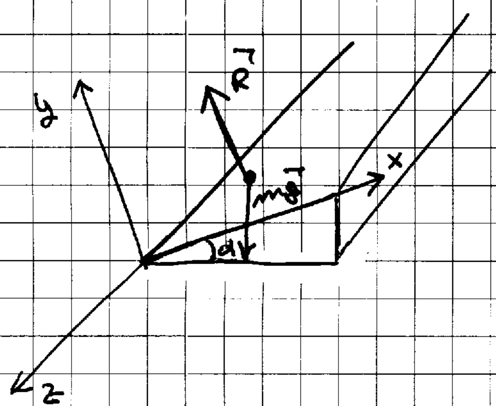
Esercizio n°1

1 a) Non essendoci attrito, le uniche forze che agiscono sulla pallina sono il peso e la reazione del piano ⊥ al piano inclinato. Scegliendo gli assi come segue



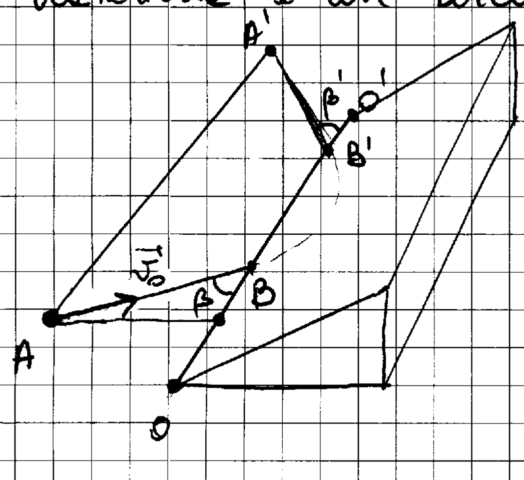
$$\vec F = R\hat y - mg\cos\alpha\,\hat y - mg\sin\alpha\,\hat x$$

⇒ lungo l'asse z il moto è rettilineo uniforme, mentre lungo l'asse x è unif. accelerato con accelerazione $-g\sin\alpha$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_{0x}\,t - \frac{1}{2} g \sin\alpha\, t^2 \\ z(t) = v_{0z}\,t \end{cases} \Rightarrow \text{nel piano } \{x\ z\}$$

la traiettoria è un arco di parabola.

1 b)



Si osserva che per simmetria $\beta = \beta'$.

Questo lo si può anche dimostrare. Infatti in B'

$$x(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{2 v_{0x}}{g \sin\alpha} \equiv \bar{t}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_{0x} - \cancel{\tfrac{1}{2}} g \sin\alpha\, \cancel{2} t = -v_{0x} \\ \dot{z}(t) &= v_{0z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \beta = \beta'$$

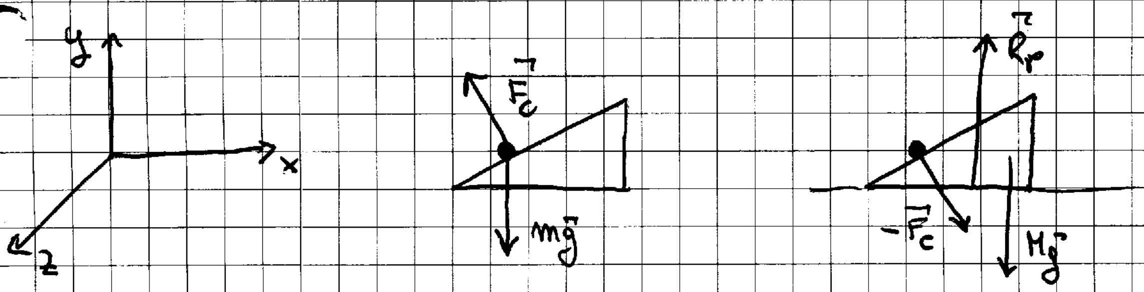
Se $\beta = \beta'$, allora da semplici considerazioni geometriche

$$\Delta = D - \frac{2L}{\operatorname{tg}\beta} = 4.42\ \text{m}$$

1c) Poiché $\Delta = |z(\bar{t})| = v_{0z} \dfrac{2 v_{0x}}{g \sin\alpha} = \dfrac{2\, v_0^2 \cos\beta \sin\beta}{g \sin\alpha}$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{\Delta\, g \sin\alpha}{2 \cos\beta \sin\beta}} = 5.0\ \text{m/s}$$

