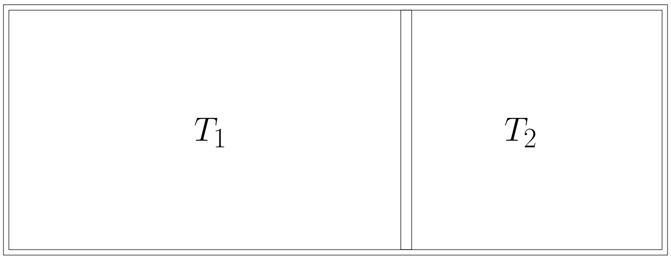
Dipartimento di Fisica - Fisica I b

Compitino 31 maggio 2010

Esercizio 1



Il recipiente in figura ha un volume totale V, ed è impermeabile al calore. Viene diviso in due parti mediante un setto mobile, pure impermeabile al calore. In ogni scomparto si trova una mole dello stesso gas perfetto, ad una temperatura T_1 (a sinistra) e T_2 (a destra).

1. Determinare le pressioni e i volumi dei due scomparti.
2. Si permette il passaggio di calore tra i due scomparti, fino a quando viene raggiunto nuovamente l'equilibrio. Si determini la variazione di entropia del sistema.
3. Impedendo nuovamente il passaggio di calore, si sposta il pistone reversibilmente fino a ottenere i volumi iniziali. Determinare il lavoro fatto sul sistema.

Soluzione

Domanda 1

L'equilibrio meccanico richiede che i gas siano alla stessa pressione. Possiamo quindi scrivere

$$\frac{nRT_1}{V_1} = \frac{nRT_2}{V_2} \tag{1}$$

$$V = V_1 + V_2 \tag{2}$$

e risolvendo per i volumi otteniamo

$$V_1 = \frac{T_1}{T_1+T_2}V \tag{3}$$

$$V_2 = \frac{T_2}{T_1+T_2}V \tag{4}$$

e per la pressione

$$P = \frac{nRT_1}{V_1} = \frac{nR}{V}(T_1+T_2) \tag{5}$$

Domanda 2

La trasformazione è irreversibile. Non viene fatto lavoro sul sistema, e neppure viene scambiato calore. Dal primo principio segue quindi $\Delta U = 0$. Detta T_f la temperatura finale abbiamo quindi

$$nc_V T_1 + nc_V T_2 = 2nc_V T_f \tag{6}$$

e quindi

$$T_f = \frac{T_1+T_2}{2} \tag{7}$$

Segue che i volumi finali saranno entrambi $V/2$. Per la variazione di entropia abbiamo quindi

$$\Delta S = 2nc_V \ln T_f + 2nR\ln\frac{V}{2} - nc_V\ln T_1 - nc_V \ln T_2 - nR\ln V_1 - nR\ln V_2 \tag{8}$$

$$= nc_V \ln\frac{T_f^2}{T_1T_2} + nR\ln\frac{V^2}{4V_1V_2} \tag{9}$$

$$= nc_V \ln\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2} + nR\ln\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2} \tag{10}$$

$$= 2nc_P \ln\left(\frac{T_1+T_2}{2\sqrt{T_1T_2}}\right) \tag{11}$$

Domanda 3

Dato che non viene fornito calore al sistema, il lavoro fatto sarà uguale alla variazione dell'energia interna:

$$L_{ext} = nc_V \left(T_1' + T_2' - 2T_f\right) \tag{12}$$

In ciascun scomparto avviene una trasformazione adiabatica, per la quale

$$TV^{\gamma-1} = \text{costante} \tag{13}$$

e quindi

$$T_1' V_1^{\gamma-1} = T_f \left(\frac{V}{2}\right)^{\gamma-1} \tag{14}$$

$$T_2' V_2^{\gamma-1} = T_f \left(\frac{V}{2}\right)^{\gamma-1} \tag{15}$$

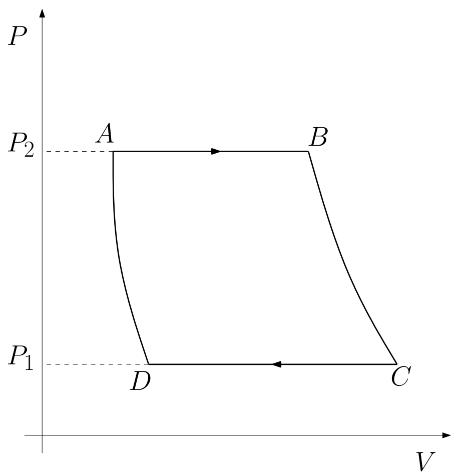
da cui

$$L_{ext} = nc_V T_f \left[\left(\frac{V}{2V_1}\right)^{\gamma-1} + \left(\frac{V}{2V_2}\right)^{\gamma-1} - 2\right] \tag{16}$$

