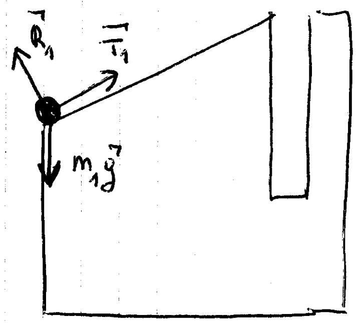
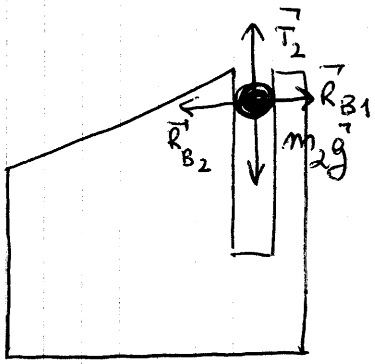
Compitino Fis a1 b 20/12/05

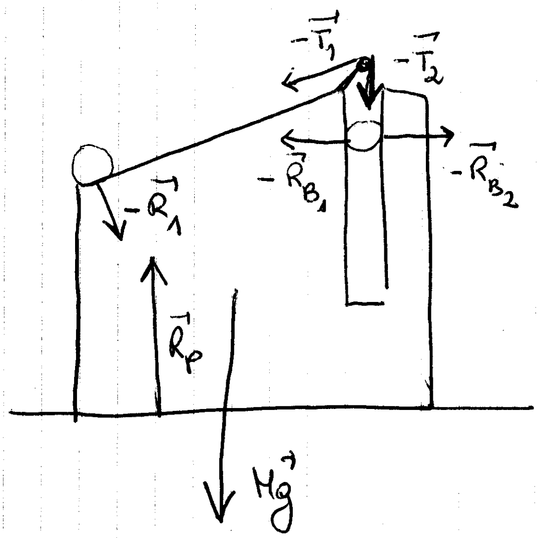
Esercizio n° 1



$$m_1 \vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{R}_1$$

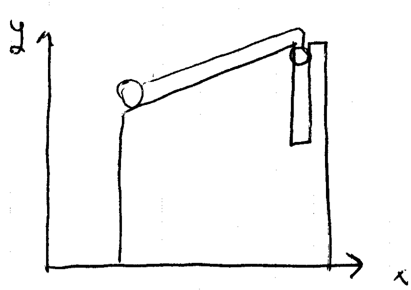


$$m_2 \vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{R}_{B_1} + \vec{R}_{B_2}$$



$$M \vec{a}_M = M\vec{g} + \vec{R}_p - \vec{R}_1 - \vec{R}_{B_1} - \vec{R}_{B_2} - \vec{T}_1 - \vec{T}$$

Scelgo



$\Rightarrow$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = T\cos\alpha - R_1 \sin\alpha & (1) \\ m_1 \ddot{y}_1 = -m_1 g + T\sin\alpha + R_1\cos\alpha & (2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = R_{B_1} - R_{B_2} & (3) \\ m_2 \ddot{y}_2 = -m_2 g + T & (4) \\ M \ddot{x}_M = R_1 \sin\alpha - R_{B_1} + R_{B_2} - T\cos\alpha & (5) \\ M \ddot{y}_M = -Mg + R_p - R_1\cos\alpha - T\sin\alpha - T & (6) \end{cases}$$

1) m_1 e m_2 t.c. tutto stia fermo $\Rightarrow$ $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 = \ddot{x}_M = \ddot{y}_M = 0$

$\Rightarrow$ dalla (1), dalla (2), dalla (4)

$$\begin{cases} T\cos\alpha = R_1 \sin\alpha \\ T\sin\alpha + R_1 \cos\alpha = m_1 g \\ T = m_2 g \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $m_2 g \cos\alpha = R_1 \sin\alpha$ $\Rightarrow$ $R_1 = m_2 g \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$m_2 g \sin\alpha + R_1 \cos\alpha = m_1 g$

$$m_2 \cancel{g} \sin\alpha + m_2 \cancel{g} \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = m_1 \cancel{g}$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \sin\alpha = \frac{1}{2}.$$

2) Voglio che $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{x}_M \equiv a$; $\ddot{y}_1 = \ddot{y}_2 = \ddot{y}_M = 0$

