- Fisica 1b: 3+4
- Fisica 1 (vecchio ordinamento) 1+2
- Fisica 2 (vecchio ordinamento) 3+4
- Fisica 1 + Fisica 2 (vecchio ordinamento) 3+4+(1 | 2)

Dipartimento di Fisica - Fisica I (v.o.)

Scritto del 10 febbraio 2011

Esercizio 1 (15 punti)

Una particella si muove su una circonferenza di raggio R con velocità tangenziale

$$v(t) = A \sin \omega t$$

1. Calcolare l'accelerazione in modulo, direzione e verso.
2. Calcolare il valore massimo raggiunto dal modulo dell'accelerazione.
3. Per quale valore minimo di $|A|$ la particella percorre completamente la circonferenza?

Soluzioni

Problema 1

Abbiamo una accelerazione centripeta e una tangenziale, date da

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\hat{e}_r + \dot{v}\hat{e}_\theta$$

e quindi

$$\vec{a} = -\frac{A^2}{R}\sin^2 \omega t\, \hat{e}_r + A\omega \cos \omega t\, \hat{e}_\theta$$

Problema 2

Il modulo quadro dell'accelerazione vale

$$a^2 = \frac{A^4}{R^2}\sin^4 \omega t + A^2\omega^2 \cos^2 \omega t$$

che possiamo anche scrivere come

$$a^2 = \frac{A^4}{R^2}x^2 + A^2\omega^2 (1 - x)$$

con $x = \sin^2 \omega t$, $0 \leq x \leq 1$. Questa funzione ha un minimo all'interno dell'intervallo, il massimo quindi sarà per $x = 1$ o $x = 0$, cioè

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{A^4}{R^2} \quad (x = 1) \\ a^2 &= A^2\omega^2 \quad (x = 0) \end{aligned}$$

Il primo valore andrà scelto se

$$A^2 > R^2\omega^2$$

altrimenti il secondo.

Problema 3

Lo spazio percorso è dato da

$$s(t) = \int v(t)dt = -\frac{A}{\omega}\cos\omega t$$

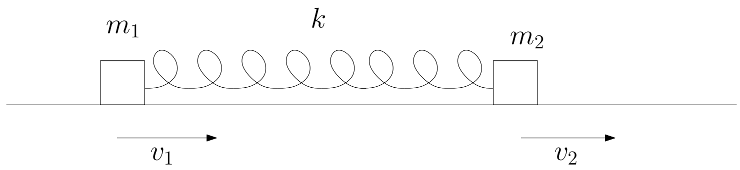
e perchè tutta la circonferenza sia percorsa deve essere almeno

$$2\frac{|A|}{\omega} = 2\pi R$$

ossia

$$|A| = \pi R\omega$$

Esercizio 2 (15 punti)



Due masse m_1, m_2 sono collegate da una molla con lunghezza a riposo nulla e costante elastica k. Inizialmente le due masse si trovano ad una distanza $2a$.

1. Se le velocità iniziali delle masse sono nulle, $v_1 = v_2 = 0$, dopo quanto tempo queste si urtano?

2. Calcolare il massimo allungamento della molla se $v_1 = 0$ e $v_2 = V$.

3. Supponiamo adesso che le velocità iniziali siano identiche, $v_1 = v_2 = V$. Dopo quanto tempo le due masse si urtano? Se l'urto è completamente anelastico e le due masse rimangono attaccate, qual'è la velocità finale del sistema?

Soluzioni

Domanda 1

L'equazione per il moto relativo si scrive

$$\mu\ddot{x} = -kx$$

che ha per soluzione

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega}\sin\omega t$$

Nel nostro caso la velocità iniziale relativa è nulla, e la separazione relativa $2a$, quindi

$$x(t) = 2a\cos\omega t$$

e l'urto avviene al tempo τ dato da $\omega\tau = \pi/2$,

$$\tau = \frac{\pi}{2\omega}$$

Domanda 2

Usando la conservazione dell'energia disponibile nel centro di massa abbiamo

$$\frac{1}{2}\mu V^2 + \frac{k}{2}(2a)^2 = \frac{k}{2}\ell_{MAX}^2$$

cioè

$$\ell_{MAX} = \sqrt{4a^2 + \frac{\mu}{k}V^2}$$

Domanda 3

Nel sistema del centro di massa il problema è equivalente a quello visto alla prima domanda, e quindi

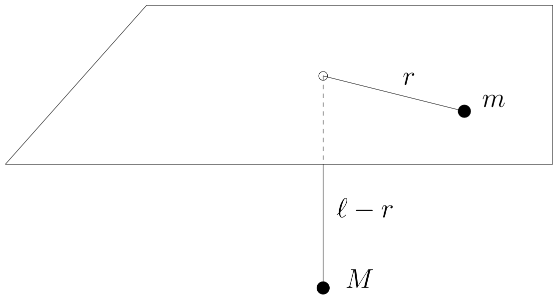
$$\tau = \frac{\pi}{2\omega}$$

La velocità finale del sistema sarà quella del centro di massa, cioè V.

Dipartimento di Fisica - Fisica 1b, Fisica II (v.o.)

Scritto del 10 febbraio 2011

Esercizio 1 (15 punti)



Una massa m si muove su un piano orizzontale privo di attrito, ed è collegata come in figura ad un'altra massa M mediante una fune inestensibile di lunghezza ℓ. La massa pende verticalmente ed il filo è libero di scorrere.

