Fisica I

Esercizio 1

Un punto materiale di massa m viene lanciato a $t = 0$ con velocità iniziale v_0 in modulo e con una direzione che forma un angolo θ con il piano orizzontale $y = 0$. Fino a quando non ricade sul piano, il suo moto si svolge sotto l'azione di una forza $\vec{F}(x, y)$ non nota secondo le leggi orarie

$$\begin{aligned} x &= at \quad (1) \\ y &= b \sin kt \quad (2) \end{aligned}$$

dove k è una costante nota.

1. Determinare a e b in termini di v_0, k e θ.
2. Trovare la traiettoria, e discutere i valori possibili della gittata.
3. Determinare $\vec{F}(x, y)$.

Soluzione

Domanda 1

Derivando si ottengono le componenti della velocità

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a \quad (3) \\ \dot{y}(t) &= bk \cos kt \quad (4) \end{aligned}$$

ed ponendo $\dot{x}(0) = v_0 \cos\theta$ e $\dot{y}(0) = v_0 \sin\theta$ si trova

$$\begin{aligned} a &= v_0 \cos\theta \quad (5) \\ b &= \frac{v_0}{k} \sin\theta \quad (6) \end{aligned}$$

Domanda 2

Sostituendo $t = x/a$ nella seconda equazione si trova

$$y = b \sin\left(\frac{kx}{a}\right) = \frac{v_0 \sin\theta}{k} \sin\left(\frac{kx}{v_0 \cos\theta}\right) \quad (7)$$

Per calcolare la gittata poniamo $y = 0$. Questo significa (supponendo $0 < \theta < \pi/2$)

$$d = \frac{\pi v_0}{k} \cos\theta \quad (8)$$

quindi la gittata è tanto maggiore quanto più piccolo è θ, al limite $d = \pi v_0/k$.

Domanda 3

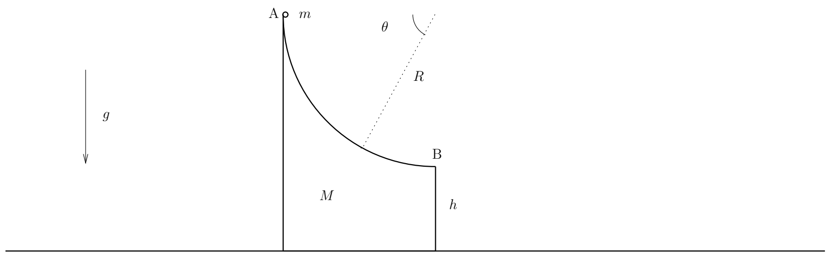
Derivando due volte rispetto al tempo si trova

$$\ddot{x} = 0 \tag{9}$$
$$\ddot{y} = -bk^2 \sin kt \tag{10}$$

ossia

$$\vec{F} = m\ddot{x}\hat{x} + m\ddot{y}\hat{y} = -mk^2 y\hat{y} \tag{11}$$

Esercizio 2



Una particella di massa m viene lasciata libera nel punto A con velocità iniziale nulla, e scivola sulla guida priva di attrito fino al punto B. La guida ha il profilo superiore di un quarto di circonferenza di raggio R, massa M, può muoversi sul piano orizzontale liscio ed è pure inizialmente ferma. Il punto B è ad una altezza h da terra.

1. Determinare lo spostamento della guida quando la particella arriva in B.
2. Determinare la velocità della particella quando, dopo essersi staccata dalla guida in B, arriva a terra.
3. Se nel punto B avviene un urto completamente anelastico con un ostacolo attaccato alla guida, dopo il quale la particella rimane fissata ad esso, determinare la velocità finale del sistema.

Domanda 1

Dato che si conserva la quantità di moto orizzontale del sistema l'ascissa del centro di massa non cambia. Calcolando quest'ultimo all'inizio e alla fine abbiamo

$$x_{cm} = \frac{mx^{(i)} + MX^{(i)}}{m+M} = \frac{m\left(x^{(i)} + \delta\right) + M\left(X^{(i)} + \Delta\right)}{m+M} \tag{12}$$

dove si è indicato con δ e Δ gli spostamenti orizzontali finali della particella e della guida. Inoltre lo spostamento orizzontale finale della particella relativo alla guida vale

$$\delta - \Delta = R \tag{13}$$

e sostituendo $\delta^{(i)}$ nella prima relazione abbiamo

$$\Delta = -\frac{m}{m+M}R \tag{14}$$

Domanda 2

L'energia del sistema si conserva, e si può scrivere nella forma

$$E = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{X} + R\dot{\theta}\sin\theta\right)^2 + R^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\right] - mgR\sin\theta \tag{15}$$

dove si sono scelte come coordinate la posizione orizzontale della guida e l'angolo in figura. Anche la quantità di moto orizzontale si conserva, e vale

$$P_x = M\dot{X} + m\left(\dot{X} + R\dot{\theta}\sin\theta\right) \tag{16}$$

Inizialmente $E = 0$ e $P_x = 0$. Quando la particella arriva in B ($\theta = \pi/2$) avremo quindi

$$(M+m)\,\dot{X} + mR\dot{\theta} = 0 \tag{17}$$

e

$$\frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{X} + R\dot{\theta}\right)^2 - mgR = 0 \tag{18}$$

da cui

$$\dot{X} = -\frac{mR}{m+M}\dot{\theta} \tag{19}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R}\left(1 + \frac{m}{M}\right)} \tag{20}$$

