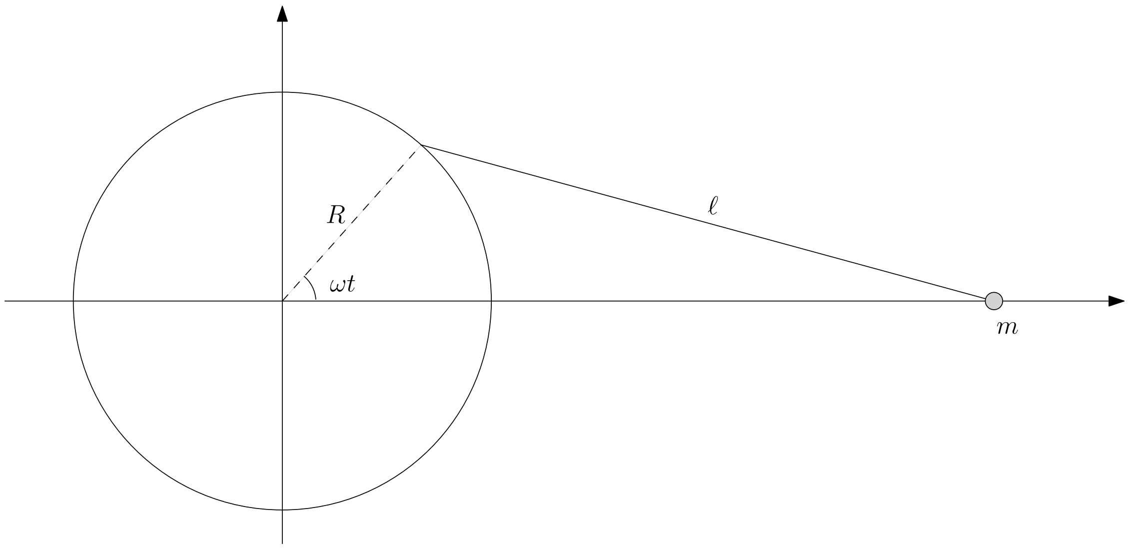
Dipartimento di Fisica - Fisica I (v.o.)

Scritto del 2 marzo 2011

Esercizio 1 (15 punti)



Una massa m è vincolata a muoversi su una retta, ed è collegata ad un estremo di una sbarra di lunghezza ℓ. L'altro estremo di quest'ultima è collegato ad un disco di raggio $R < \ell$, come in figura. Entrambi gli estremi sono liberi di ruotare e non è presente alcun tipo di attrito. Se il disco ruota con velocità costante ω,

1. determinare la velocità della massa in funzione del tempo;
2. dire se la velocità angolare della sbarra può annullarsi, e quando;
3. calcolare, sempre in funzione del tempo, la forza esercitata dalla sbarra sulla massa nel limite $\ell \gg R$.

Soluzione

Domanda 1

La posizione della massa rispetto al centro della circonferenza si scrive

$$x = R\cos\omega t + \sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2 \omega t}$$

e derivando troviamo la velocità

$$\dot{x} = -R\omega \sin\omega t - \frac{R}{\ell} \frac{R\omega \sin\omega t \cos\omega t}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{\ell^2}\sin^2 \omega t}}$$

Domanda 2

L'angolo α che la sbarra forma con l'orizzontale è legato a ωt dalla relazione

$$\ell \sin\alpha = R\sin\omega t$$

e derivando rispetto al tempo troviamo

$$\ell\dot{\alpha}\cos\alpha = R\omega\cos\omega t$$

da cui

$$\dot{\alpha} = \frac{R\omega}{\ell}\frac{\cos\omega t}{\cos\alpha} = \frac{R\omega}{\ell}\frac{\cos\omega t}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{\ell^2}\sin^2\omega t}}$$

Ma $\dot{\alpha}$ è la velocità angolare dell laser a meno di un fattore. La velocità angolare è, a meno di un segno, $\dot{\alpha}$. Vediamo quindi che questa si annulla per $\omega t = \pi/2 + k\pi$.

