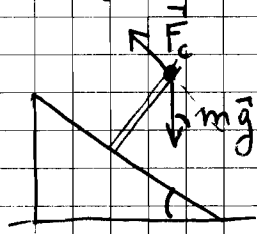
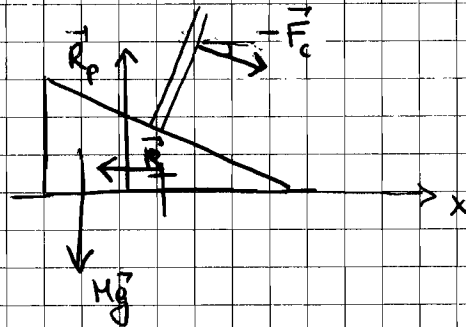


Esercizio n° 1

1) Forze che agiscono su m:



Forze che agiscono su M



$$\begin{cases} Mg + \vec{R} + \vec{R}_p - \vec{F}_c = 0 & \xrightarrow{\text{lungo } x} F_c \cos \alpha - R = 0 \\ \vec{F}_c + mg = m\vec{a} & \xrightarrow{\quad} F_c - mg \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$F_c = mg \sin \alpha$$

$$\Rightarrow R = mg \sin \alpha \cos \alpha = 2.12 \text{ N}$$

2) Conservazione dell'energia meccanica di m ($\vec{F}_c$ non compie lavoro):

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + mg l_0 \cos \alpha = mgl \cos \alpha \quad \leftarrow \text{alla caduta, dall'istante iniziale fino ad un istante prima di comprimere la molla}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + m g l_0 \cos \alpha = \frac{1}{2} k (l_{\min} - l_0)^2 + m g l_{\min} \cos \alpha \quad 2$$

en. mecc. di m alla compressione massima ($\Rightarrow v_m = 0$)

$$m g L \cos \alpha = \frac{1}{2} k (l_{\min} - l_0)^2 + m g l_{\min} \cos \alpha$$

$$m g (L - l_0) \cos \alpha = \frac{1}{2} k \Delta l^2 + m g \Delta l \cos \alpha$$

$$k \Delta l^2 + 2 m g \cos \alpha \Delta l - 2 m g (L - l_0) \cos \alpha = 0$$

$$\Delta l = \frac{-m g \cos \alpha \pm \sqrt{m^2 g^2 \cos^2 \alpha + 2 m g (L - l_0) k \cos \alpha}}{k}$$

Poiché $\Delta l < 0$ ($l_{\min} < l_0$) la sol. giusta è quella col segno "-" $\Rightarrow$

$$\Delta l = - \frac{m g \cos \alpha}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 (L - l_0) k}{m g \cos \alpha}} \right)$$

$$= - 0.288 \text{ m}$$

3) Ancora, dalla cons. dell' energia mecc. del sistema,

$$m g L \cos \alpha = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v^2 + m g l_0 \cos \alpha$$

Dalla cons. della quantità di moto lungo x (Risultante delle forze interne è verticale)

$$m v_x + M V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = - \frac{m}{M} v_x$$

Inoltre: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$ (velocità relativa + vel. di trasl.)

$$\Rightarrow v_x = v_x' + V$$

$$v_y = v_y'$$

Poiché m si muove sulla scianaleatura,

$$\frac{v_x'}{v_y'} = \tan \alpha \quad \Rightarrow v_y = v_y' = \frac{v_x'}{\tan \alpha}$$

$$v_x' = v_x - V = v_x + \frac{m}{M} v_x = v_x \left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

$$\Rightarrow v_y = \frac{v_x}{\tan \alpha} \left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

$$\Rightarrow m g L \cos \alpha = \frac{1}{2} \cancel{M} \frac{m^2}{M^2} v_x^2 + \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + m g l_0 \cos \alpha$$

$$\cancel{m} g (L - l_0) \cos \alpha = \frac{1}{2} m \left(1 + \frac{m}{M}\right) v_x^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{\tan^2 \alpha} \left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 v_x^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) v_x^2 \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} \left(1 + \frac{m}{M}\right)\right)$$

$$v_x = \pm \sqrt{\frac{2 g (L - l_0) \cos \alpha}{\left(1 + \frac{m}{M}\right) \left[1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{1}{\tan^2 \alpha}\right]}}$$