$$= nc_V \frac{T_1+T_2}{2}\left[\left(\frac{T_1+T_2}{2T_1}\right)^{\gamma-1} + \left(\frac{T_1+T_2}{2T_2}\right)^{\gamma-1} - 2\right] \tag{17}$$

$$= nc_V \left[T_1\left(\frac{T_1+T_2}{2T_1}\right)^{\gamma} + T_2\left(\frac{T_1+T_2}{2T_2}\right)^{\gamma} - T_1 - T_2\right] \tag{18}$$

Esercizio 2



Una mole di gas perfetto monoatomico viene utilizzata per una trasformazione ciclica reversibile come in figura. Inizialmente si fa espandere il gas ad una pressione costante P_2, in modo che il rapporto tra volume iniziale e finale sia $k < 1$. Segue un'ulteriore espansione adiabatica che porta la pressione a $P_1 < P_2$, una compressione a pressione P_1 costante ed una compressione adiabatica che riporta il sistema nello stato iniziale.

1. Rappresentare il ciclo nel piano $T - S$, determinando esplicitamente la dipendenza della temperatura dall'entropia per le trasformazioni a pressione costante.

2. Calcolare l'efficienza del ciclo in funzione dei volumi V_A, V_B, V_C e V_D o, facoltativamente, in funzione del solo rapporto P_1/P_2.

3. Come cambia l'efficienza se le trasformazioni adiabatiche avvengono in modo irreversibile, variando bruscamente la pressione esterna da P_1 a P_2 e viceversa (ad esempio appoggiando/togliendo una certa massa sul/dal pistone che chiude il contenitore del gas)?

Soluzione

Domanda 1

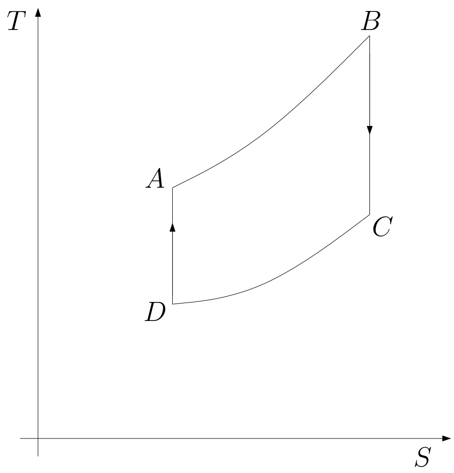
In una trasformazione a pressione costante

$$dS = c_P \frac{dT}{T} \tag{19}$$

e quindi la temperatura dipende esponenzialmente dall'entropia

$$S - S_0 = c_p \ln \frac{T}{T_0}, \quad T = T_0 e^{(S-S_0)/c_P} \tag{20}$$

Quindi i cicli si rappresentano come in figura



Domanda 2

Per il calcolo dell'efficienza possiamo basarci sulla rappresentazione nel piano $T - S$. Il calore assorbito sarà

$$\begin{aligned} Q_{ass} &= \int_{S_A}^{S_B} T dS = \int_{S_A}^{S_B} T_A e^{(S-S_A)/c_P} dS & (21) \\ &= c_P T_A \left(e^{\Delta S_{BA}/c_P} - 1 \right) & (22) \end{aligned}$$

e il lavoro

$$W = Q_{ass} - Q_{ced} = c_P \left(T_A - T_D \right) \left(e^{\Delta S_{CD}/c_P} - 1 \right) \tag{23}$$

da cui (tenendo conto che $\Delta S_{CD} = \Delta S_{BA}$)

$$\eta = \frac{W}{Q_{ass}} = \left(1 - \frac{T_D}{T_A} \right) \tag{24}$$

Dato che gli stati A e D sono connessi da un'adiabatica reversibile abbiamo

$$P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_A = P_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_D \tag{25}$$

che permette di scrivere l'efficienza in funzione delle pressioni note

$$n\eta = 1 - \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Domanda 3

In questo caso possiamo scrivere per il calore assorbito

$$Q_{ass} = c_P \left(T_B - T_A \right) = \frac{c_P}{R} P_2 \left(V_B - V_A \right) \tag{26}$$

e per il lavoro fatto sul sistema

$$\begin{aligned}
-L_{ext} &= P_2\left(V_B - V_A\right) + P_1\left(V_C - V_B\right) + P_1\left(V_D - V_C\right) + P_2\left(V_A - V_D\right) && (27)\\
&= P_2\left(V_B - V_D\right) + P_1\left(V_D - V_B\right) && (28)\\
&= \left(P_2 - P_1\right)\left(V_B - V_D\right) && (29)
\end{aligned}$$

