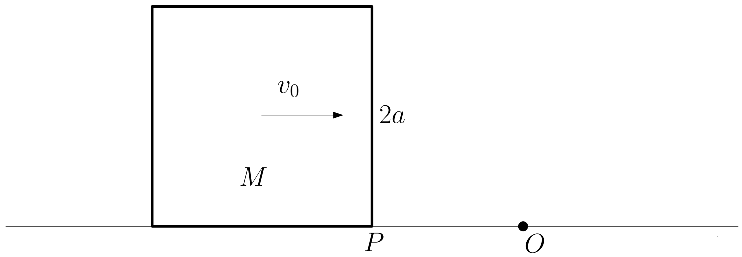
Esercizio 1 (fisica Ib e fisica II vecchio ordinamento)



Il cubo in figura di lato $2a$ e massa M si muove con velocità iniziale v_0 su un piano privo di attrito. Può ruotare liberamente attorno al suo spigolo P, ma quest'ultimo non può staccarsi dal piano orizzontale. Nel punto O si trova un ostacolo che impedisce il passaggio di P.

1. Nell'ipotesi che P rimanga fissato ad O trovare una quantità conservata durante l'urto e calcolarne il valore immediatamente dopo questo. La quantità scelta continua a conservarsi anche successivamente?

2. Nella stessa ipotesi della domanda precedente, per quale valore di minimo di v_0 il cubo si capovolge in avanti.

3. Determinare le componenti della velocità del centro di massa del cubo immediatamente dopo l'urto.

Soluzione

Domanda 1 Scegliendo come polo il punto O, vediamo che durante l'urto le uniche forze rilevanti sono quelle impulsive applicate in esso. Quindi non si hanno momenti impulsivi rispetto ad O, e il momento angolare si conserva. Dato che inizialmente il cubo non ruota si ha

$$\vec{L} = -Mv_0 a\hat{z}$$

con $\hat{z}$ scelto uscente dal piao della figura. Successivamente L non si conserva, poichè la forza di gravità ha momento non nullo rispetto ad O.

Domanda 2 Usando la conservazione di L determiniamo la velocità angolare ω_0 del cubo immediatamente dopo l'urto. Si ha

$$L = -Mv_0 a = I\omega_0$$

dove I è il momento di inerzia del cubo rispetto a P. Dato che da questo momento si conserva l'energia, affinchè il cubo si capovolga deve essere

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 + Mga > Mga\sqrt{2}$$

cioè

$$\omega_0^2 > \frac{2Mga}{I}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

e quindi

$$v_0^2 > \frac{2gI}{Ma}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

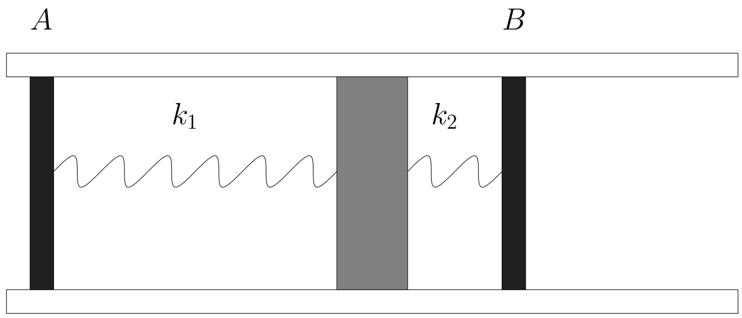
Domanda 3 Dato che conosciamo un punto fisso, possiamo scrivere

$$\vec{v}_{cm} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{cm}$$

ossia

$$\vec{v}_{cm} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ -a & a & 0 \end{vmatrix} = -a\omega_0\hat{x} - a\omega_0\hat{y} = \frac{Ma^2v_0}{I}\left(\hat{x}+\hat{y}\right)$$

Esercizio 2 (fisica Ib e fisica II vecchio ordinamento)



Il cilindro in figura, di sezione S, è diviso un due parti da un setto intermedio poroso e chiuso da ambo i lati da pistoni mobili (A e B), collegati al setto intermedio da due molle di costanti elastiche k_1, k_2 e lunghezza a riposo nulla. Recipiente e pistoni sono impermeabili al calore. Inizialmente n moli di gas perfetto si trovano nello scomparto a sinistra, in equilibrio meccanico con il pistone ad una temperatura T_1, mentre il pistone B viene mantenuto aderente al setto poroso.

