari a $\dot{\theta}= \omega_0$ =0.660 rad/s. All'istante iniziale $\theta(t=0)=0$. All'istante t =3.50 s, determinare:

1. le componenti lungo $\hat{e}_r$ e lungo $\hat{e}_\theta$ (vd. figura) della velocità. (2,0)(2,0)

   v_r [m/s] = $\boxed{}$ A $\boxed{6.65}$ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

   v_θ [m/s] = $\boxed{}$ A $\boxed{6.65}$ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

2. il modulo dell'accelerazione del corpo, e scrivere nel riquadro anche la direzione e il verso; (4,0)

   a [m/s^2] = $\boxed{}$ A $\boxed{8.78}$ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

3. le componenti lungo $\hat{\vec{e}}_r$ e lungo $\hat{\vec{e}}_\theta$ (vd. figura) del versore tangente alla traiettoria, (3,0)(3,0)

   T_r = $\boxed{}$ A $\boxed{0.707}$ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

   T_θ = $\boxed{}$ A $\boxed{0.707}$ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

4. il raggio del cerchio osculatore. (2,0)

   R [m] = $\boxed{}$ A $\boxed{14.2}$ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

Soluzione del problema 1

Dai dati del problema si può scrivere

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \omega_0 t \\ r(t) &= r_0 \exp(\theta(t)) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega_0 \\ \dot{r} &= r_0 \dot{\theta} \exp(\theta(t)) = r_0 \omega_0 \exp(\omega_0 t) \\ \ddot{\theta} &= 0 \\ \ddot{r} &= r_0 \ddot{\theta} \exp(\theta(t)) + r_0 \dot{\theta}^2 \exp(\theta(t)) = r_0 \omega_0^2 \exp(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Sostituiamo nella formula della velocità e dell'accelerazione in coordinate polari,

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta \ . \end{aligned}$$

Quindi:

1. $v_r = r_0 \omega_0 \exp(\omega_0 t) = v_\theta$
2. $a_r = r_0 \omega_0^2 \exp(\omega_0 t) - r_0 \omega_0^2 \exp(\omega_0 t) = 0$ e $a_\theta = 2 r_0 \omega_0^2 \exp(\omega_0 t)$. Perciò il modulo di $\vec{a}$ è proprio $2 r_0 \omega_0^2 \exp(\omega_0 t)$.
3. Troviamo prima di tutto il modulo di $\vec{v}$ che vale

   $$|\vec{v}| = \sqrt{2} r_0 \omega_0 \exp(\omega_0 t) \tag{1}$$

   Poiché il versore tangente è dato da $\hat{T} = \vec{v}/|\vec{v}|$, si ottiene

   $$T_r = 1/\sqrt{2}$$
   $$T_\theta = 1/\sqrt{2}$$

4. Troviamo prima di tutto il versore $\hat{N}$ normale a $\hat{T}$ nel piano della traiettoria. È immediato verificare che

$$\hat{N} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_r + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_\theta \tag{2}$$

Poiché l'accelerazione usando i versori $\hat{T}$ e $\hat{N}$ è data da

$$\vec{a} = \dot{v}\hat{T} + \frac{v^2}{R}\hat{N} \ , \tag{3}$$

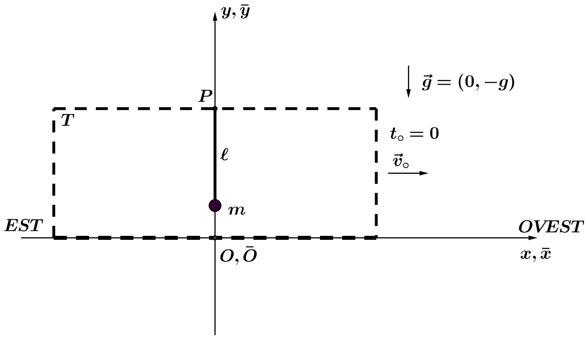
con R il raggio del cerchio osculatore, inserendo quanto trovato nei punti precedenti si ha