Infine

$$v_x = \dot{X} + R\dot{\theta}\sin\frac{\pi}{2} = \sqrt{2gR\left(\frac{M}{M+m}\right)} \tag{21}$$

$$v_y = -R\dot{\theta}\cos\frac{\pi}{2} = 0 \tag{22}$$

Il moto che segue sarà a velocità uniforme lungo x, e uniformemente accelerato ($a = -g$) lungo y. Quindi al momento di arrivare a terra

$$v_x = \sqrt{2gR\left(\frac{M}{M+m}\right)} \tag{23}$$

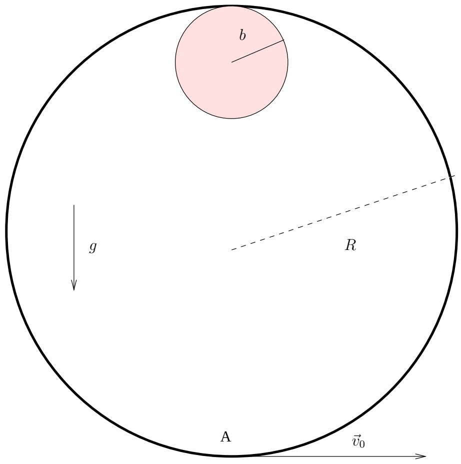
$$v_y = -\sqrt{2gh} \tag{24}$$

Domanda 3

La velocità del centro di massa in direzione orizzontale è sempre nulla, quindi dopo l'urto il sistema è fermo.

Fisica II

Esercizio 1



L'anello sottile in figura, di massa M e raggio R, può ruotare senza strisciare su un perno circolare di raggio b sul quale è appoggiato, ed inizialmente si trova con il centro di massa nella posizione più bassa possibile, mentre il suo estremo inferiore (indicato in figura con A) si muove con velocità v_0 in modulo.

1. Per quale valore minimo di v_0 il centro di massa dell'anello riesce a compiere un giro completo?
2. Dopo tale giro completo dove si trova A?
3. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.

Domanda 1

Usiamo come coordinata l'angolo tra il segmento che congiunge il centro del perno al punto di contatto e la direzione verticale. Il centro di massa dell'anello compie un moto circolare attorno al centro del perno, di raggio $R-b$ e velocità angolare $\dot{\theta}$.

Detta ω la velocità angolare dell'anello, dovrà essere

$$R\omega = (R-b)\dot{\theta} \tag{25}$$

dato che esso ruota istante per istante attorno al punto di contatto. Potremo scrivere quindi l'energia del sistema nella forma

$$E = \frac{1}{2} I \left(\frac{R-b}{R}\right)^2 \dot{\theta}^2 - Mg\,(R-b)\cos\theta \tag{26}$$

Eguagliando l'energia iniziale a quella nell'istante in cui il centro di massa è nella posizione più alta troviamo

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{R-b}{R}\right)^{2}\dot{\theta}_i^2 - Mg\left(R-b\right) = \frac{1}{2}I\left(\frac{R-b}{R}\right)^{2}\dot{\theta}_f^2 + Mg\left(R-b\right) \tag{27}$$

dove I è il momento di inerzia rispetto al punto di contatto e vale $I = 2MR^2$. Questo significa

$$\dot{\theta}_f^2 = \dot{\theta}_i^2 - \frac{4MgR^2}{I\left(R-b\right)} \tag{28}$$

D'altra parte dato che il centro di massa si muove di moto circolare dovremo

$$-M(R-b)\dot{\theta}_f^2 + Mg = -N < 0 \tag{29}$$

avere una accelerazione centripeta positiva

$$M\left(R-b\right)\dot{\theta}_f^2 - Mg = M\left(R-b\right)\dot{\theta}_i^2 - \frac{4M^2gR^2}{I} - Mg > 0 \tag{30}$$

e quindi

$$\theta_i^2 > \frac{3g}{(R-b)} \tag{31}$$

La velocità iniziale del punto A vale

$$v_0 \quad = \quad 2R\omega_i = 2(R-b)\dot{\theta}_i \tag{32}$$

e quindi

$$\frac{v_0^2}{4\left(R-b\right)^2} > \frac{3g}{(R-b)} \tag{33}$$

ossia

$$v_0 > \sqrt{12g\left(R-b\right)} \tag{34}$$

Domanda 2

In un giro completo θ varia di 2π. Dalla relazione tra ω e $\dot{\theta}$ segue che il corpo rigido avrà ruotato di un angolo

$$\alpha = \frac{2\pi\left(R-b\right)}{R} \tag{35}$$

e quindi il punto A si troverà ruotato dello stesso angolo rispetto alla posizione iniziale.