1d) Consideriamo le forze che agiscono su m e M:



$\Rightarrow$ i) lungo l'asse z si conservano le quantità di moto di m e M <u>separatamente</u>

ii) lungo l'asse x, si conserva la quantità di moto di m+M

In più si conserva l'energia $\Rightarrow$

$$\cancel{m} v_z = - \cancel{m} v_0 \cos\beta$$
$$V_z = 0$$

$$m v_x + M V_x = m v_0 \sin\beta$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = m g h + \frac{1}{2} M V_x^2 + \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_z^2)$$

se $h = h_{max}$ allora $v_x = V_x \Rightarrow$

$$\begin{cases} \cancel{\frac{1}{2}} m v_0^2 = \overset{2}{\cancel{1}} m g h_{max} + \cancel{\frac{1}{2}} M V_x^2 + \cancel{\frac{1}{2}} m V_x^2 + \cancel{\frac{1}{2}} m v_0^2 \cos^2\beta \\ (m+M) V_x = m v_0 \sin\beta \end{cases} \Rightarrow$$

$$V_x = \frac{m}{m+M} v_0 \sin\beta$$

$$\cancel{m} v_0^2 \sin^2\beta = 2 \cancel{m} g h_{max} + \cancel{(M+m)} \frac{m^{\cancel{2}}}{(m+M)^{\cancel{2}}} v_0^2 \sin^2\beta$$

$$v_0^2 \sin^2\beta \frac{M}{m+M} = 2 g h_{max} \Rightarrow$$

$$h_{max} = \frac{M}{m+M} \frac{v_0^2 \sin^2\beta}{2g} = 0.12 \text{ m}$$

1e) In questo caso, la conservazione dell'energia si scrive come

$$\begin{cases} \cancel{\frac{1}{2}} m v_0^2 = \cancel{\frac{1}{2}} M V_x^2 + \cancel{\frac{1}{2}} m v_x^2 + \cancel{\frac{1}{2}} m v_0^2 \cos^2\beta \\ m v_x + M V_x = m v_0 \sin\beta \end{cases} \Rightarrow$$

$$V_x = \frac{m}{M} (v_0 \sin\beta - v_x)$$

$$\cancel{m} v_0^2 \sin^2\beta = \cancel{M} \frac{m^{\cancel{2}}}{M^{\cancel{2}}} (v_0^2 \sin^2\beta + v_x^2 - 2 v_0 v_x \sin\beta) + \cancel{m} v_x^2$$

$$v_x^2\left(1+\frac{m}{M}\right)-2\frac{m}{M}v_0\sin\beta\, v_x-\left(1-\frac{m}{M}\right)v_0^2\sin^2\beta=0$$

$$v_x=\frac{\frac{m}{M}v_0\sin\beta\ \underbrace{\pm}_{\text{soluzione giusta}}\sqrt{\cancel{\frac{m^2}{M^2}v_0^2\sin^2\beta}+\left(1-\cancel{\frac{m^2}{M^2}}\right)v_0^2\sin^2\beta}}{\left(1+\frac{m}{M}\right)}$$

$$=-\frac{\left(1-\frac{m}{M}\right)}{\left(1+\frac{m}{M}\right)}v_0\sin\beta$$

$$\Rightarrow\quad \operatorname{tg}\beta'=\left|\frac{v_x}{v_z}\right|=\operatorname{tg}\beta\,\frac{1-\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}}=0.6\operatorname{tg}\beta$$

$$\beta'=0.80\ \text{Rad}$$

<u>Esercizio n° 2</u>

2a) Procedendo in maniera standard, nel SR del centro di massa, la conservazione dell'energia si scrive con:

$$E=\frac{1}{2}\mu v_0^2=\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\frac{L^2}{2\mu r^2}-\frac{G\,m_A m_T}{r}$$

con $\mu=\dfrac{m_A m_T}{m_A+m_T}\underset{m_T\gg m_A}{\approx}m_A$

$$L=\mu v_0 b$$

Perchè avvenga la collisione, occorre che

$r_{min}\leq r_T\ \Rightarrow$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m_A} v_0^2 = \frac{L^2}{2\mu_A r_{min}^2} - \frac{G m_A m_T}{r_{min}}$$