1. Inizialmente la massa m si muove su un'orbita circolare con $r = \ell/2$. Determinare il periodo.
2. Si prende la massa M e la si sposta molto lentamente verso il basso di un tratto $\ell/4$. Calcolare il periodo della nuova orbita circolare.
3. Si lascia andare improvvisamente la massa M. Determinare il valore massimo e minimo di r della nuova orbita.

Soluzioni

Problema 1

Ponendo la tensione uguale alla massa per l'accelerazione centripeta abbiamo

$$m\omega^2 \frac{\ell}{2} = Mg$$

e quindi

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell}{2Mg}}$$

Problema 2

Durante il processo si conserva il momento angolare, e l'orbita resta circolare. Quindi

$$L = m\omega\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = m\omega'\left(\frac{\ell}{4}\right)^2$$

da cui

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\omega}\frac{\omega}{\omega'} = \frac{1}{4}T$$

Problema 3

Utilizzando il potenziale efficace abbiamo ai punti di inversione

$$\frac{L^2}{2mr^2} + Mgr = \frac{L^2}{2mr_-^2} + Mgr_-$$

dove $r_- = \ell/4$ è la distanza iniziale. Quindi

$$\frac{L^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_-^2}\right) + Mg\left(r - r_-\right) = 0$$

Possiamo scrivere anche

$$\frac{L^2}{2m}\left(r_-^2 - r^2\right) + Mgr^2r_-^2\left(r - r_-\right) = 0$$

che ha per soluzione chiaramente $r = r_-$. Semplificando otteniamo infine

$$\frac{8L^2}{Mmg\ell^2}\left(r_- + r\right) + r^2 = 0$$

da cui

$$r = -\frac{4L^2}{Mmg\ell^2} \pm \sqrt{\left(\frac{4L^2}{Mmg\ell^2}\right)^2 - \frac{8L^2 r_-}{Mmg\ell^2}}$$

La soluzione accettabile corrisponde alla distanza di massimo allontanamento cercata

$$r = -\frac{4L^2}{Mmg\ell^2} + \sqrt{\left(\frac{4L^2}{Mmg\ell^2}\right)^2 - \frac{2L^2}{Mmg\ell}}$$

con

$$L = \sqrt{\frac{mMg\ell^3}{8}}$$

Esercizio 2 (15 punti)

Tre corpi di uguale capacità termica C si trovano inizialmente alle temperature $T_1 = T_0$, $T_2 = 2T_0$ e $T_3 = 5T_0$.

1. Determinare la temperatura finale del sistema se i corpi sono posti in contatto e liberi di scambiarsi spontaneamente calore.

2. Determinare la variazione di entropia del sistema nel caso precedente.

3. Qual'è la massima temperatura a cui è possibile portare uno dei tre corpi se il sistema è isolato.

Soluzioni

Problema 1

Dalla conservazione dell'energia abbiamo

$$C\left(T_1 + T_2 + T_3\right) = 3CT_f$$

e quindi

$$T_f = \frac{8T_0}{3}$$

Problema 2

Abbiamo

$$\begin{aligned}
\Delta S &= C \log \frac{T_f}{T_1} + C \log \frac{T_f}{T_2} + C \log \frac{T_f}{T_3} \\
&= C \log \frac{T_f^3}{T_1 T_2 T_3} \\
&= C \log \left[\frac{1}{10}\left(\frac{8}{3}\right)^3\right] \simeq 0.64C
\end{aligned}$$

Problema 3

Possiamo immaginare che nella situazione finale due corpi saranno alla stessa temperatura, dato che se così non fosse potremmo estrarre da essi del lavoro e impiegarlo per innalzare ulteriormente la temperatura del terzo. Abbiamo la conservazione dell'energia:

$$8CT_0 = C\left(2T_- + T_+\right)$$

e per la variazione di entropia

$$\Delta S = C \log \frac{T_-^2 T_+}{10T_0^3} = 0$$

che abbiamo posto nulla dato che il risultato migliore si otterrà operando reversibilmente. Mettendo insieme le due equazioni abbiamo

$$\begin{aligned}
T_-^2 T_+ &= 10T_0^3 \\
T_- &= 4T_0 - \frac{1}{2}T_+
\end{aligned}$$

ed eliminando T_-

$$T_+\left(4T_0 - \frac{1}{2}T_+\right)^2 = 10T_0^3$$

ossia

$$\frac{1}{4}T_+^3 - 4T_0 T_+^2 + 16T_0^2 T_+ - 10T_0^3 = 0$$

Ponendo $x = T_+/T_0$

$$x^3 - 16x^2 + 64x - 40 = 0$$

che si può scomporre

$$(x - 10)\left(x^2 - 6x + 4\right) = 0$$

abbiamo quindi le soluzioni

$$\begin{aligned} T_+ &= 10T_0 \\ T_+ &= \left(3 - \sqrt{5}\right) T_0 \simeq 0.764T_0 \\ T_+ &= \left(3 + \sqrt{5}\right) T_0 \simeq 5.24T_0 \end{aligned}$$

La prima non è accettabile, perchè

$$T_- = 4T_0 - \frac{1}{2}T_+ = -T_0$$

Le altre due sono accettabili, ma quella cercata è la terza. Infatti si ha per essa

$$T_- = 4T_0 - \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right) T_0 \simeq 1.38T_0 < T_+$$

mentre la seconda corrisponde a

$$T_- = 4T_0 - \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right) T_0 \simeq 3.62T_0 > T_+$$