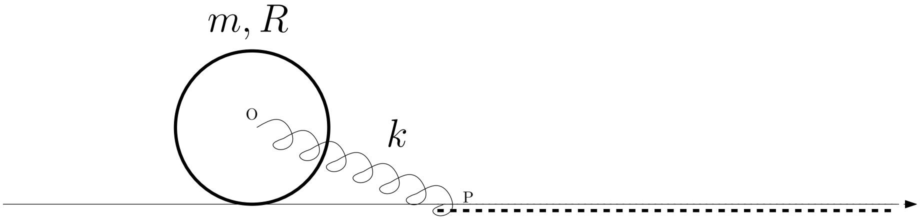
Esercizio 1 (fisica Ib e fisica II vecchio ordinamento)



Un cilindro di massa m e raggio R è appoggiato su un piano orizzontale, e il suo centro O è collegato ad un punto P del piano da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Inizialmente il punto di appoggio del cilindro si trova a sinistra di P, ad una distanza a da esso. Nella regione a sinistra di P non vi sono attriti, mentre a destra di P il cilindro è vincolato a rotolare senza strisciare. Il cilindro è inizialmente fermo.

1. Determinare la velocità angolare del cilindro e quella del suo centro di massa quando il punto di contatto arriva in P (immediatamente prima).

2. Determinare il massimo allontanamento successivo del punto di contatto da P.

3. Sempre supponendo che il centro di massa del cilindro sia inizialmente immobile, trovare se possibile una velocità angolare iniziale ω_0 per la quale il cilindro ritorna nel punto di partenza dopo una oscillazione completa.

Soluzione

Domanda 1 Le forze che agiscono sul cilindro sono quelle della molla e la forza peso (applicate al centro) e la reazione vincolare al punto di appoggio. Nessuna di queste ha momento rispetto al centro di massa, quindi il momento angolare rispetto ad esso (e quindi la velocità angolare) rimangono nulle.

Per quanto riguarda la velocità del centro di massa immediatamente a sinistra di P, $v_{cm,0}$applichiamo la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}k\left(a^2+R^2\right)=\frac{1}{2}mv_{cm,0}^2+\frac{1}{2}kR^2$$

da cui troviamo

$$v_{cm,0}=a\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Domanda 2 Nel passaggio dal punto all'immediata sinistra a quello all'immediata destra di P si conserva il momento angolare del cilindro, valutato rispetto al punto di contatto. Questo perchè nessuna delle forze esterne (forza peso, forza della molla, reazione del piano) ha momento rispetto a P. Abbiamo quindi

$$mv_{cm,0}R=I\omega_1$$

dove ω_1 è la velocità angolare del cilindro immediatamente a destra di P e $I = \frac{3}{2}mR^2$ il suo momento di inerzia (sempre relativo a P). Quindi

$$\omega_1 = \frac{mR}{I} v_{cm,0} = \frac{2}{3}\frac{v_{cm,0}}{R} = \frac{2}{3}\frac{a}{R}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Da questo momento si conserva l'energia, il massimo allontanamento ℓ si può determinare quindi scrivendo

$$\frac{1}{2}I\omega_1^2 + \frac{k}{2}R^2 = \frac{k}{2}\left(R^2 + \ell^2\right)$$

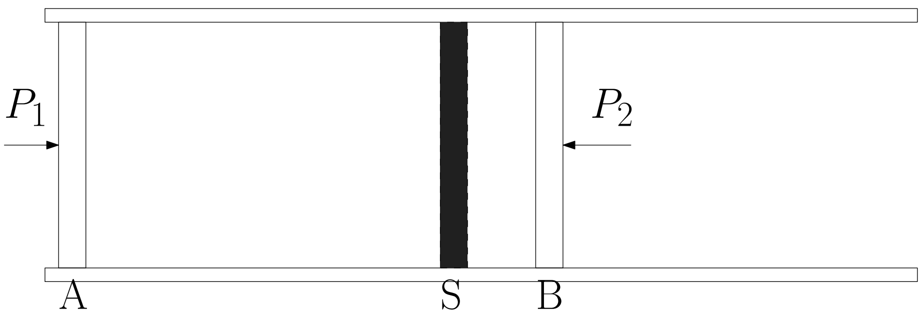
ossia

$$\ell = \sqrt{\frac{I}{k}}\omega_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}a$$

Domanda 3 Quando arriva alla immediata sinistra di P il centro di massa del cilindro avrà la velocità $v_{cm,0}$ determinata precedentemente. Per tornare al punto di partenza è necessario che non perda energia nel passaggio all'immediata destra. Questo accade se la reazione vincolare non compie lavoro, cioè se il punto di contatto è istantaneamente immobile. Quindi immediatamente a sinistra di P il cilindro deve essere già in condizioni di puro rotolamento, e questo accadrà se

$$\omega_0 = -\frac{v_{cm,0}}{R}$$

Esercizio 2 (fisica Ib e fisica II vecchio ordinamento)