Riscrivo l'eq. (5) come

$$M\ddot{x}_M = F + R_1 \sin\alpha - R_{B_1} + R_{B_2} - T\cos\alpha \qquad (5a)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} T\cos\alpha - R_1\sin\alpha = m_1 a & (1b) \\ T\sin\alpha + R_1\cos\alpha = m_1 g & (2b) \\ R_{B_1} - R_{B_2} = m_2 a & (3b) \\ T = m_2 g & (4b) \\ Ma = R_1\sin\alpha - R_{B_1} + R_{B_2} - T\cos\alpha + F & (5b) \\ R_p = Mg + R_1\cos\alpha + T + T\sin\alpha & (6b) \end{cases}$$

Sommando (1b) ... (5b)

$$F = (m_1 + m_2 + M)\,a$$

↑ si poteva dedurre pure ragionando sul c.d.m. del sistema

Inserisco (4b) in (1b) e (2b)

$$m_2 g\cos\alpha - R_1\sin\alpha = m_1 a$$
$$m_2 g\sin\alpha + R_1\cos\alpha = m_1 g \implies R_1 \cancel{\cos\alpha} = \frac{m_1 g - m_2 g\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

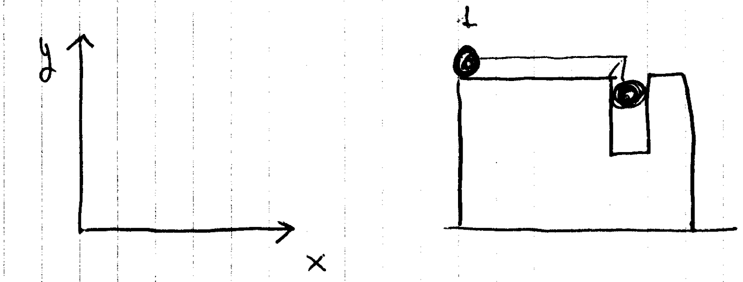
$$\implies m_2 g\cos\alpha - \frac{m_1 g - m_2 g\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin\alpha = m_1 a$$

$$m_1 a = \frac{m_2 g\cos^2\alpha - m_1 g\sin\alpha + m_2 g\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= (m_2 - m_1\sin\alpha)\frac{g}{\cos\alpha}$$

$$\implies F = \frac{(m_1+m_2+M)(m_2 - m_1\sin\alpha)}{m_1\cos\alpha}\,g = 147\ \mathrm{N}$$

3)



La somma dei lavori delle forze non conservative è nullo $\Rightarrow$ si conserva l'energia mecc. tot. del sistema:

$$m_2 g h_i = m_2 g h_f + \frac{1}{2} M \dot{x}_M^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \underset{\overset{\parallel}{0}}{\dot{y}_1^2}) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$m_2 g \Delta h = \frac{1}{2} M \dot{x}_M^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 \qquad (7)$$

Inoltre so che:

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_M$$
$$\dot{x}_1 = \dot{x}_1' + \dot{x}_M$$
$$\dot{x}_1' = -\dot{y}_2 \leftarrow \text{filo inestensibile}$$
$$m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 + M \dot{x}_M = 0 \longleftarrow \nexists \text{ forze esterne } \parallel a\ \hat{x}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_1 = -\frac{(m_2 + M)}{m_1} \dot{x}_M$$

$$\dot{y}_2 = \dot{x}_1' = \dot{x}_1 - \dot{x}_M = -\frac{m_2 + M}{m_1} \dot{x}_M - \dot{x}_M = -\frac{m_1 + m_2 + M}{m_1} \dot{x}_M$$