Domanda 3

La forza F esercitata dalla sbarra sulla palla è diretta parallelamente alla sbarra stessa. Inoltre nella direzione orizzontale deve essere

$$m\ddot{x} = F\cos\alpha$$

e quindi

$$F = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{R^2}{\ell^2}\sin^2\omega t}}\ddot{x}$$

Nel limite $R/\ell \ll 1$ possiamo approssimare

$$\dot{x} \simeq -R\omega\sin\omega t$$

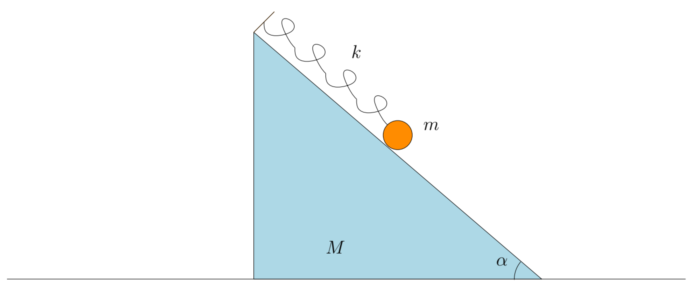
e quindi

$$\ddot{x} \simeq -R\omega^2\cos\omega t$$

Sostituendo otteniamo infine

$$F \simeq -\frac{mR\omega^2}{\sqrt{1-\frac{R^2}{\ell^2}\sin^2\omega t}}\cos\omega t \simeq -mR\omega^2\cos\omega t$$

Esercizio 2 (15 punti)



Un piano inclinato di un angolo α e di massa M è appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito. Sopra ad esso si trova una particella di massa m, vincolata all'estremo superiore da una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k, come in figura.

1. Determinare la lunghezza della molla all'equilibrio.
2. Se inizialmente la massa si trova ferma nel punto più alto del piano e viene lasciata andare, quanto vale il massimo allungamento della molla?
3. Calcolare la frequenza delle oscillazioni del sistema.

Soluzione

Problema 1

Imponendo che le forze applicate alla particella parallele al piano siano nulle otteniamo

$$-k\ell_0 + mg\sin\alpha = 0$$

da cui

$$\ell_0 = \frac{mg\sin\alpha}{k}$$

Problema 2

Dato che la quantità di moto orizzontale del sistema è inizialmente nullo e si conserva, il centro di massa non si sposta orizzontalmente. Sia all'istante iniziale che a quello di massimo allungamento la velocità della particella relativa al piano si annulla, e quindi entrambi i corpi sono fermi. Possiamo allora applicare la conservazione dell'energia ottenendo (ponendo $h = 0$ alla sommità del piano)

$$\begin{aligned} E_{iniziale} &= 0 \\ E_{finale} &= \frac{1}{2}k\ell_{max}^2 - mg\ell_{max}\sin\alpha \end{aligned}$$

da cui ponendo $E_{iniziale} = E_{finale}$

$$\ell_{max} = \frac{2mg\sin\alpha}{k}$$

Problema 3

Scriviamo l'energia totale nella forma

$$E = \frac{1}{2}MV_x^2 + \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{k}{2}\ell^2 - mg\ell\sin\alpha$$

ma dato che la quantità di moto orizzontale si conserva ed è nulla possiamo anche scrivere, applicando il teorema di Koenig

$$E = \frac{1}{2}\mu v_{r,x}^2 + \frac{1}{2}mv_{r,y}^2 + \frac{k}{2}\ell^2 - mg\ell\sin\alpha$$

dove $v_{r,x}$ e $v_{r,y} = v_y$ sono le velocità della particella relativa al piano e $\mu = mM/(m+M)$ la massa ridotta. D'altra parte

$$\begin{aligned} v_{r,x} &= \dot{\ell}\cos\alpha \\ v_{r,y} &= -\dot{\ell}\sin\alpha \end{aligned}$$

e quindi

$$E = \frac{1}{2}(\mu + m)\dot{\ell}^2 + \frac{k}{2}\ell^2 - mg\ell\sin\alpha$$

Derivando rispetto al tempo

$$\dot{E} = (\mu + m)\dot{\ell}\ddot{\ell} + k\ell\dot{\ell} - mg\dot{\ell}\sin\alpha = 0$$

da cui possiamo ricavare le equazioni del moto

$$(\mu + m)\ddot{\ell} + k\ell = mg\sin\alpha$$

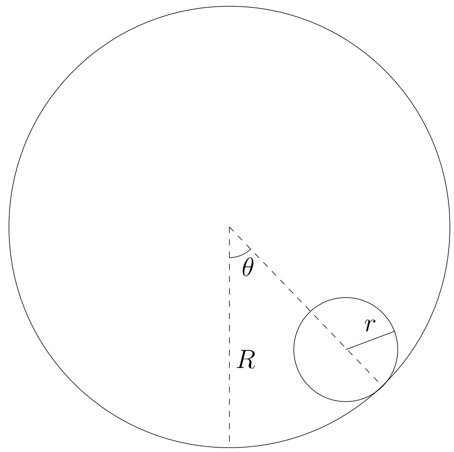
Il sistema esegue qundi oscillazioni armoniche attorno al punto di equilibrio ℓ_0 calcolato precedentemente, con frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu + m}}$$

Dipartimento di Fisica - Fisica 1b, Fisica II (v.o.)

