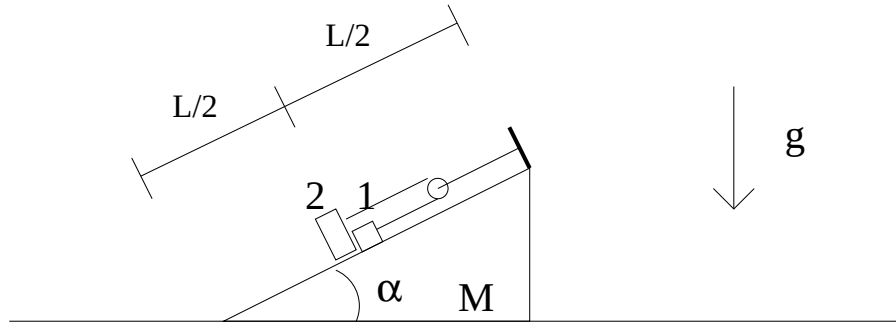


Dipartimento di Fisica - Fisica I B

Compitino 18 dicembre 2009

Esercizio 1 (15 punti)



Si consideri il sistema in figura: un cuneo di massa M inclinato di un angolo α è appoggiato su un piano orizzontale. Tra la superficie orizzontale e il cuneo è presente attrito statico sufficiente a mantenerlo fermo. Sul cuneo sono appoggiate due masse m_1 e m_2 , con $m_2 > m_1$, attaccate ai due estremi di un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza L , che passa in una carrucola a sua volta attaccata all'estremo superiore del cuneo. Si trascuri l'attrito tra i due corpi e il cuneo, e si considerino i due corpi come punti materiali, inizialmente non in contatto tra di loro, ma appena appoggiati l'un l'altro.

- Determinare la tensione del filo.
- Determinare il minimo coefficiente di attrito statico tra il cuneo e il piano orizzontale affinché il cuneo non si muova.

Si supponga adesso che tra il piano orizzontale ed il cuneo non ci sia attrito e che quindi il cuneo sia libero di muoversi orizzontalmente. All'istante iniziale i due corpi sono tenuti fermi ad una distanza dalla fine del cuneo pari alla metà della lunghezza del filo, e sono appena appoggiati l'un l'altro. Il cuneo è fermo.

- Determinare la velocità del cuneo quando il corpo 2 è arrivato a terra.

Domanda 1

Le equazioni del moto nelle direzioni parallele al piano inclinato si scrivono

$$m_1 a_1 = T - m_1 g \sin \alpha \quad (1)$$

$$m_2 a_2 = T - m_2 g \sin \alpha \quad (2)$$

ed inoltre per l'inesistibilità del filo $a_1 + a_2 = 0$. Dividendo per le masse e sommando membro a membro abbiamo

$$a_1 + a_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) T - 2g \sin \alpha \quad (3)$$

ed usando l'inesistibilità

$$T = 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \sin \alpha \quad (4)$$

Domanda 2

Le reazioni vincolari applicate alle masse si determinano dalla condizione di accelerazione nulla per la particella nella direzione normale al piano:

$$N_1 = m_1 g \cos \alpha \quad (5)$$

$$N_2 = m_2 g \cos \alpha \quad (6)$$

Anche il cuneo non deve avere accelerazioni verticali, e questo permette di calcolare R

$$R = N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha + 2T \sin \alpha + Mg \quad (7)$$

$$= (m_1 + m_2) g \cos^2 \alpha + 4g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \sin^2 \alpha + Mg \quad (8)$$

$$= \frac{(m_1 + m_2)^2 \cos^2 \alpha + 4m_1 m_2 \sin^2 \alpha + M(m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)} g \quad (9)$$

Consideriamo adesso le forze orizzontali applicate al cuneo. Deve essere

$$F_a + (N_1 + N_2) \sin \alpha - 2T \cos \alpha = 0 \quad (10)$$

da cui

$$|F_a| = |2T \cos \alpha - (N_1 + N_2) \sin \alpha| \leq \mu_s R \quad (11)$$

ossia

$$\mu_s \geq \frac{(m_1 - m_2)^2 \cos \alpha \sin \alpha}{(m_1 + m_2)^2 + M(m_1 + m_2) - (m_1 - m_2)^2 \sin^2 \alpha} \quad (12)$$

Domanda 3

In assenza di attrito si conserva l'energia e la quantità di moto orizzontale del sistema. Confrontando la configurazione iniziale e quella finale abbiamo per la prima

$$(m_1 + m_2) g \frac{\ell}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2} m_1 (v_{x1}^2 + v_{y1}^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_{x2}^2 + v_{y2}^2) + \frac{1}{2} MV^2 + m_1 g \ell \sin \alpha \quad (13)$$

perchè inizialmente tutte le velocità sono nulle e le due masse si trovano ad una altezza $h = \frac{1}{2} \ell \sin \alpha$, mentre alla fine la massa m_1 si trova ad una altezza $h = \ell \sin \alpha$ e la massa m_2 ad $h = 0$. Abbiamo quindi

$$m_1 (v_{x1}^2 + v_{y1}^2) + m_2 (v_{x2}^2 + v_{y2}^2) + MV^2 = (m_2 - m_1) g \ell \sin \alpha \quad (14)$$