Sostituendo in (7)

$$m_2 g \Delta h = \frac{1}{2} M \dot{x}_M^2 + \frac{1}{2} \cancel{m_1} \frac{(m_2 + M)^2}{m_1^{\cancel{2}}} \dot{x}_M^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_M^2$$
$$+ \frac{1}{2} m_2 \frac{(m_1 + m_2 + M)^2}{m_1^2} \dot{x}_M^2$$
$$= \frac{1}{2} \dot{x}_M^2 \left(M + \frac{(m_2 + M)^2}{m_1} + m_2 + \frac{m_2}{m_1^2} (m_1 + m_2 + M)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\dot{x}_M^2 \left[\frac{M+m_2}{m_1}(m_1+m_2+M) + \frac{m_2}{m_1^2}(m_1+m_2+M)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\dot{x}_M^2 \frac{(m_1+m_2+M)}{m_1^2}\Big(m_1(m_2+M) + m_2(m_1+m_2+M)\Big)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_M = \sqrt{\frac{2m_1^2 m_2 g \Delta h}{(m_1+m_2+M)\left[m_1(m_2+M)+m_2(m_1+m_2+M)\right]}}$$

$$= 0.487 \text{ m/s}$$

<u>Esercizio n° 2</u>

1) → La somma dei lavori delle forze non cons. agenti sul sistema $m+M$ è zero ⇒ si conserva l'en. mecc. tot.

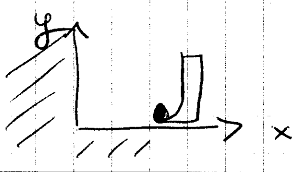
→ ∄ forze esterne lungo l'orizzontale ⇒ si conserva la componente orizzontale della quantità di moto

$$\begin{cases} mg\underbrace{(l_0+R)}_{h} + \frac{1}{2}kl_0^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 & (1) \\ MV + mv = 0 \quad \Rightarrow \quad V = -\frac{m}{M}v & (2) \end{cases}$$

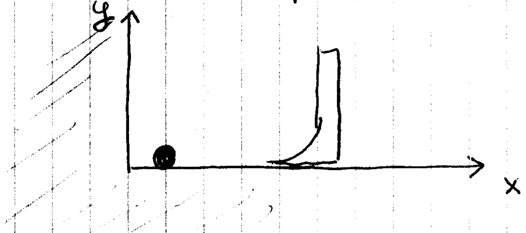
$$\Rightarrow 2mgh + kl_0^2 = \left(\frac{m^2}{M} + m\right)v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2mgh + kl_0^2}{m+M}\frac{M}{m}} = 2.71 \text{ m/s}$$

Se vettore $\vec{v}_f = -v\hat{x}$ con



2) $\vec{I} = \vec{Q}_f - \vec{Q}_i = m v_f \hat{x} + m v \hat{x}$



Poichè l'urto è elastico, $|\vec{v}_f| = v$ e $\vec{v}_f \parallel \hat{x}$

$\Rightarrow \quad \vec{I} = 2 m v \hat{x} = 5.42 \; \hat{x} \; \text{kg m/s}$

3) Perchè m risalga su M, devo avere $|\vec{v}| > |\vec{V}|$. Poichè $V = \frac{m}{M} v$, la condizione richiesta è $\frac{m}{M} < 1$.

4) Si ha ancora cons. dell'energia mecc. del sistema. Inoltre h' si trova quando la velocità di m relativa a M è nulla $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (M+m) V'^2 + m g h'$$

Poichè in tutto il processo l'en. è sempre rimasta cost., sfruttando (1)

$$\frac{1}{2} (M+m) V'^2 + m g h' = m g h + \frac{1}{2} k l_0^2$$

Dalla cons. della q.d.m. lungo $\hat{x}$, si ottiene:

$$M V + m v = (m+M) V'$$

$$2 m v = (m+M) V' \quad \Rightarrow \quad V' = \frac{2 m v}{M+m}$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{4}^{2}m^{\cancel{2}}}{(m+M)}\,\underbrace{\frac{2mgh+kl_0^2}{m+M}\,\frac{M}{\cancel{m}}}_{v^2}+mgh'=mgh+\frac{1}{2}kl_0^2$$

$$\frac{4mM}{(m+M)^2}\left(mgh+\frac{1}{2}kl_0^2\right)+mgh'=mgh+\frac{1}{2}kl_0^2$$

$$\Rightarrow\quad mgh'=\left(mgh+\frac{1}{2}kl_0^2\right)\frac{m^2+M^2+2mM-4mM}{(m+M)^2}$$

$$=\left(mgh+\frac{1}{2}kl_0^2\right)\left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2$$

$$h'=h\left(1+\frac{kl_0^2}{2mgh}\right)\left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2=0.125\ m$$