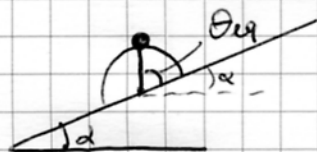


Esercizio n° 1

- 1) La posizione di equilibrio (instabile) della pallina si ha quando la reazione della guida è tutta lungo la verticale $\Rightarrow$

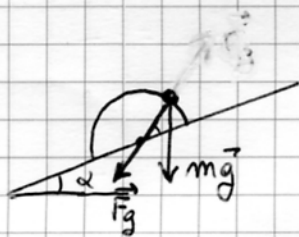


$$\frac{\pi}{2} = \theta_{eq} + \alpha \Rightarrow \theta_{eq} = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Perché la pallina riesca a proseguire il suo moto, si deve avere che in θ_{eq} $v \geq 0 \Rightarrow$ dalla conservazione dell'energia meccanica della pallina

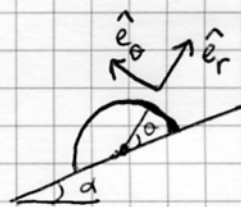
$$m g h_R \geq m g R \Rightarrow h_R \geq R \Rightarrow h_{R,min} = 0.2 \text{ m}$$

- 2) Consideriamo le forze che agiscono sulla pallina:



$$m \vec{a} = \vec{F}_g + m\vec{g}$$

Si consideri un sistema di coord. polari

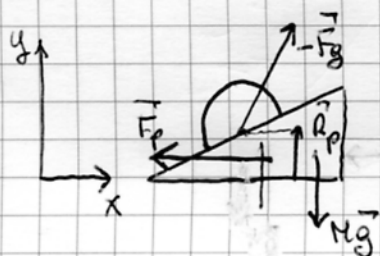


$$\Rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -F_g - mg \sin(\alpha + \theta)$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -mg \cos(\alpha + \theta)$$

$\uparrow$
 $\dot{r} = 0 = \ddot{r}$

Consideriamo le forze che agiscono sul cuneo + guide:



$$0 = -\vec{F}_g + \vec{F}_p + M\vec{g} + \vec{R}_p \Rightarrow \text{col sistema di coord. in figura } x \text{ e } y$$

$$-Mg + R_p + F_g \sin(\alpha + \theta) = 0$$

$$\Rightarrow F_p = F_g \cos(\alpha + \theta)$$

$$-F_p + F_g \cos(\alpha + \theta) = 0$$

Scrivendo le eqn. per m si ha:

$$m R \dot{\theta}^2 = F_g + mg \sin(\theta + \alpha)$$

Poiché si ha conservazione dell' en. meccanica di m:

$$mg h_R = mg R \sin(\alpha + \theta) + \frac{1}{2} m (R \dot{\theta})^2$$

$$\Rightarrow R \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R} (h_R - R \sin(\alpha + \theta)) \Rightarrow$$

$$F_g = m \frac{2g}{R} (h_R - R \sin(\alpha + \theta)) - mg \sin(\alpha + \theta)$$

$$= 2mg \frac{h_R}{R} - 3mg \sin(\alpha + \theta)$$

$$= mg \left[2 \frac{h_R}{R} - 3 \sin(\alpha + \theta) \right]$$

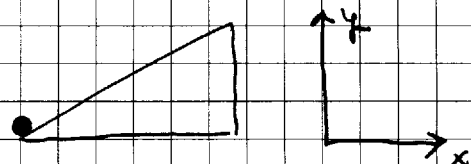
$$\Rightarrow F_p = mg \cos(\alpha + \theta) \left[2 \frac{h_R}{R} - 3 \sin(\alpha + \theta) \right] = 1.74 \text{ N}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_p = -\hat{x} 1.74 \text{ N}$$

3) Poiché le forze esterne al sistema m+H sono tutte dirette lungo la verticale, si conserva la quantità di moto lungo l'orizzontale. Inoltre si conserva l'energia meccanica di m+H $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} M \dot{V}^2 = mgh \\ m \dot{x} + M \dot{V} = 0 \end{cases}$$

