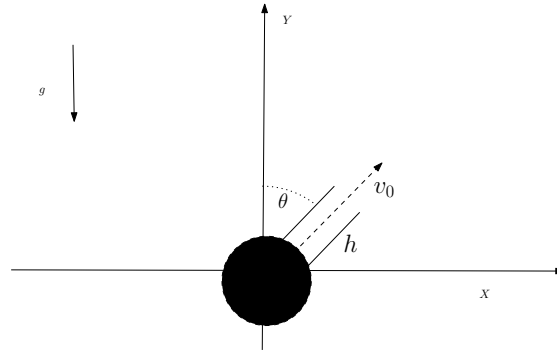


Dipartimento di Fisica - Fisica a I b

Scritto 12 febbraio 2010

Esercizio 1



Un irrigatore da giardino espelle un getto d'acqua da un ugello di lunghezza h orientato come in figura. La velocità dell'acqua relativa all'ugello è costante e vale v_0 , e in tutte le domande che seguono si può considerare il limite $h \rightarrow 0$.

1. Come si deve orientare l'ugello per irrigare il più lontano possibile? Quanto vale la distanza raggiunta in tal caso?
2. Supponendo che θ percorra molto lentamente tutto l'intervallo $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ determinare la regione nella quale una mosca di passaggio corre il rischio di bagnarsi, nella forma $y < y_{max}(x)$.
3. Calcolare la massima distanza raggiunta dall'acqua se l'orientazione dell'ugello varia secondo la legge

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2} \left(-1 + \frac{u}{h} t \right) \quad (1)$$

nell'intervallo $0 < t < 2h/u$, dove u è una costante.

Soluzione

Domanda 1 Le equazioni del moto sono, per un dato θ ,

$$\begin{aligned} x &= v_0 \sin \theta t \\ y &= v_0 \cos \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

e il tempo di volo si trova ponendo $y = 0$:

$$t^* = \frac{2v_0 \cos \theta}{g}$$

Sostituendo troviamo la gittata

$$x(t^*) = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

che è massima per $\theta = \pi/4$. In tale caso vale

$$x_{max}(t^*) = \frac{v_0^2}{g} \quad (2)$$

Domanda 2 La traiettoria si scrive

$$y = \frac{x}{\tan \theta} - \frac{g}{2v_0^2 \sin^2 \theta} x^2 \quad (3)$$

e a fissato x possiamo determinare l'altezza massima raggiunta dall'acqua, massimizzando rispetto all'angolo θ . Conviene riscrivere la traiettoria nella forma

$$y = x \cot \theta - \frac{g}{2v_0^2} (1 + \cot^2 \theta) x^2 \quad (4)$$

e derivare rispetto a $\cot \theta$:

$$\frac{dy}{d \cot \theta} = x - \frac{gx^2}{v_0^2} \cot \theta = 0 \quad (5)$$

Sostituendo si trova

$$y_{max}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{v_0^2}{g} - \frac{gx^2}{v_0^2} \right) \quad (6)$$

Domanda 3 Osserviamo che l'ugello ruota con velocità angolare costante (infinita nel limite $h \rightarrow 0$)

$$\omega = \frac{\pi u}{2h}$$

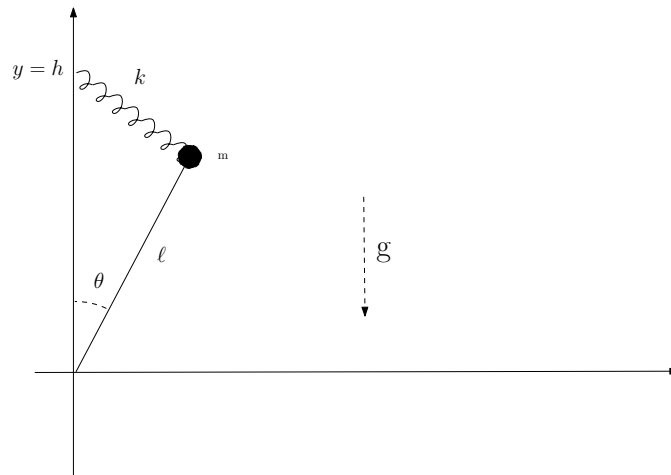
e la sua estremità con velocità $v_T = \frac{\pi}{2}u$. Il modulo della velocità del getto d'acqua all'istante in cui esce dall'ugello sarà quindi

$$V_0 = \sqrt{v_0^2 + \frac{\pi^2}{4}u^2}$$

Per quanto riguarda la direzione, osserviamo che l'angolo ϕ tra il getto e la verticale assumerà sicuramente il valore $\pi/4$ corrispondente alla massima gittata, e quindi quest'ultima sarà data semplicemente da

$$d = \frac{V_0^2}{g} = \frac{v_0^2 + \frac{\pi^2}{4}u^2}{g} \quad (7)$$

Esercizio 2



Un punto materiale di massa m è fissato ad un estremo di un'asta di lunghezza ℓ . L'altro estremo dell'asta, che è priva di massa, è fissato all'origine di un sistema di coordinate cartesiane, ma libero di ruotare. Inoltre la massa è collegata mediante una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k ad un punto posto sulla verticale dell'origine, ad un'altezza $h > 0$.

1. Sotto quali condizioni $\theta = 0$ è una posizione di equilibrio stabile?
2. Nel caso $h = mg/k$ la particella si trova nella posizione $\theta = 0$ con velocità v_0 . Determinare dopo quanto tempo $\theta = \pi$.
3. Nel caso $h = \frac{1}{2}mg/k$ la particella si trova inizialmente in $\theta = 0$ con velocità praticamente nulla. Calcolare la forza applicata dalla sbarra alla particella per $\theta = \pi/2$, sapendo che è diretta orizzontalmente.

Soluzione

Domanda 1 Scriviamo l'energia potenziale, come somma di quella gravitazionale e di quella elastica:

$$U = mg\ell \cos \theta + \frac{1}{2}k \left[(h - \ell \cos \theta)^2 + \ell^2 \sin^2 \theta \right] = \ell (mg - kh) \cos \theta + \text{costante}$$

Per la stabilità è necessario che essa abbia un minimo in $\theta = 0$. Questo accade se

$$h > \frac{mg}{k}$$

Domanda 2 Se $h = mg/k$ il potenziale è costante, in altre parole l'energia è solo quella cinetica

$$E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

e l'equazione del moto da

$$\ddot{\theta} = 0$$

Quindi la velocità angolare è costante, e la particella si muove di moto circolare uniforme. Il tempo necessario a percorrere metà circonferenza sarà quindi

$$\tau = \frac{\pi\ell}{v_0}$$

Domanda 3 In questo caso l'energia si scrive

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mg\ell \cos \theta = \frac{1}{2}mg\ell$$

Possiamo scrivere quindi

$$v^2 = g\ell (1 - \cos \theta) \quad (8)$$

che calcolato in $\theta = \pi/2$ dà il quadrato della velocità quando la particella arriva nella posizione finale desiderata.

Scriviamo l'equazione del moto nella direzione orizzontale che deve valere in tale istante:

$$-m\frac{v^2}{\ell} = F - k\ell \quad (9)$$

dove F è la forza cercata. Sostituendo troviamo

$$F = k\ell - mg \quad (10)$$