Scritto del 2 marzo 2011

Esercizio 1 (15 punti)



Una sfera di massa M e raggio r rotola senza strisciare all'interno di un tubo di raggio $R > r$ come in figura. Il tubo si comporta come un vincolo monolatero.

Scegliendo l'angolo θ come coordinata,

1. scrivere l'energia totale del sistema in funzione di θ e $\dot{\theta}$;
2. supponendo che $\theta(t = 0) = 0$, si determini il minimo valore di $\dot{\theta}(t = 0)$ che permette alla sfera di percorrere un giro completo senza staccarsi dal tubo;
3. determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

Soluzione

Domanda 1

La velocità del centro di massa del cilindro si scrive

$$v_{cm} = (R - r)\dot{\theta}$$

ma anche, usando la condizione di rotolamento puro,

$$v_{cm} = -r\omega$$

dove ω è la velocità angolare del cilindro. Da queste due relazioni segue che

$$\omega = -\frac{R - r}{r}\dot{\theta}$$

Possiamo adesso scrivere l'energia nella forma

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - Mg(R - r)\cos\theta \\
&= \frac{1}{2}M(R - r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\left(1 - \frac{R}{r}\right)^2\dot{\theta}^2 - Mg(R - r)\cos\theta \\
&= \frac{1}{2}M\left[(R - r)^2 + \frac{2}{5}r^2\left(1 - \frac{R}{r}\right)^2\right]\dot{\theta}^2 - Mg(R - r)\cos\theta \\
&= \frac{1}{2}\frac{7}{5}M(R - r)^2\dot{\theta}^2 - Mg(R - r)\cos\theta
\end{aligned}$$

dove si è utilizzato il momento di inerzia della sfera, $I = 2Mr^2/5$. Notare che il termine cinetico si può anche scrivere nella forma

$$E_c = \frac{1}{2}\left[\frac{7}{5}Mr^2\right]\left[\frac{(R-r)^2}{r^2}\dot{\theta}^2\right] = \frac{1}{2}I'\omega^2$$

dove $I' = 7Mr^2/5$ è il momento di inerzia della sfera rispetto al punto di contatto.

Domanda 2

La componente radiale dell'equazione del moto del centro di massa della sfera si scrive

$$-M(R-r)\dot{\theta}^2 = -N + Mg\cos\theta$$

da cui è possibile calcolare la reazione vincolare.

$$N = Mg\cos\theta + M(R-r)\dot{\theta}^2$$

La sfera rimarrà aderente al vincolo se $N \geq 0$, cioè

$$g\cos\theta + (R-r)\dot{\theta}^2 \geq 0 \tag{1}$$

Dalla conservazione dell'energia possiamo ora determinare $(R-r)\dot{\theta}^2$ in funzione di θ:

$$\frac{1}{2}\frac{7}{5}M(R-r)^2\dot{\theta}_0^2 - Mg(R-r) = \frac{1}{2}\frac{7}{5}M(R-r)^2\dot{\theta}^2 - Mg(R-r)\cos\theta$$

da cui

$$(R-r)\dot{\theta}^2 = (R-r)\dot{\theta}_0^2 - \frac{10}{7}g\left(1-\cos\theta\right)$$

e sostituendo nella (1) troviamo

$$(R-r)\dot{\theta}_0^2 \geq g\left(\frac{10}{7} - \frac{17}{7}\cos\theta\right)$$

Il caso peggiore è $\theta = \pi$, quindi deve essere

$$\left|\dot{\theta}_0\right| \geq \sqrt{\frac{27}{7}\frac{g}{(R-r)}}$$

Domanda 3

La posizione di equilibrio stabile è $\theta = 0$. Sviluppando l'energia al secondo ordine troviamo a meno di una costante

$$E = \frac{1}{2}\frac{7}{5}M(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}Mg(R-r)\theta^2 + O\left(\theta^4\right)$$

quindi la frequenza delle piccole oscillazioni è

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$$

Esercizio 2 (15 punti)

Due corpi hanno capacità termica rispettivamente

$$\begin{aligned} C_1 &= \beta_1 T \\ C_2 &= \beta_2 T \end{aligned}$$

con β_1, β_2 costanti positive, e si trovano inizialmente alla stessa temperatura T_0.

1. Determinare il minimo lavoro necessario per fare in modo che i corpi abbiano temperature finali T_1, T_2 tali che $T_1/T_2 = 2$, e determinarle.

2. Al termine dell'operazione precedente si pongono i due corpi a contatto, e si attende l'equilibrio. Determinare la nuova temperatura finale.

