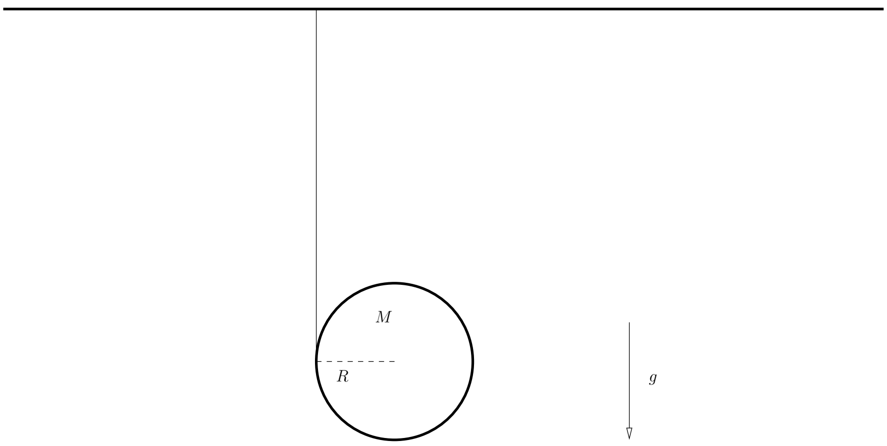
Dipartimento di Fisica - Fisica a II b

Scritto 12 febbraio 2010

Esercizio 1



Il disco in figura, inizialmente in quiete, ha raggio R e massa M. Attorno ad esso è avvolto un filo inestensibile con densità lineare di massa λ. La lunghezza della parte avvolta è ℓ, ed il filo è diretto verticalmente.

1. Dire se nella caduta successiva il filo rimane verticale, giustificando la risposta.
2. Scelta come coordinata la quota del centro del disco scrivete l'equazione del moto del sistema, e risolvetela per $\lambda = 0$.
3. Calcolare la velocità del centro di massa del sistema quando il filo si è completamente dipanato, cioè quando il disco è sceso di un tratto ℓ, per un valore generico di λ.

Soluzione

Domanda 1 Supponiamo che il filo resti verticale. Allora sul sistema filo+disco agiscono solo forze verticali (la tensione e la forza peso), e il centro di massa non si muove orizzontalmente. Se $\lambda = 0$ il centro di massa coincide col centro del disco, quindi la caduta a filo verticale è una soluzione accettabile. Se $\lambda > 0$ invece il centro di massa accelera rispetto al centro del disco durante la caduta anche in orizzontale, si ha quindi un'inconsistenza. Questo effetto sarà trascurabile se $\lambda R/M \ll 1$.

Domanda 2 Supponiamo che il moto avvenga veramente in verticale, e trascuriamo effetti legati al dettaglio della distribuzione del filo sul disco. Fissiamo un sistema di riferimento con origine nel punto in cui il centro del disco si trova inizialmente, ed indichiamo con z la quota di questo ad un istante generico. Possiamo allora scrivere l'energia del sistema nella forma

$$E = \frac{1}{2} I(z)\dot{\theta}^2 + U_{disco}(z) + U_{filo}(z)$$

dove U_{disco} è il potenziale gravitazionale del disco, che possiamo scrivere come

$$U_{disco}(z) = Mgz$$

L'energia potenziale del filo si può scrivere come somma di due termini:

$$U_{filo}(z) = \lambda\,(\ell + z)\,gz + (-\lambda z)\,g\frac{z}{2}$$

Il primo tiene conto dell'energia potenziale del filo ancora avvolto al disco, che corrisponde ad una massa totale $\lambda\,(\ell + z)$ ad una quota z. Il secondo tiene conto dell'energia della parte di filo che si è srotolato, corrispondente ad una massa $-\lambda z$ alla quota $z/2$ del suo centro di massa. Si poteva arrivare allo stesso risultato calcolando il lavoro fatto dalla forza peso sul centro del disco:

$$\mathcal{L}(z) = \int_0^z \left\{-\left[M + \lambda\,(\ell + z)\right] g\right\} dz$$

dove il termine tra parentesi graffe è appunto la forza peso dovuta al disco ed al filo ancora avvolto ad esso. Integrando si trova

$$-\mathcal{L}(z) = \left[Mz + \lambda\ell z + \lambda\frac{z^2}{2}\right] g$$

che corrisponde a $U_{filo} + U_{disco}$.

