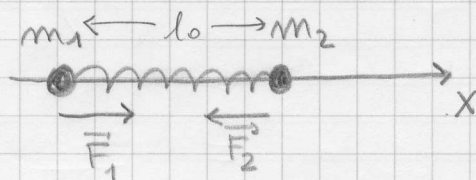


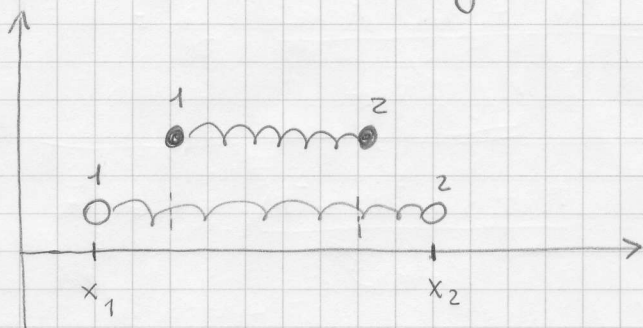
Esercizio delle 2 masse attaccate ad una molla

Si consideri



l_0, k

A cosa sono uguali $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$. So che $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$
(III principio)



$$F_1 = k(x_2 - x_1 - l_0)$$

$$F_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0)$$

$\Rightarrow$ le eqn. del moto sono

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - l_0) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0) \end{cases}$$

Sono eqn. accoppiate $\Rightarrow$ molto brutte!

Proviamo a sommarle:

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{CM: } x_{\text{cm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$(1) \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} M \ddot{x}_{\text{cm}} = 0 \\ \text{ // } \\ m_1 + m_2 \end{matrix}}$$

$\rightarrow$ I eqn. cardinali
(2) con $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$!

$\Rightarrow$ quantità di moto $\equiv M \dot{x}_{\text{cm}} = Q = \text{costante!}$

Sia ora $x = x_2 - x_1$

$$\ddot{x}_1 = \frac{k}{m_1} (x - l_0)$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{k}{m_2} (x - l_0)$$

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \ddot{x} = -k \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) (x - l_0)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \rightarrow \text{la chiamo } \underline{\text{massa ridotta}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu \ddot{x} = -k (x - l_0)} \quad (3)$$

$\Rightarrow$ le eqm. sono diventate

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{x}_{\text{cm}} = 0 \\ \mu \ddot{x} = -k (x - l_0) \end{cases} \quad (4)$$

$\Rightarrow$ moto di 2 punti: Uno (CM) si muove di moto rettilineo uniforme; l'altro, di massa pari alla massa ridotta, si muove di moto armonico (più in generale si muove sotto l'effetto della forza interna)

Supponiamo adesso che:

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_1(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2(0) = l_0 \\ \dot{x}_2(0) = -v_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_{\text{cm}}(0) = \frac{m_2 l_0}{m_1 + m_2} ; \quad \dot{x}_{\text{cm}}(0) = -\frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2}$$

$$x(0) = l_0 \quad ; \quad \dot{x}(0) = -v_0$$

Risolviemo (4)

$$x_{cm}(t) = \left(\frac{m_2 l_0}{m_1 + m_2} \right) - \left(\frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} \right) t$$

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + l_0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$x(0) = A \sin \varphi + \cancel{l_0} = \cancel{l_0}$$

$$\varphi = 0$$

$$\dot{x}(0) = +A\omega \cos \varphi = -v_0$$

$$A = -\frac{v_0}{\omega}$$

Note che cl
la massa
risol

$$x(t) = l_0 - v_0 \sqrt{\frac{\mu}{k}} \sin \omega t$$

Da $x_{cm}(t)$ e $x(t)$ si ricava $x_1(t)$ e $x_2(t)$:

$$\begin{cases} M x_{cm} = m_1 x_1 + m_2 x_2 \\ x = x_2 - x_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_2 = x + x_1 \rightarrow M x_{cm} = m_1 x_1 + m_2 x + m_2 x_1$$

$$\begin{cases} x_1 = x_{cm} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} x \\ x_2 = x_{cm} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} x \end{cases}$$

Ricapitolando le soluzioni sono:

$$\begin{cases} x_{cm}(t) = x_{cm}(0) + v_{cm} t \\ x(t) = l_0 - \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \end{cases}$$

$$x_{cm}(0) = \frac{m_2 l_0}{m_1 + m_2}$$

$$v_{cm} = -\frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$\begin{cases} x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M} \\ x = x_2 - x_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = x_{cm} - \frac{m_2}{M} x \\ x_2 = x_{cm} + \frac{m_1}{M} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_{cm} - \frac{m_2}{M} \dot{x} \\ \dot{x}_2 = v_{cm} + \frac{m_1}{M} \dot{x} \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = -v_0 \cos \omega t \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_{cm} + \frac{m_2}{M} v_0 \cos \omega t \\ \dot{x}_2 = v_{cm} - \frac{m_1}{M} v_0 \cos \omega t \end{cases}$$

Passiamo al SR del e.m. $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - x_{cm} \\ x'_2 = x_2 - x_{cm} \end{cases} \Rightarrow$$

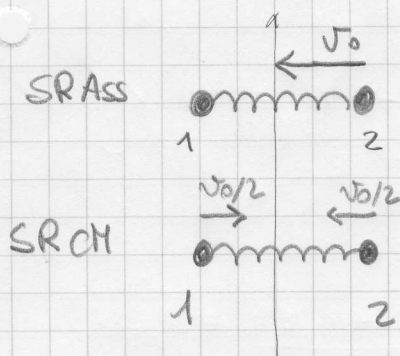
$$\begin{cases} x'_1 = -\frac{m_2}{M} x = -\frac{m_2}{M} l_0 + \frac{m_2 v_0}{M \omega} \sin \omega t \\ x'_2 = +\frac{m_1}{M} x = \frac{m_1}{M} l_0 - \frac{m_1 v_0}{M \omega} \sin \omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}'_1 = \frac{m_2}{M} v_0 \cos \omega t \\ \dot{x}'_2 = -\frac{m_1}{M} v_0 \cos \omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}'_1(0) = \frac{m_2}{M} v_0 \\ \dot{x}'_2(0) = -\frac{m_1}{M} v_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ supponiamo

$$m_1 = m_2 = m$$



$$v_1'(0) = \frac{v_0}{2}$$

$$v_2'(0) = -\frac{v_0}{2}$$

Il moto è armonico in SRCH

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\frac{l_0}{2} + \frac{v_0}{2\omega} \sin \omega t \\ x_2'(t) = \frac{l_0}{2} - \frac{v_0}{2\omega} \sin \omega t \end{cases}$$

Si trovi adesso la min. e max distanza a cui le due masse avvicinano:

$$\text{min/max distanza} \Rightarrow v_1' = v_2' = 0$$

$$\Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

$$\Rightarrow |x_1'(t) - x_2'(t)| = \left[l_0 + \frac{v_0}{\omega} \right] = d_{\max} \quad (\text{per } \omega t = \frac{\pi}{2})$$

$$d_{\min} = \left[l_0 - \frac{v_0}{\omega} \right]$$