Domanda 3

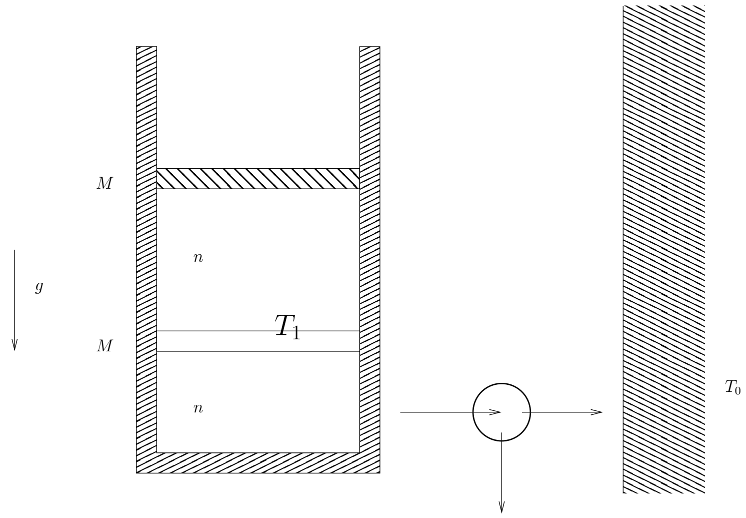
Sviluppando l'energia per piccoli valori di θ si trova

$$E = \frac{1}{2} I \left(\frac{R-b}{R} \right)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M g \left(R - b \right) \theta^2 \tag{36}$$

da cui segue che la frequenza delle piccole oscillazioni vale

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{ M g \left(R-b \right) \frac{R^2}{I \left(R-b \right)^2} } = \frac{1}{2\pi} \sqrt{ \frac{g}{2 \left(R-b \right)} } \tag{37}$$

Esercizio 2



Il recipiente cilindrico in figura di sezione S è diviso in due scomparti da dei setti scorrevoli senza attrito di massa M. Il setto intermedio permette scambi di calore, mentre recipiente e setto superiore sono termicamente isolanti. Ciascuno scomparto contiene n moli di gas perfetto, ad una temperatura iniziale T_1. Si trascuri la pressione atmosferica esterna.

1. Calcolare il volume dei due scomparti.

2. Una macchina ciclica reversibile usa il sistema come sorgente calda, e come sorgente fredda un bagno termico di temperatura $T_0 < T_1$. Determinare il massimo lavoro estraibile.

3. Mentre il sistema è nello stato iniziale si raddoppia istantaneamente la forza di gravità. Determinare la temperatura finale, all'equilibrio termodinamico.

Domanda 1

La pressione dello scomparto in alto vale $P_+ = Mg/S$, quella dello scomparto in basso $P_- = 2Mg/S$. Abbiamo quindi

$$V_{+,0} = \frac{nRT_1}{P_+} = \frac{nSRT_1}{Mg} \tag{38}$$

$$V_{-,0} = \frac{1}{2}V_{+,0} \tag{39}$$

Domanda 2

Detto Q_1 il calore estratto dal sistema e Q_0 quello ceduto al bagno termico avremo per la variazione di entropia

$$\Delta S = \frac{Q_0}{T_0} + 2nc_p \log \frac{T_0}{T_1} = 0 \tag{40}$$

da cui

$$Q_0 = 2nc_p T_0 \log \frac{T_1}{T_0} \tag{41}$$

Invece dal primo principio abbiamo

$$-Q_1 = 2nc_p \left(T_0 - T_1\right) \tag{42}$$

e quindi

$$W = Q_1 - Q_0 = 2nc_p \left(T_1 - T_0\right) \left[1 - \frac{T_0}{T_1 - T_0} \log \frac{T_1}{T_0}\right] \tag{43}$$

Domanda 3

L'energia del sistema si conserva, e vale

$$U = 2Mg \left(\frac{V_+ + V_-}{S}\right) + 2Mg\frac{V_-}{S} + 2nc_V T \tag{44}$$

dove T è la temperatura del gas. Appena la gravità raddoppia i volumi e la temperatura hanno il valore iniziale, quindi

$$U = 2n \left(2R + c_V\right) T_1 \tag{45}$$

mentre nella condizione di equilibrio finale avremo

$$V_+ = \frac{nSRT}{2Mg} \tag{46}$$

$$V_- = \frac{1}{2}V_+ \tag{47}$$

e quindi

$$2n \left(2R + c_V\right) T_1 = 2n \left(R + c_V\right) T \tag{48}$$

da cui

$$T = \frac{2R + c_V}{R + c_V} T_1 \tag{49}$$