

Dipartimento di Fisica - Fisica I (vecchio ordinamento)

Scritto del 10 settembre 2010

Esercizio 1 (15 punti)

La traiettoria di una particella nel piano è descritta in coordinate polari dall'equazione

$$r = \frac{d}{\cos \theta}$$

dove $d > 0$ è una costante assegnata.

1. Rappresentare graficamente la traiettoria in un piano cartesiano.
2. Determinare il vettore accelerazione in coordinate polari, in funzione di θ , $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$.
3. Determinare $r(t)$ sapendo che il vettore velocità è costante ed ha modulo V , e che $r(0) = d$.

Può essere utile ricordare l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

Soluzione

Domanda 1 L'equazione si può porre nella forma

$$d = r \cos \theta = x$$

segue che la traiettoria è una retta verticale a una distanza d dall'origine.

Domanda 2 Dato che la traiettoria è rettilinea, l'accelerazione vale

$$\vec{a} = \ddot{y} \hat{e}_y$$

Dato che

$$y = r \sin \theta = d \tan \theta$$

troviamo

$$\dot{y} = \frac{d}{\cos^2 \theta} \dot{\theta}$$

e

$$\ddot{y} = \frac{d}{\cos^2 \theta} \ddot{\theta} + \frac{d \sin \theta}{\cos^2 \theta} \dot{\theta}^2$$

e dato che

$$\hat{e}_y = \hat{e}_r \sin \theta + \hat{e}_\theta \cos \theta$$

troviamo

$$\vec{a} = \frac{d}{\cos^2 \theta} \left(\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) (\hat{e}_r \sin \theta + \hat{e}_\theta \cos \theta)$$

Domanda 3 Per il vettore velocità abbiamo

$$\vec{v} = \dot{y}\hat{e}_y = \pm V\hat{e}_y$$

Segue immediatamente che

$$\begin{aligned} x &= d \\ y &= y(0) \pm Vt \end{aligned}$$

e quindi

$$r(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{d^2 + (y(0) \pm Vt)^2}$$

che imponendo $r(0) = d$ si riduce a

$$r(t) = \sqrt{d^2 + V^2 t^2}$$

Alternativamente si può scrivere

$$\frac{d}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} = V$$

ed integrando

$$d \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = Vt$$

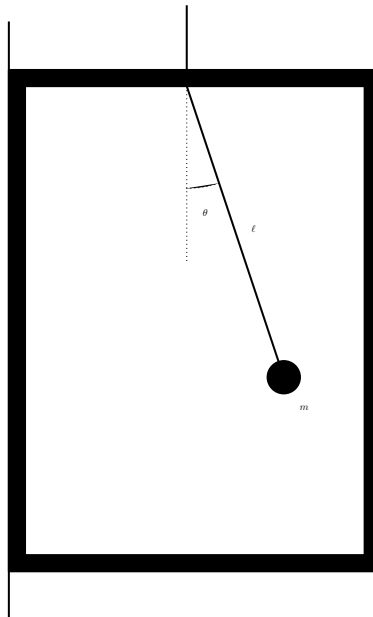
da cui ($\theta(0) = 0$ dato che $r(0) = d$)

$$d \tan \theta(t) = Vt$$

ma

$$r = \frac{d}{\cos \theta} = d\sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sqrt{d^2 + V^2 t^2}$$

Esercizio 2 (15 punti)



La cabina di un ascensore di massa M può muoversi in direzione verticale, ed è trattenuta da un cavo sottoposto ad una tensione T . All'interno di essa è fissato un pendolo costituito da una massa m sospesa a un filo inestensibile e privo di massa di lunghezza ℓ . Inizialmente la cabina è ferma ed il pendolo compie oscillazioni di ampiezza angolare θ_0 , come in figura.

1. Determinare la massima e la minima tensione del cavo che regge l'ascensore.
2. Supponiamo adesso che le oscillazioni siano piccole, $\theta_0 \ll 1$. Ad un certo istante il pendolo si trova in posizione verticale, e l'ascensore viene trascinato dal cavo verso l'alto, con accelerazione costante a . Calcolare la nuova ampiezza delle oscillazioni.
3. Appena il pendolo torna in posizione verticale l'ascensore smette di accelerare. Calcolare il lavoro fatto sino a quel momento dal motore che trascinava il cavo.

Domanda 1 La tensione del filo deve equilibrare la somma della forza peso della cabina e della componente verticale della tensione T_P del pendolo. Scrivendo l'equazione del moto di quest'ultimo nella direzione del filo abbiamo

$$m\ell\dot{\theta}^2 = T_P - mg \cos \theta$$

ossia

$$T_P = m\ell\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta$$

Dalla conservazione dell'energia abbiamo

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta = -mg\ell \cos \theta_0$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{\ell} (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

e quindi

$$T_P = mg (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$$

In conclusione

$$\begin{aligned} T &= T_P \cos \theta + Mg \\ &= mg (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0) \cos \theta + Mg \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} T_{MAX} &= mg (3 - 2 \cos \theta_0) + Mg \\ T_{MIN} &= Mg \end{aligned}$$

rispettivamente per $\theta = 0$ e $\theta = \theta_0$.

Domanda 2 Lavoriamo nel sistema di riferimento dell'oscillatore. Prima dell'accelerazione, che supponiamo iniziare a $t = 0$, abbiamo

$$\theta = \theta_0 \sin \omega_0 t$$

con

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Dopo l'accelerazione sarà, tenendo conto della continuità,

$$\theta = \theta_1 \sin \omega_1 t$$

dove

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g+a}{\ell}}$$

Imponendo anche la continuità di $\dot{\theta}$ troviamo

$$\theta_1 = \frac{\omega_0}{\omega_1} \theta_0$$

Domanda 3 Il pendolo tornerà in posizione verticale a

$$\tau = \frac{\pi}{\omega_1}$$

e da quel momento oscillerà secondo la legge

$$\theta = A \cos \omega_0 (t - \tau) + B \sin \omega_0 (t - \tau)$$

Imponendo la continuità di θ e $\dot{\theta}$ troviamo $A = 0$ e $B = \theta_0$. Quindi l'oscillatore si muove nuovamente con l'ampiezza iniziale. L'energia del sistema sarà aumentata di

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{2} (M+m) a^2 \tau^2 + \frac{1}{2} (M+m) g a^2 \tau^2 \\ &= \pi^2 (M+m) \ell \frac{a^2}{g+a} \end{aligned}$$

che corrisponde al lavoro fatto dal motore.