Poiché V deve essere positive, $v_x < 0 \Rightarrow$

$$v_x = - \sqrt{\frac{2 g (L - l_0) \cos \alpha}{\left(1 + \frac{m}{M}\right) \left[1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{1}{\tan^2 \alpha}\right]}} = -0.873 \text{ m/s}$$

$$v_y = - \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{1}{\tan \alpha} \sqrt{\frac{2 g (L - l_0) \cos \alpha}{\left(1 + \frac{m}{M}\right) \left[1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{1}{\tan^2 \alpha}\right]}} = -1.61 \text{ m/s}$$

4) Sempre dalla cons dell' energia e dalla quantita' di moto lungo x

$$mgL \cos \alpha = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} m v^2 + mg l'_{\min} \cos \alpha + \frac{1}{2} k (l'_{\min} - l_0)^2$$

$$m v'_x + MV = 0$$

$$v_x = v'_x + V = V \quad (v'_x = 0 \text{ alle massima compressione})$$

$$v_y = v'_y = 0$$

$$\Rightarrow v_x = V = v_y = 0 \quad \Rightarrow$$

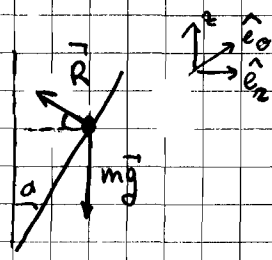
$$mgL \cos \alpha = mg l'_{\min} \cos \alpha + \frac{1}{2} k (l'_{\min} - l_0)^2$$

↑
stessa equazione del caso 2. $\Rightarrow$

$$\Delta l' = \Delta l$$

Esercizio n° 2

1)



$$\begin{cases} m \ddot{z} = R \sin \alpha - mg \\ m (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) = -R \cos \alpha \\ m (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

Si osservi che $\frac{r}{z} = \tan \alpha$

Si vuole che $\begin{cases} \dot{r} = \dot{z} = 0, \text{ con } r(t=0) = r_0 \tan \alpha \equiv r_0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow R = \frac{mg}{\sin \alpha} ; \quad + \cancel{r_0} \dot{\theta}^2 = + \cancel{r_0} g \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

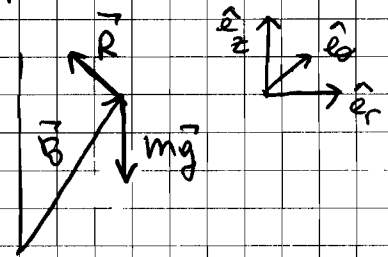
$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{r_0 \tan \alpha}} \Rightarrow v_0 = r_0 \dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{\tan \alpha}} r_0 = \sqrt{g h_0} = 2.21 \text{ m/s}$$

2) Poiché $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0$ momento delle forze rispetto a O
calcolo $\vec{M}_0$ e vedo se ha delle componenti nulle.

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{R} + \vec{r}_0 \times m\vec{g}$$

$$= -\hat{e}_\theta \sqrt{r^2 + z^2} R + \hat{e}_\theta \sqrt{r^2 + z^2} mg \sin \alpha = \hat{e}_\theta \frac{r}{\sin \alpha} (mg \sin \alpha - R)$$

$z = \frac{r}{\tan \alpha}$



$\Rightarrow \vec{L}_0$ non è costante, perché $\vec{M}_0 \neq 0$, ma lo sono le componenti radiale e quella lungo $\hat{e}_z$.