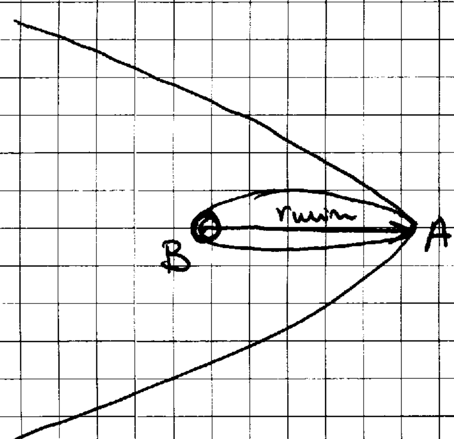
$$= \frac{m_A^{\cancel{2}} v_0^2 b^2}{\cancel{2} \cancel{m_A} r_{min}^2} - \frac{2}{1} G \frac{\cancel{m_A} m_T}{r_{min}}$$

$$\Rightarrow \quad v_0^2 \frac{b^2}{r_{min}^2} = v_0^2 + \frac{2 G m_T}{r_{min}} \quad \Rightarrow$$

$$b = \sqrt{r_{min}^2 + 2\frac{G m_T r_{min}}{v_0^2}} \leq \sqrt{r_T^2 + \frac{2 G m_T r_T}{v_0^2}}$$

$$= 9.61 \times 10^6 \, m \cong 1.5\, r_T$$

2b)



Troviamo r_{min}:

$$\frac{1}{2} m_A v_0^2 = \frac{m_A^2 b^2 v_0^2}{2 m_A r_{min}^2} - \frac{G m_A m_T}{r_{min}}$$

$$r_{min}^2 v_0^2 + 2 G m_T r_{min} - b^2 v_0^2 = 0$$

$$r_{min} = \frac{-G m_T \pm \sqrt{G^2 m_T^2 + b^2 v_0^4}}{v_0^2} = \frac{G m_T}{v_0^2}\left(\sqrt{1 + \frac{b^2 v_0^4}{G^2 m_T^2}} - 1\right)$$

$$= 2.82 \times 10^7 \, m \cong 4.4\, r_T \equiv r_A$$

Sull'orbita ellittica, all'apogeo (punto A) e perigeo (punto B con $r_B \equiv r_T$) si ha:

$$\begin{cases} E = \dfrac{L^2}{2 m_A r_A^2} - \dfrac{G m_T m_A}{r_A^2} \\ E = \dfrac{L^2}{2 m_A r_B^2} - \dfrac{G m_T m_A}{r_B^2} \end{cases} \rightarrow \text{2 eqn. e 2 incognite } (E \text{ e } L)$$

Risolviamo per E e per L:

$$L^2 = 2 m_A r_A^2 E + \frac{G m_T m_A}{\cancel{r_A}} 2 m_A r_A^{\cancel{2}}$$

$$E = \frac{\cancel{2} \cancel{m_A} r_A}{\cancel{2} \cancel{m_A} r_B^2} (r_A E + G m_T m_A) - \frac{G m_T m_A}{r_B}$$

$$E = \frac{r_A^2}{r_B^2} E + G m_T m_A \frac{r_A}{r_B^2} - G \frac{m_T m_A}{r_B}$$

$$E \left(\frac{r_B^2 - r_A^2}{\cancel{r_B^2}} \right) = G \frac{m_T m_A}{\cancel{r_B}} \frac{r_A - r_B}{\cancel{r_B}}$$

$$E = - \frac{G m_T m_A}{r_A + r_B}$$

$$\Rightarrow E_{motori} = \frac{1}{2} m_A v_0^2 + \frac{G m_T m_A}{r_A + r_B} = 6.14 \times 10^{17} \text{ J}$$

2c) $$L^2 = 2 m_A r_A^2 \left(- \frac{G m_T m_A}{r_A + r_B} \right) + G m_T m_A \, 2 m_A r_A$$

$$= 2 G m_A^2 m_T r_A \left(1 - \frac{r_A}{r_A + r_B} \right)$$

$$= 2 G m_A^2 m_T \frac{r_A r_B}{r_A + r_B}$$

$L = m_A r_B v_{atterraggio}$ $\Rightarrow$

$$v_{att}^2 \cancel{m_A^2} r_B^{\cancel{2}} = 2 G \cancel{m_A^2} m_T \frac{r_A \cancel{r_B}}{r_A + r_B}$$

$$v_{att} = \sqrt{\frac{2 G m_T r_A}{r_B (r_A + r_B)}} = 1.0025 \times 10^4 \text{ m/s}$$