Alternativamente potremmo scrivere anche il lavoro come differenza tra calore assorbito e calore ceduto, dato che l'energia interna non cambia alla fine del ciclo,

$$\begin{aligned}
-L_{ext} &= Q_{ass} - Q_{ced} && (30)\\
&= c_P\left(T_B - T_A\right) + c_P\left(T_D - T_C\right) && (31)\\
&= \frac{c_P}{R} P_2\left(V_B - V_A\right) + \frac{c_P}{R} P_1\left(V_D - V_C\right) && (32)
\end{aligned}$$

Questa espressione è identica alla precedente, infatti sulle due adiabatiche

$$\begin{aligned}
P_1\left(V_B - V_C\right) &= c_V\left(T_C - T_B\right) = \frac{c_V}{R}\left(P_1 V_C - P_2 V_B\right) && (33)\\
P_2\left(V_D - V_A\right) &= c_V\left(T_A - T_D\right) = \frac{c_V}{R}\left(P_2 V_A - P_1 V_D\right) && (34)
\end{aligned}$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{c_P}{R} V_C P_1 &= V_B\left(P_1 + \frac{c_V}{R} P_2\right) && (35)\\
\frac{c_P}{R} V_A P_2 &= V_D\left(P_2 + \frac{c_V}{R} P_1\right) && (36)
\end{aligned}$$

che sostituite nella (32) danno

$$\begin{aligned}
-L_{ext} &= \frac{c_P}{R} P_2 V_B - \frac{c_P}{R} P_2 V_A + \frac{c_P}{R} P_1 V_D - \frac{c_P}{R} P_1 V_C && (37)\\
&= \frac{c_P}{R} P_2 V_B - V_D\left(P_2 + \frac{c_V}{R} P_1\right) + \frac{c_P}{R} P_1 V_D - V_B\left(P_1 + \frac{c_V}{R} P_2\right) && (38)\\
&= V_B\left(\frac{c_P}{R} P_2 - P_1 - \frac{c_V}{R} P_2\right) + V_D\left(\frac{c_P}{R} P_1 - P_2 - \frac{c_V}{R} P_1\right) && (39)\\
&= V_B\left(P_2 - P_1\right) + V_D\left(P_1 - P_2\right) && (40)
\end{aligned}$$

L'efficienza è quindi

$$\eta_{irr} = \frac{R}{c_P}\left(1 - r\right)\frac{V_B - V_D}{V_B - V_A} \qquad (41)$$

oppure

$$\eta_{irr} = 1 - r\frac{\left(V_C - V_D\right)}{\left(V_B - V_A\right)} \qquad (42)$$

Sostituendo V_C e V_D otteniamo

$$\begin{aligned}
\eta_{irr} &= 1 - \frac{r}{\left(V_B - V_A\right)}\left[\frac{R}{c_P} V_B\left(1 + \frac{c_V}{R}\frac{P_2}{P_1}\right) - \frac{c_P}{R}\frac{V_A P_2}{\left(P_2 + \frac{c_V}{R} P_1\right)}\right] && (43)\\
&= 1 - \frac{r}{(1-k)}\left[\frac{R}{c_P}\left(1 + \frac{c_V}{rR}\right) - \frac{c_P}{R}\frac{k}{\left(1 + r\frac{c_V}{R}\right)}\right] && (44)\\
&= 1 - \frac{1}{(1-k)}\left[\frac{(\gamma-1)r+1}{\gamma} + \frac{k}{\gamma - 1 + r}\right] && (45)
\end{aligned}$$

Notare che $\eta_{irr} < \eta$ se $r > 0$ e $k > 0$:

$$\eta_{irr} = 1 - \frac{1}{(1-k)}\left[\frac{(\gamma-1)r+1}{\gamma} + \frac{k}{\gamma - 1 + r}\right] < 1 - \left[\frac{(\gamma-1)r+1}{\gamma}\right] < 1 - r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \qquad (46)$$