$I(z)$ il momento di inerzia del disco e del filo ad esso avvolto rispetto al punto di separazione del filo, istantaneamente immobile

$$I(z) = \left\{\frac{1}{2}MR^2 + MR^2\right\} + \left\{\lambda\left(\ell + z\right)R^2 + \lambda\left(\ell + z\right)R^2\right\}$$

Il primo termine tra parentesi graffe è il contributo del disco (momento di inerzia rispetto al centro di massa più contributo dettato dal teorema di Steiner) e il second quello del filo (come sopra, tenendo conto che tutto il filo si trova al bordo del disco). In conclusione possiamo scrivere l'energia, tenendo conto del fatto che $\dot{z} = \dot{\theta}/R$, nella forma

$$E = \frac{1}{2}I\frac{\dot{z}^2}{R^2} + \left[Mz + \lambda\ell z + \lambda\frac{z^2}{2}\right] g$$

Derivando rispetto al tempo (indichiamo con l'apice la derivata rispetto a z) otteniamo

$$\dot{E} = IR^{-2}\dot{z}\ddot{z} + \frac{1}{2}I'R^{-2}\dot{z}^3 + \left(M + \lambda\ell + \lambda z\right)g\dot{z} = 0$$

dove si è indicato con l'apice la derivata rispetto a z:

$$I' = 2\lambda R^2$$

e quindi l'equazione del moto

$$\left[\frac{3}{2}M + 2\lambda\left(\ell + z\right)\right]\ddot{z} + \lambda\dot{z}^2 + \left(M + \lambda\ell + \lambda z\right)g = 0$$

Ponendo $\lambda = 0$ questa diviene

$$\frac{3}{2}M\ddot{z} + Mg = 0$$

cioè

$$\ddot{z} = -\frac{2}{3}g$$

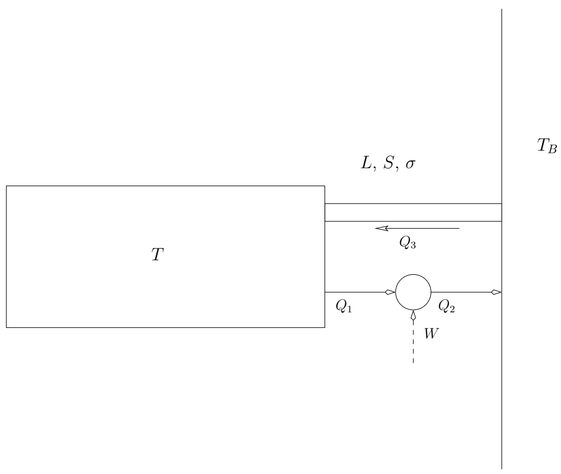
Domanda 3 Uguagliamo l'energia calcolata precedentemente tra la configurazione iniziale ($z = 0$, $\dot{z} = 0$) e quella finale ($z = -\ell$, $\dot{z} = v_{cm}$):

$$0 = \frac{1}{2}I(-\ell)R^{-2}v_{cm}^2 - M_1(-\ell)g\ell - M_2(-\ell)g\frac{\ell}{2}$$

da cui

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}g\ell\left(1 + \frac{\lambda\ell}{2M}\right)}$$

Esercizio 2



Un corpo di capacità termica costante è posto in contatto termico con un bagno termico di temperatura T_B mediante una sbarra di lunghezza L, sezione S e conducibilità termica σ. Si vuole mantenere la sua temperatura ad un valore $T = T_B/2$ estraendo calore mediante una macchina termica reversibile, come in figura.