$$2r_0\omega_0^2 \exp(\omega_0 t)\hat{e}_\theta = \sqrt{2}r_0\omega_0^2 \exp(\omega_0 t)\left(\frac{\hat{e}_r}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{e}_\theta}{\sqrt{2}}\right) + \frac{2r_0^2\omega_0^2 \exp(\omega_0 t)}{R}\left(-\frac{\hat{e}_r}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{e}_\theta}{\sqrt{2}}\right) \tag{4}$$

da cui si ottiene che

$$R = \sqrt{2}r_0 \exp(\omega_0 t) \tag{5}$$

Problema 2: Un pendolo semplice costituito da una massa puntiforme m =12. g e da un filo di lunghezza ℓ =80 cm è appeso al soffitto di un treno T in presenza della accelerazione di gravità $\vec{g} = (0, -g)$, $g = 9.81$ m s^{-2}. Dapprima il treno è fermo e il sistema di riferimento $\bar{O}\bar{x}\bar{y}$ solidale con esso coincide con il riferimento fisso Oxy, che assumiamo inerziale. Sul treno con l'osservatore $\bar{O}$ c'è lo studente $\bar{S}$, e sono disponibili una bussola, un orologio e un metro. A partire dal tempo $t_\circ = 0$ il treno si muove con velocità costante $\vec{v}_\circ = (v_\circ, 0)$, $v_\circ$ =55 km/h rispetto al riferimento inerziale lungo la retta Est-Ovest da Est verso Ovest (vd. figura).



1. Come fanno $\bar{O}$ ed $\bar{S}$ a sapere che il treno su cui si trovano si muove da Est verso Ovest e a misurare la velocità con cui si muove? Motivate la risposta nei vostri fogli e riassumetela poi nel riquadro qui sotto. Nota: non è propedeutica alle domande successive (3,0)

2. Per $t \geq t_\circ$ il treno si muove a velocità costante $\vec{v}_\circ$ e il pendolo sul treno è in equilibrio. Scrivete la legge oraria che gli osservatori sul treno e l'osservatore fisso O scrivono per descrivere il moto della massa m lungo l'asse orizzontale del proprio riferimento, rispettivamente $\bar{x}(t)$ e $x(t)$. (1,0)(1,0)

   $\bar{x}(t)$ [m] =

   $x(t)$ [m] =

3. Al tempo $t_1 > t_\circ = 0$, il treno comincia ad accelerare in modo uniforme verso Ovest fino al tempo $t_2 > t_1$ quando raggiunge la velocità v_2 =80 km/h. $\bar{O}$ ed $\bar{S}$ osservano che mentre il treno accelera il pendolo si mantiene ad un angolo θ_2 =30° dalla verticale geometrica. Scrivete la formula per l'accelerazione a con cui si è mosso il treno, e l'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ in funzione SOLO di grandezze date nel testo. (3,0)(2,0)

   a [m/s^2] = A $\boxed{5.66}$ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

   Δt [s] = A $\boxed{1.23}$ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

4. Immaginando di essere dentro il treno ad un tempo $t_1 < t < t_2$ disegnate nella figura di questo foglio la posizione di equilibrio del pendolo. (2,0)

5. Ad un tempo $t_3 > t_2$, mentre il treno si muove a velocità costante, lo studente riporta il pendolo all'angolo ϑ_2 in cui si trovava mentre il treno veniva accelerato, e lo rilascia con una velocità $\vec{v}_3$ rispetto al treno tangente alla traiettoria del pendolo e diretta verso la posizione di equilibrio, tale da fornirgli una energia cinetica E_{cin} =0.02 J. Scrivete la formula per il coseno dell'angolo ϑ_3 dalla verticale quando il pendolo sarà fermo rispetto al treno, calcolate il valore numerico di ϑ_3 in gradi e disegnatelo nella figura di questo foglio. Non ci sono attriti. (2,0)(2,0)