$\vec{V} = \dot{x} \hat{x}$



In un sistema di rif. solidale al piano orizzontale,
la velocità di m si può scrivere:

$$\begin{cases} v_x = v'_x + V \\ v_y = v'_y \end{cases}$$

Infatti, nel sistema di riferimento del cuneo

$$\frac{v'_y}{v'_x} = \tan \alpha$$

Mettendo insieme queste eqn., si ha

$$\begin{cases} mgh = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2} H V^2 \\ m v_x + H V = 0 \\ v_x = v'_x + V \\ v_y = v'_x \tan \alpha \end{cases} \rightarrow m v'_x = -(m+H) V \Rightarrow V = -\frac{m}{m+H} v'_x$$

$$v_x = \frac{H}{m+H} v'_x$$

$$mgh = \frac{1}{2} m \frac{H^2}{(m+H)^2} v'^2_x + \frac{1}{2} m \tan^2 \alpha v'^2_x + \frac{1}{2} H \frac{m^2}{(m+H)^2} v'^2_x$$

$$= \frac{1}{2} v'^2_x \left[\frac{mH^2}{(m+H)^2} + \frac{m^2 H}{(m+H)^2} + m \tan^2 \alpha \right] =$$

$$= \frac{1}{2} v'^2_x \left(\frac{mH}{m+H} + m \tan^2 \alpha \right)$$

$$v'_x = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{H}{m+H} + \tan^2 \alpha}} \Rightarrow$$

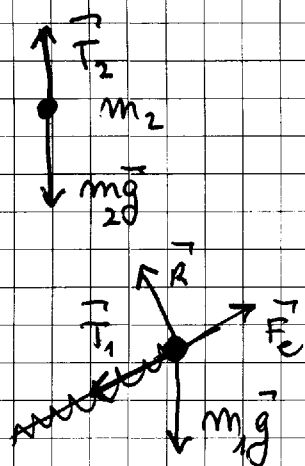
$$v_x = -\frac{M}{m+M} \sqrt{\frac{2gh}{\frac{M}{m+M} + \tan^2 \alpha}}$$

$$v_y = -\tan \alpha \sqrt{\frac{2gh}{\frac{M}{m+M} + \tan^2 \alpha}}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha' = \frac{v_y}{v_x} = \tan \alpha \frac{m+M}{M} = 0.371$$

Esercizio n° 2

- 1) La condizione di equilibrio per m_1 e m_2 si ha imponendo che la risultante delle forze che agiscono su m_1 e su m_2 sia nulla $\Rightarrow$



$$T_2 = m_2 g$$

$$m_1 g \cos \beta + T_1 - F_e = 0$$

$$F_e = k(-l_{eq} + l_0)$$

$$T_1 = T_2 = m_2 g$$

$$k(l_0 - l_{eq}) = (m_1 \cos \beta + m_2) g$$

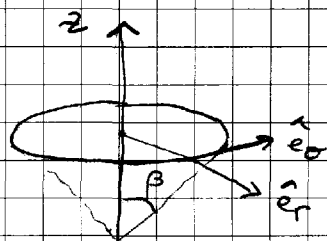
$$l_{eq} = l_0 - \frac{m_1 \cos \beta + m_2}{k} g = 0.304 \text{ m}$$

2) $\vec{L}_0 = \vec{L}_{0,1} + \vec{L}_{0,2}$

5

Poiché m_2 si muove solo lungo la verticale, $\vec{R}_2 \parallel \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{L}_{0,2} = 0 \Rightarrow \vec{L}_0 = \vec{L}_{0,1}$