1. Calcolare la potenza W che è necessario fornire alla macchina.
2. Determinare l'aumento di entropia dell'universo per unità di tempo.
3. Se inizialmente $T = T_B$ e alla macchina termica viene fornita la potenza W precedentemente determinata, si riesce a raffreddare il corpo alla temperatura voluta? Giustificare la risposta.

Soluzione

Domanda 1 Il flusso di calore $\dot{Q}_3$ è determinato dalla legge della conduzione termica:

$$\dot{Q}_3 = \frac{S\sigma}{L}(T_B - T) = \frac{S\sigma}{2L}T_B$$

e se la temperatura del corpo resta stazionaria deve essere $\dot{Q}_1 = \dot{Q}_3$. Dal primo principio abbiamo che

$$W = \dot{Q}_2 - \dot{Q}_1$$

e dato che la macchina termica è reversibile deve essere

$$dS = -\frac{dQ_1}{T} + \frac{dQ_2}{T_B} = 0$$

da cui

$$\frac{2}{T_B}\dot{Q}_1 = \frac{1}{T_B}\dot{Q}_2$$

In conclusione

$$W = 2\dot{Q}_1 - \dot{Q}_1 = \frac{S\sigma}{2L}T_B$$

Domanda 2 Dato che lo stato termodinamico del corpo, della sbarra e della macchina ciclica non cambia dopo un ciclo, dobbiamo considerare solo la variazione di entropia del bagno termico:

$$dS = -\frac{dQ_3}{T_B} + \frac{dQ_2}{T_B}$$

da cui

$$\dot{S} = \frac{1}{T_B}\left(\dot{Q}_2 - \dot{Q}_3\right) = \frac{S\sigma}{2L}$$

Domanda 3 La risposta è positiva, perchè il lavoro necessario ad estrarre una data quantità di calore dal corpo diminuisce all'aumentare di $T_B - T$. Più in dettaglio, abbiamo come in precedenza per il primo principio, la legge di conduzione e la reversibilità

$$\begin{aligned} W &= \dot{Q}_2 - \dot{Q}_1 && (1)\\ \dot{Q}_3 &= \frac{S\sigma}{L}(T_B - T) \\ \frac{1}{T}\dot{Q}_1 &= \frac{1}{T_B}\dot{Q}_2 && (2) \end{aligned}$$

e la variazione della temperatura del corpo sarà data da

$$C\dot{T} = \dot{Q}_3 - \dot{Q}_1$$

dove C è la capacità termica. Dalle equazioni (1) e (2) segue

$$\dot{Q}_1 = \frac{T}{T_B - T}W = \frac{TT_B}{T_B - T}\frac{S\sigma}{2L} \qquad (3)$$

e sostituendo nell'ultima otteniamo

$$C\dot{T} = \frac{S\sigma}{2L}\left(\frac{T_B - 2T}{T_B - T}\right)T_B$$

che permette di concludere che $\dot{T} < 0$ per $T < T_B/2$. Possiamo anche risolvere esplicitamente l'equazione differenziale:

$$\int \left(\frac{T_B - T'}{T_B - 2T'} \right) dT' = \frac{S\sigma T_B}{2LC} t + c_1$$

(c_1 è una costante di integrazione) ottenendo

$$\frac{T(t) - T_B}{2} - \frac{1}{4} T_B \log \left[2 \frac{T(t)}{T_B} - 1 \right] = \frac{S\sigma T_B}{2LC} t \tag{4}$$

ed è chiaro che

$$\lim_{t \to +\infty} T(t) = \frac{T_B}{2}$$

Possiamo anche studiare l'andamento asintotico ponendo

$$T(t) = \frac{T_B}{2} + \delta T$$

con $\delta T \ll 1$, che sostituito nella soluzione fornisce

$$\delta T(t) \simeq \frac{T_B}{2e} \exp \left(-\frac{2S\sigma}{LC} t \right) \tag{5}$$