3) L'energia totale E_0 è una costante del moto
($\vec{R}$ non compie lavoro) $\Rightarrow$

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g h_0$$

$$L_{0,z} = m r_0 v_0 = m v_0 h_0 \tan \alpha$$

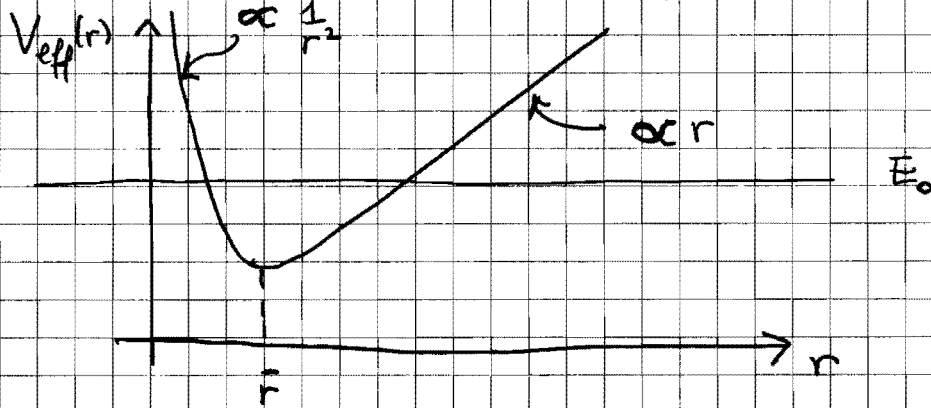
$$E_0 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m (r \dot{\theta})^2 + m g z$$

$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 (1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha})$

$$\vec{L}_0 = m \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_z \\ r & 0 & z \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & \dot{z} \end{vmatrix} = \left[-\hat{e}_r (r\dot{z}\dot{\theta}) - \hat{e}_\theta (r\dot{z} - \dot{r}z) + \hat{e}_z (r^2\dot{\theta}) \right] m$$

$$\Rightarrow L_{0z} = m r^2 \dot{\theta} \Rightarrow$$

$$E_0 = \frac{1}{2} m \frac{\dot{r}^2}{\sin^2 \alpha} + \underbrace{\frac{L_{0z}^2}{2 m r^2} + \frac{m g r}{\tan \alpha}}_{V_{\text{eff}}(r)}$$

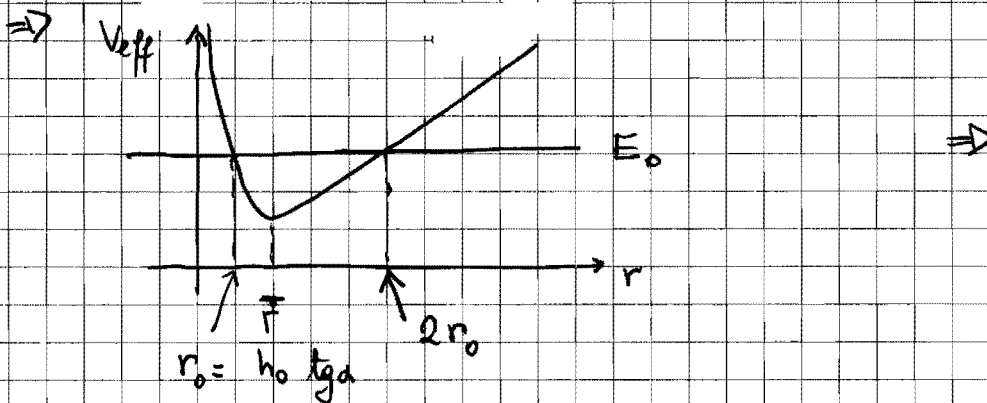


Per trovare $\bar{r}$, $\frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{L_{0z}^2}{2 m r^3} (-1) + \frac{m g}{\tan \alpha} = 0$$

$$\frac{1}{\bar{r}^3} = \frac{2 L_{0z}^2 \tan \alpha}{m^2 g}$$

4) Si richiede che il moto avvenga tra h_0 e $2h_0$



$$\frac{1}{2} m v_0^2 + m g h_0 = V_{eff}(2r_0) = \frac{L_{0,z}^2}{2m(2r_0)^2} + m g 2h_0$$

$$\cancel{\frac{1}{2} m v_0^2 + m g h_0} = \frac{\cancel{m} \cancel{v_0^2} \cancel{h_0^2} \cancel{g^2}}{\cancel{2m} \cancel{4} \cancel{h_0^2} \cancel{g^2}} + \cancel{2m g h_0}$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) \cancel{m} v_0^2 = \cancel{m g h_0}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{8}{3} g h_0} = 3.61 \text{ m/s}$$