3. Determinare la variazione totale di entropia del sistema tra la condizione iniziale e quella finale.

Soluzione

Domanda 1

Siano dQ_1, dQ_2 le quantità di calore cedute ai due corpi, e dW il lavoro fatto sul sistema. Dal primo principio segue

$$dW = dQ_1 + dQ_2$$

e quindi

$$dW = C_1 dT_1 + C_2 dT_2 = \beta_1 T_1 dT_1 + \beta_2 T_2 dT_2$$

Quindi integrando

$$W = \int_{T_0}^{T_1} \beta_1 T dT + \int_{T_0}^{T_2} \beta_2 T dT = \frac{1}{2}\beta_1 \left(T_1^2 - T_0^2\right) + \frac{1}{2}\beta_2 \left(T_2^2 - T_0^2\right)$$

D'altra parte detta ΔS la variazione totale di entropia nel processo avremo

$$dS = \frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} = \beta_1 dT_1 + \beta_2 dT_2$$

ed integrando

$$\Delta S = \beta_1 \left(T_1 - T_0\right) + \beta_2 \left(T_2 - T_0\right)$$

Infine $T_1 = 2T_2$ per cui

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\left(4\beta_1 + \beta_2\right) T_2^2 - \frac{1}{2}\left(\beta_1 + \beta_2\right) T_0^2 \\ \Delta S &= \left(2\beta_1 + \beta_2\right) T_2 - \left(\beta_1 + \beta_2\right) T_0 \qquad (2) \end{aligned}$$

Eliminando T_2 si trova

$$W = \frac{1}{2}\left(4\beta_1 + \beta_2\right) \left[\frac{\left(\beta_1 + \beta_2\right) T_0 + \Delta S}{2\beta_1 + \beta_2}\right]^2 - \frac{1}{2}\left(\beta_1 + \beta_2\right) T_0^2$$

e il minimo lavoro si ha per la più piccola variazione di entropia possibile, $\Delta S = 0$, da cui

$$W = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(4\beta_1 + \beta_2\right)\left(\beta_1 + \beta_2\right)}{\left(2\beta_1 + \beta_2\right)^2} - 1\right]\left(\beta_1 + \beta_2\right) T_0^2$$

Se $\Delta S = 0$ dalla (2) segue subito

$$T_2 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2\beta_1 + \beta_2} T_0, \quad T_1 = 2T_2$$

Domanda 2

Sempre dalla conservazione dell'energia abbiamo

$$\int_{T_1}^{T_0'} \beta_1 T dT + \int_{T_2}^{T_0'} \beta_2 T dT = 0$$

dato che non si compie lavoro sul sistema. Integrando troviamo

$$\frac{1}{2}\beta_1 \left(T_0'^2 - T_1^2\right) + \frac{1}{2}\beta_2 \left(T_0'^2 - T_2^2\right) = 0$$

da cui

$$\begin{aligned} T_0' &= \sqrt{\frac{\beta_1 T_1^2 + \beta_2 T_2^2}{\beta_1 + \beta_2}} = \sqrt{\frac{4\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 + \beta_2}} T_2 \\ &= \sqrt{\frac{4\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 + \beta_2}} \frac{\beta_1 + \beta_2}{2\beta_1 + \beta_2} T_0 = \sqrt{\frac{\left(4\beta_1 + \beta_2\right)\left(\beta_1 + \beta_2\right)}{\left(2\beta_1 + \beta_2\right)^2}} T_0 \qquad (3) \end{aligned}$$

Si poteva arrivare alla stessa conclusione senza integrare, usando il primo principio $W = \Delta U$, da cui

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\left(4\beta_1 + \beta_2\right)\left(\beta_1 + \beta_2\right)}{\left(2\beta_1 + \beta_2\right)^2} - 1\right]\left(\beta_1 + \beta_2\right) T_0^2 = \frac{1}{2}\left(\beta_1 + \beta_2\right)\left(T_0'^2 - T_0^2\right)$$

Risolvendo per T_0' si trova ancora il risultato (3).

Domanda 3

Dato che

$$dS = \beta_1 dT_1 + \beta_2 dT_2$$

l'entropia del sistema vale, a meno di una costante,

$$S = \beta_1 T_1 + \beta_2 T_2$$

e quindi

$$\Delta S = (\beta_1 + \beta_2)(T_0' - T_0) = (\beta_1 + \beta_2) T_0 \left[\sqrt{\frac{(4\beta_1 + \beta_2)(\beta_1 + \beta_2)}{(2\beta_1 + \beta_2)^2}} - 1 \right]$$