1. Determinare il volume dello scomparto a sinistra.
2. Si libera il pistone B, e si attende che si stabilisca l'equilibrio. Determinare la temperatura finale del gas.
3. Determinare la variazione di entropia nel processo precedente.

Soluzione

Domanda 1 Imponiamo l'equilibrio meccanico:

$$k_1 \frac{V_1}{S} = P_1 S = \frac{nRT_1 S}{V_1}$$

da cui

$$V_1 = S\sqrt{\frac{nRT_1}{k_1}} \tag{1}$$

Domanda 2 Dalla conservazione dell'energia troviamo

$$nc_V T_1 + \frac{k_1}{2}\frac{V_1^2}{S^2} = nc_V T_f + \frac{k_1}{2}\frac{\tilde{V}_1^2}{S^2} + \frac{k_2}{2}\frac{\tilde{V}_2^2}{S^2}$$

ma per l'equilibrio meccanico deve essere

$$k_1 \tilde{V}_1 = k_2 \tilde{V}_2 = PS^2 \tag{2}$$

ed inoltre

$$P\left(\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2\right) = nRT_f \tag{3}$$

da cui

$$P^2S^2\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)=nRT_f$$

$$\begin{aligned}
PS &= \sqrt{nR\chi T_f} \\
P\tilde{V} &= nRT_f \\
\tilde{V} &= S\sqrt{\frac{nRT_f}{\chi}}
\end{aligned}$$

dove si è posto

$$\chi=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$$

Eliminando $\tilde{V}_1$, $\tilde{V}_2$ e V_1^2 tramite le equazioni (2), (3) e (1) otteniamo

$$T_f=T_1$$

Domanda 3 L'entropia di un gas perfetto è data da

$$S=nc_V\log T+nR\log V$$

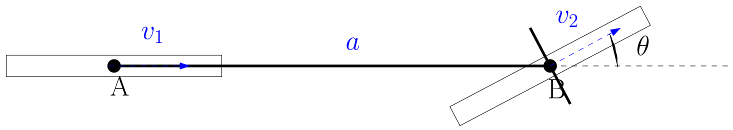
dato che la temperatura non cambia e il volume finale è dato da

$$\tilde{V}_1+\tilde{V}_2=S\sqrt{nRT_f\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)}$$

otteniamo

$$\Delta S=\frac{1}{2}nR\log\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)$$

Esercizio 3 (fisica I vecchio ordinamento)



Una schema molto semplice di bicicletta è rappresentato in figura. I due punti di contatto con il suolo A e B si muovono istante per istante con velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, parallelamente alla direzione della ruota. Poniamo $a = \overline{AB}$ e indichiamo con θ l'angolo di rotazione del manubrio.

1. Trovare la relazione tra $|\vec{v}_1|$ e $|\vec{v}_2|$, in funzione dell'angolo θ.
2. Determinare per dati $|\vec{v}_1|$ e θ la legge oraria del punto B in un sistema di riferimento con origine nel punto A, e assi in direzione fissa rispetto al suolo.
3. Determinare la traiettoria del punto A in un sistema di riferimento fissato al suolo.