Utilizzando coord. cilindriche



$$\vec{L}_0 = m_1 \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{z} \\ r & 0 & z \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & \dot{z} \end{vmatrix} = m_1 (\hat{e}_r (r\dot{z}\dot{\theta}) - \hat{e}_\theta (r\dot{z} - \dot{r}z) + \hat{z} r^2\dot{\theta})$$

con $\begin{cases} r = R \sin \beta \\ z = R \cos \beta \end{cases} \Rightarrow$

$$\vec{L}_0 = -m_1 R^2 \sin \beta \cos \beta \dot{\theta} \hat{e}_r + m_1 R^2 \sin^2 \beta \dot{\theta} \hat{z}$$

$\Rightarrow L_{0,r}$ e $L_{0,z}$ non sono indipendenti.

Per vedere se $\vec{L}_0$ o una sua componente sono costanti del moto, calcoliamo il momento delle

forze agenti sul sistema $m_1 + m_2$ rispetto a O:

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_{0,1} + \vec{M}_{0,2} \quad \vec{M}_{0,2} = 0 \text{ perché } m_2 \vec{g} \text{ che } \vec{r}_2 \text{ sono } \parallel \text{ a } \vec{R}_2$$

$$= \vec{R} \times m_1 \vec{g} + \vec{R} \times \vec{F}_g = R (m_1 g \sin \beta - F_g) \hat{e}_\theta$$

$\Rightarrow L_{0,z}$ (e $L_{0,r}$ che però non è ind. da $L_{0,z}$) è una costante del moto.

3) $E = \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}_1^2)$
 $+ \frac{1}{2} k(R-l_0)^2 + m_1 g z_1 + m_2 g z_2$

Si osserva che: $-z_2 + R = L$ (lunghezza del filo)

$$\Rightarrow \dot{z}_2 = \dot{R}$$

$$\dot{z}_1 = \dot{R} \cos \beta \quad \Rightarrow$$

$$\dot{r} = \dot{R} \sin \beta$$

Anche $L_{\theta, z} = m_1 r^2 \dot{\theta} \Rightarrow$

$$E = \frac{1}{2} m_2 \dot{R}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{R}^2 + \frac{L_{\theta, z}^2}{2m_1 R^2 \sin^2 \alpha} +$$

$$+ \frac{1}{2} k(R-l_0)^2 + (m_1 \cos \beta + m_2) g R - m_2 g L$$

$$U_{\text{eff}}(R) = \frac{L_{\theta, z}^2}{2m_1 R^2 \sin^2 \alpha} + \frac{1}{2} k(R-l_0)^2 + (m_1 \cos \beta + m_2) g R$$

$$- m_2 g L$$

4) Per determinare l_{eq} , si deve imporre

$$U_{\text{eff}}(R) = E(t=0) \Rightarrow$$

$$\frac{L_{\theta, z}^2}{2m_1 R^2 \sin^2 \alpha} + \frac{1}{2} k(R-l_0)^2 + (m_1 \cos \beta + m_2) g R - \cancel{m_2 g L} =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + \frac{1}{2} k(l_{\text{eq}} - l_0)^2 + m_1 g l_{\text{eq}} \cos \alpha +$$

$$+ m_2 g l_{\text{eq}} - \cancel{m_2 g L}$$

Prima di tutto si osserva che $R = l_{\text{eq}}$ è soluzione

dell'equazione. Per trovare se si tratta di un massimo o di un minimo, si calcola

7

$$\left. \frac{dU_{\text{eff}}(R)}{dR} \right|_{R=l_{eq}} = - \frac{2 L_0^2}{2 \pi m^2 m_1 l_{eq}^3} + \frac{1}{7} \cancel{k} (l_{eq} - l_0) + (m_1 \cos \beta + m_2) g$$

Perché $k l_{eq} = k l_0 - (m_1 \cos \beta + m_2) g$

$$\left. \frac{dU_{\text{eff}}(R)}{dR} \right|_{R=l_{eq}} = - \frac{L_0^2}{2 m_1 \pi m^2 l_{eq}^3} < 0$$

$\Rightarrow$ graficamente