Un certo fluido è descritto dalle equazioni di stato

$$\begin{aligned} P &= \frac{U}{V} \\ T &= 3B\left(\frac{1}{n}\frac{U^2}{V}\right)^{1/3} \end{aligned}$$

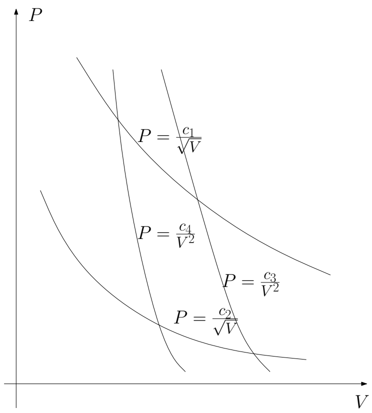
dove B è una costante positiva e P, V, T, U, n hanno il significato usuale.

1. Rappresentare un ciclo di Carnot nel piano $P-V$, dopo avere determinato le necessarie leggi di dipendenza della pressione dal volume.

2. Determinare l'entropia del fluido in funzione di P, V ed n.
3. n moli del fluido vengono poste inizialmente nello scomparto a sinistra in figura, ad una temperatura T_1. Sul pistone A agisce una pressione esterna costante P_1, che spinge il fluido nello scomparto a destra attraverso un setto poroso S intermedio. Durante tutto il processo sul pistone B agisce una pressione costante $P_2 < P_1$. Determinare la temperatura finale del fluido dopo che questo è completamente passato a destra, e si è raggiunto nuovamente l'equilibrio termodinamico.

Soluzione

Domanda 1



Ricavando l'energia dalla prima equazione di stato e sostituendo nella seconda troviamo

$$T = 3B\left(\frac{1}{n}P^2V\right)^{1/3}$$

quindi in un'isoterma

$$P^2V = n\left(\frac{T}{3B}\right)^3 = \text{costante}$$

In un'adiabatica abbiamo

$$dQ = dU + PdV = 0$$

e quindi

$$d(PV) + PdV = 2PdV + VdP = 0$$

Da questo segue che

$$2\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0$$

e integrando

$$PV^2 = \text{costante}$$

Per il ciclo di Carnot abbiamo quindi la rappresentazione in figura.

Domanda 2 Il differenziale dell'entropia si può scrivere

$$\begin{aligned} dS &= \frac{dQ}{T} = \frac{n^{1/3}}{3B}\left(\frac{VdP + 2PdV}{P^{2/3}V^{1/3}}\right) \\ &= \frac{n^{1/3}}{3B}\left(\frac{V^{2/3}}{P^{2/3}}dP + 2\frac{P^{1/3}}{V^{1/3}}dV\right) \end{aligned}$$

ma dato che

$$dS = \frac{\partial S}{\partial P}dP + \frac{\partial S}{\partial V}dV$$

deve essere

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial P} &= \frac{1}{3}\frac{n^{1/3}}{B}\frac{V^{2/3}}{P^{2/3}} \\ \frac{\partial S}{\partial V} &= \frac{2}{3}\frac{n^{1/3}}{B}\frac{P^{1/3}}{V^{1/3}} \end{aligned}$$

Integrando la prima equazione otteniamo

$$S = \frac{n^{1/3}}{B}V^{2/3}P^{1/3} + A(V)$$

dove A è una funzione incognita del volume. Se integriamo la seconda troviamo invece

$$S = \frac{n^{1/3}}{B}P^{1/3}V^{2/3} + B(P)$$

dove B è una funzione incognita della pressione. Confrontando troviamo che deve essere $A(V) = B(P) = C$ con C costante. Quindi

$$S = \frac{1}{2}\left(nPV^2\right)^{1/3} + C$$

In accordo con quanto determinato precedentemente, vediamo che in una adiabatica reversibile l'entropia non cambia.

Domanda 3 Dal primo principio segue che

$$U_2 = U_1 + P_1V_1 - P_2V_2$$

quindi le entalpie dello stato iniziale e di quello finale sono le stesse. Per il fluido considerato

$$H = U + PV = 2PV$$

e quindi

$$P_1V_1 = P_2V_2$$

D'altra parte dalle equazioni di stato segue che

$$PV = \frac{n}{P}\left(\frac{T}{3B}\right)^3$$

e quindi

$$\frac{n}{P_1}\left(\frac{T_1}{3B}\right)^3 = \frac{n}{P_2}\left(\frac{T_2}{3B}\right)^3$$

cioè

$$T_2 = T_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/3}$$

Esercizio 3 (fisica I vecchio ordinamento)

Una pallina di massa m, che si può approssimare come un punto materiale, si trova inizialmente in quiete su in piano orizzontale privo di attrito. Un corpo della forma in figura (il profilo superiore è un quarto di circonferenza di raggio R), di uguale massa, viene lanciato verso di esso con velocità iniziale v_0.