$\cos\vartheta_3 =$ $\boxed{}$

ϑ_3 [deg] $=$ $\boxed{}$ A $\boxed{49.18}$ B $\square$ C $\square$ D $\square$ E $\square$

Soluzione del problema 2

1. Per capire che il treno si muove basta guardare fuori dal finestrino. Siccome è impossibile che gli alberi si muovano, deve essere il treno a muoversi con velocità uguale ed opposta. Per sapere che il treno si sta muovendo verso Ovest, di giorno si guarda il Sole e di notte si guardano le stelle (se non ci sono nuvole e assumendo di sapere dove sta il Nord). Oppure si usa la bussola. Per misurarne il modulo della velocità $\bar{O}$ ed $\bar{S}$ sincronizzano gli orologi e si posizionano di fronte a due finestrini di cui misurano la distanza relativa. Fanno partire insieme il cronometro dopo aver concordato che al prossimo albero ciascuno fermerà il cronometro quando lo vede passare dal proprio finestrino. Facendo la differenza tra i tempi segnati e dividendo la distanza tra gli osservatori ai due finestrini per questa differenza ottengono il modulo della la velocità del treno. Osservare il moto del pendolo non serve neppure a capire che il treno si sta muovendo, e non sta fermo, perché tutti i riferimenti inerziali (in moto rettilineo uniforme) si equivalgono. Tantomeno serve a trovare la velocità con cui si muove il treno. Il testo dice che per $t \geq t_\circ = 0$ il treno si muove con velocità costante, e la figura mostra che a $t = t_\circ = 0$ il pendolo è in equilibrio, quindi continuerà a restare in equilibrio.

2. $\bar{x}(t) = 0$ perché sul treno il pendolo è fermo nella posizione iniziale, con coordinata $\bar{x}$ nulla
   $x(t) = 0 + v_\circ t = v_\circ t$ perché il treno si muove lungo l'asse x con velocità $v_\circ$ e i due riferimenti inizialmente coincidevano

3. $a = \frac{v_2 - v_\circ}{\Delta t}$ accelerazione uniforme, diretta verso Ovest, con cui si muove il treno per $t_1 \leq t \leq t_2$
   Mentre il treno accelera il riferimento è non inerziale e la massa m risente di una accelerazione uguale ed opposta a quella del treno, quindi $(-a, 0)$, e perciò in totale $\vec{a}_{massapendolo} = (-a, 0) + (0, -g) = (-a, -g)$. All'equilibrio la massa del pendolo si allinea lungo la direzione di questa accelerazione totale, spostata di un angolo ϑ_2 dalla verticale geometrica (verso Est, perchè l'accelerazione inerziale è negativa) con:
   $\tan\vartheta_2 = \frac{a}{g}$
   $\Downarrow$
   $a = g\tan\vartheta_2$
   $\Delta t = \frac{v_2 - v_\circ}{g\tan\vartheta_2}$

4. Basta aver capito che quando il treno accelera in avanti il pendolo resta indietro, come succede ai passeggeri di un autobus quando l'autista accelera. Poiché l'accelerazione del treno nell'intervallo di tempo considerato è costante, l'angolo di cui il pendolo resta indietro è anch'esso costante.

5. $E_{cin} + mg\ell(1 - \cos\vartheta_2) = mg\ell(1 - \cos\vartheta_3)$
   $E_{cin} - mg\ell\cos\vartheta_2 = -mg\ell\cos\vartheta_3$
   $\Downarrow$
   $\cos\vartheta_3 = \cos\vartheta_2 - \frac{E_{cin}}{mg\ell}$
   risulta $\cos\vartheta_3 > 0$ e quindi deve essere per forza $\vartheta_3 > 0$ (in senso antiorario dalla verticale).