Soluzione

Domanda 1 Dato che la distanza tra A e B non può variare deve essere

$$|\vec{v}_2| \cos\theta = |\vec{v}_1|$$

Domanda 2 Nel sistema di riferimento specificato il punto A è fisso, e il punto B si muove di moto circolare uniforme con velocità tangenziale

$$v'_T = |\vec{v}_2| \sin\theta = |\vec{v}_1| \tan\theta$$

quindi

$$\begin{aligned} x'_B &= a\cos\omega t \\ y'_B &= a\sin\omega t \end{aligned}$$

con

$$\omega = \frac{|\vec{v}_1|}{a}\tan\theta$$

Domanda 3 Nel sistema di riferimento fisso al suolo il punto A si muove nella direzione di B con velocità costante in modulo $|\vec{v}_1|$. La direzione quindi ruota con la velocità angolare ω determinata al punto precedente. Quindi

$$\begin{aligned} \dot{x}_A &= |\vec{v}_1|\cos\omega t \\ \dot{y}_A &= |\vec{v}_1|\sin\omega t \end{aligned}$$

ed integrando otteniamo, immaginando A inizialmente nell'origine,

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{1}{\omega} |\vec{v}_1| \sin \omega t = a \cot \theta \sin \omega t \\ y_A &= \frac{1}{\omega} |\vec{v}_1| (1 - \cos \omega t) = a \cot \theta (1 - \cos \omega t) \end{aligned}$$

Possiamo riscrivere le relazioni precedenti nella forma

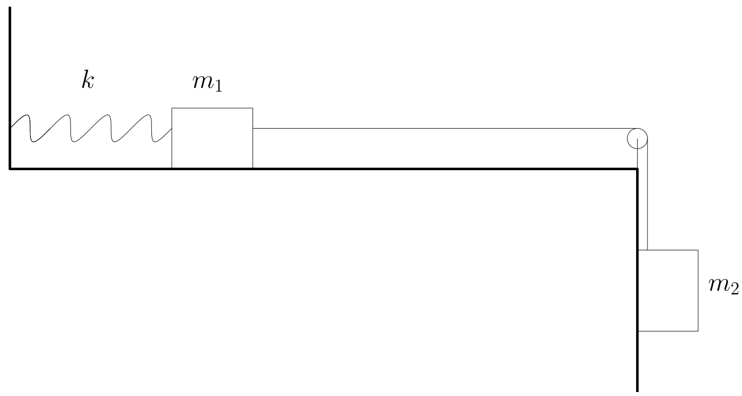
$$\begin{aligned} x_A &= a \cot \theta \sin \omega t \\ y_A - a \cot \theta &= -a \cot \theta \cos \omega t \end{aligned}$$

e sommando ambo i membri al quadrato otteniamo

$$x_A^2 + (y_A - a \cot \theta)^2 = a^2 \cot^2 \theta$$

La traiettoria è quindi una circonferenza di raggio $a \cot \theta$ e centro in $(0, a \cot \theta)$.

Esercizio 4 (fisica I vecchio ordinamento)



Le due masse in figura sono collegate da un filo inestensibile di massa nulla, e la prima è vincolata alla parete da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla.

1. Si determini l'allungamento della molla all'equilibrio.
2. Determinare la frequenza delle oscillazioni del sistema, nell'ipotesi che la massa m_1 non urti contro la parete.
3. Supponendo che il filo sia in grado di sopportare una tensione massima T_M, determinare la massima velocità iniziale che le masse possono avere nella posizione di equilibrio per evitare che questo si spezzi.

Soluzione

Domanda 1 Deve essere

$$k\ell = T = m_2 g$$

da cui

$$\ell = \frac{m_2 g}{k}$$

Domanda 2 Scriviamo le equazioni del moto:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} &= -kx + T \\ m_2 \ddot{x} &= m_2 g - T \end{aligned}$$

sommando membro a membro eliminiamo la tensione ottenendo

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + kx = m_2 g$$

da cui otteniamo

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

Domanda 3 Dalle seconda delle due equazioni scritte in precedenza ricaviamo addesso la tensione, ottenendo

$$T = m_2 (g - \ddot{x})$$

e dato che

$$\begin{aligned} x &= \ell + A \sin \omega t \\ v &= A\omega \cos \omega t \end{aligned}$$

otteniamo

$$A\omega = v_0$$

e quindi

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \sin \omega t = -\omega v_0 \sin \omega t$$

Deve quindi essere

$$T_M > m_2 (g + \omega v_0)$$

e quindi

$$v_0 < \frac{1}{\omega} \left(\frac{T_M}{m_2} - g \right)$$