1. Per quale valore della velocità iniziale v_0^* la pallina giunge alla sommità del corpo?

2. Supponendo $v_0 < v_0^*$ determinare la velocità del corpo quando la pallina raggiunge l'altezza massima.

3. Supponendo adesso $v_0 > v_0^*$, determinare la forza applicata dalla pallina al corpo al momento del distacco da esso.

Soluzione

Domanda 1 Usando la conservazione dell'energia nel sistema del centro di massa abbiamo

$$\frac{1}{2}\mu\left(v_0^*\right)^2 = mgR$$

dove $\mu = m/2$ è la massa ridotta. Segue

$$v_0^* = \sqrt{4gR}$$

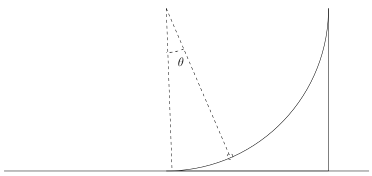
Domanda 2 Quando la pallina raggiunge l'altezza massima si muove con la stessa velocità V (orizzontale) del corpo. Dalla conservazione della quantità di moto orizzontale troviamo

$$mv_0 = 2mV$$

e quindi

$$V = \frac{v_0}{2}$$

Domanda 3



Detta X la posizione orizzontale del centro dell'arco di circonferenza, e θ l'angolo che determina la posizione della pallina su di esso come in figura, possiamo scrivere la quantità di moto orizzontale come

$$P = m\left(2\dot{X} + R\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

Da questa seconda relazione otteniamo

$$m\dot{X} = \frac{1}{2}\left(P - mR\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

e derivando abbiamo la forza applicata al corpo

$$F = m\ddot{X} = \frac{1}{2}\left(mR\dot{\theta}^2\sin\theta - mR\ddot{\theta}\cos\theta\right)$$

Al momento del distacco $\theta = \pi/2$ e quindi

$$F = \frac{1}{2}mR\dot{\theta}^2$$

Ricaviamo $\dot{\theta}^2$ dalla conservazione dell'energia. Nel momento del distacco l'energia nel sistema del centro di massa vale

$$E = \frac{1}{2}\mu R^2\dot{\theta}^2 + mgR = \frac{1}{2}\mu v_0^2$$

e quindi

$$\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R^2} - \frac{4g}{R}$$

da cui

$$F = \frac{m}{2R}\left(v_0^2 - 4gR\right)$$

Notare che $F = 0$ se $v_0 = v_0^*$.

Esercizio 4 (fisica I vecchio ordinamento)

Un punto materiale di massa m si muove in un piano orizzontale, confinato in una regione circolare di raggio R da una parete cilindrica su cui può rimbalzare elasticamente. Il punto è inoltre fissato al centro della regione da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Ricordiamo che in assenza della parete le orbite sono ellittiche.

1. Per quali valori dell'energia E_0 e del momento angolare iniziale L_0 (valutato rispetto al centro della regione) la particella urta le pareti?
2. Per quali valori del momento angolare sono possibili orbite circolari?
3. Calcolare l'impulso ceduto alle pareti in un urto, in funzione di E_0 e L_0.

Soluzione

Domanda 1 Senza le pareti possiamo scrivere l'energia totale (conservata) nella forma

$$E_0 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{k}{2}r^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2}$$

dove L è il momento angolare rispetto al centro, pure conservato. Il massimo e il minimo allontanamento dal centro sono determinati da $\dot{r} = 0$, ossia

$$r^4 - \frac{2E_0}{k}r^2 + \frac{L_0^2}{km} = 0$$

Risolvendo troviamo

$$r^2 = \frac{E_0}{k} \pm \sqrt{\frac{E_0^2}{k^2} - \frac{L_0^2}{km}}$$

da cui la condizione per avere un urto

$$\frac{E_0}{k} + \sqrt{\frac{E_0^2}{k^2} - \frac{L_0^2}{km}} > R$$

Domanda 2 In un'orbita circolare la distanza massima e minima dal centro coincidono. Dall'equazione scritta precedentemente segue che deve essere

$$\frac{E_0^2}{k^2} = \frac{L_0^2}{km}$$

Inoltre

$$r^2 = \frac{E_0}{k} = \frac{|L_0|}{\sqrt{km}}$$

da cui si trova che orbite circolari saranno possibili per

$$|L_0| < R^2\sqrt{km}$$

Domanda 3 Quando arriva ad urtare contro la parete la particella ha una quantità di moto radiale $p_r = m\dot{r}$ determinata da

$$E_0 = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{k}{2}R^2 + \frac{L_0^2}{2mR^2}$$

ossia, risolvendo,

$$p_r = \sqrt{2m\left(E_0 - \frac{k}{2}R^2 - \frac{L_0^2}{2mR^2}\right)}$$

Nell'urto p_r cambia di segno, mentro la quantità di moto tangenziale resta costante. L'impulso ceduto, in direzione radiale. è dunque

$$-\Delta p_r = 2\sqrt{2m\left(E_0 - \frac{k}{2}R^2 - \frac{L_0^2}{2mR^2}\right)}$$