Lo stesso confronto per la quantità di moto orizzontale dà

$$MV + m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = 0 \quad (15)$$

Inoltre a causa dell'inestensibilità del filo

$$v_{1y} = -v_{2y} \quad (16)$$

e la velocità delle due masse relativa al cuneo deve essere parallela al suo lato inclinato, quindi

$$v_{1y} = (v_{1x} - V) \tan \alpha \quad (17)$$

$$v_{2y} = (v_{2x} - V) \tan \alpha \quad (18)$$

Usando le ultime 4 relazioni lineari, possiamo esprimere tutte le velocità in termini della sola V :

$$v_{1x} = -\frac{M + 2m_2}{m_1 - m_2} V \quad (19)$$

$$v_{1y} = -v_{2y} = -\frac{(M + m_1 + m_2)}{m_1 - m_2} V \tan \alpha \quad (20)$$

$$v_{2x} = \frac{M + 2m_1}{m_1 - m_2} V \quad (21)$$

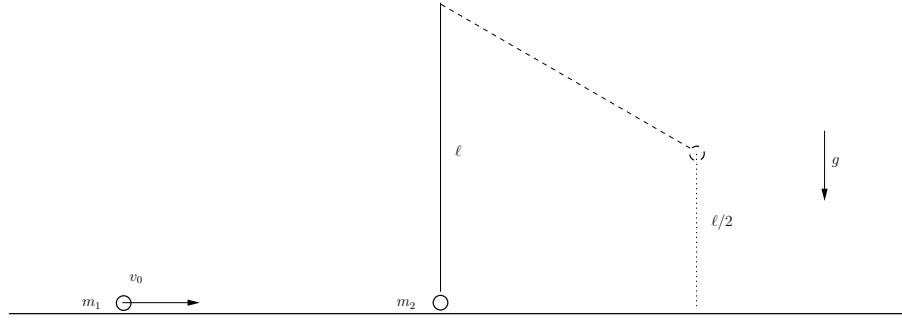
e sostituendo nella prima abbiamo

$$\left[(m_1 + m_2) \frac{(M + m_1 + m_2)^2}{(m_1 - m_2)^2} \tan^2 \alpha + m_1 \frac{(M + 2m_2)^2}{(m_1 - m_2)^2} + m_2 \frac{(M + 2m_1)^2}{(m_1 - m_2)^2} + M \right] V^2 = (m_2 - m_1) g \ell \sin \alpha$$

da cui

$$V = \sqrt{\frac{(m_2 - m_1)^3 g \ell \sin \alpha}{(M + m_1 + m_2) [(m_1 + m_2)(M + m_1 + m_2) \tan^2 \alpha + 4m_1 m_2 + M(m_1 + m_2)]}} \quad (22)$$

Esercizio 2 (15 punti)



Il pendolo in figura è formato da una massa m_2 appesa ad un filo inestensibile e di massa nulla di lunghezza ℓ . Viene colpito da una massa m_1 che si muove inizialmente con velocità v_0 su un piano orizzontale privo di attrito. Per rispondere a tutte le domande che seguono si assuma che l'urto avvenga in un tempo molto breve, e che in esso venga dissipata la massima quantità possibile di energia W_{MAX} .

- Calcolare per quale velocità v_0^* il pendolo riesce a sollevarsi di $\ell/2$ da terra.
- Determinare W_{MAX} .
- Per $v_0 > v_0^*$ determinare la tensione del filo quando la massa si è sollevata di $\ell/2$, nell'ipotesi che le due masse siano rimaste attaccate dopo l'urto.

Domanda 1

Rispondendo alla seconda domanda mostreremo che immediatamente dopo l'urto le due masse si muoveranno con la stessa velocità

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 \quad (23)$$

Supponendo che rimangano attaccate ed imponendo la conservazione dell'energia deve essere

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = (m_1 + m_2) g \frac{\ell}{2} \quad (24)$$

se invece le masse restano separate, solo m_2 si solleva mentre m_1 continua a muoversi orizzontalmente a velocità v . In questo caso

$$\frac{1}{2} m_2 v^2 = m_2 g \frac{\ell}{2} \quad (25)$$

ma in entrambe le eventualità si trova

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0^* = \sqrt{g\ell} \quad (26)$$

e quindi

$$v_0^* = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \sqrt{g\ell} \quad (27)$$

Domanda 2

Fino ad immediatamente dopo l'urto possiamo scrivere l'energia nella forma

$$E = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_r^2 \quad (28)$$

dove v_{cm} è la velocità del centro di massa del sistema e v_r la velocità relativa tra le due masse. Dato che si conserva la quantità di moto deve essere

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_0^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_r^2 + W \quad (29)$$

dove v_r è la velocità relativa immediatamente dopo l'urto e W l'energia dissipata. Chiaramente la massima dissipazione si ha quando $v_r = 0$, e in questo caso

$$W_{MAX} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_0^2 \quad (30)$$

Inoltre abbiamo, dato che $v_1 = v_2 = v$

$$v_{cm} = v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 \quad (31)$$

Domanda 3

Dalla conservazione dell'energia troviamo la velocità v_h delle due masse quando raggiungono l'altezza $h = \ell/2$:

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 v_0^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_h^2 + (m_1 + m_2) g \frac{\ell}{2} \quad (32)$$

cioè

$$v_h^2 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 v_0^2 - g\ell \quad (33)$$

Scrivendo l'equazione del moto nella direzione parallela al filo deve essere

$$- (m_1 + m_2) \frac{v_h^2}{\ell} = (m_1 + m_2) g \cos \alpha - T \quad (34)$$

dove $\alpha = \pi/3$ è l'angolo che il filo forma con la verticale. Quindi

$$T = (m_1 + m_2) g \cos \alpha + (m_1 + m_2) \frac{v_h^2}{\ell} \quad (35)$$

ossia

$$T = (m_1 + m_2) \left[\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{v_0^2}{\ell} - \frac{1}{2} g \right] \quad (36)$$