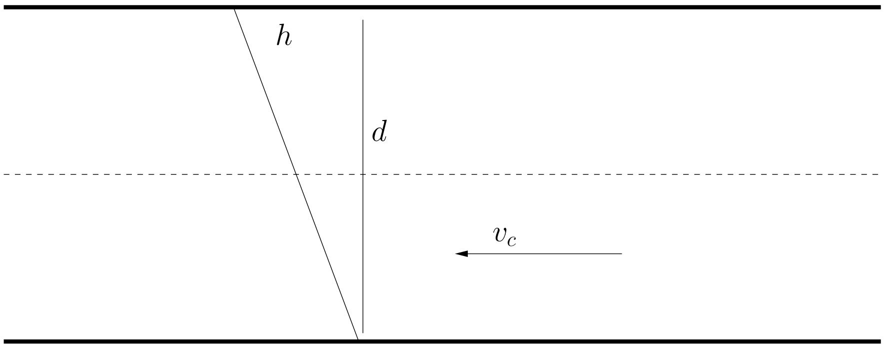
## 0.1 Primo esercizio compitino 7/11/2007

Un nuotatore è capace di nuotare ad una velocità massima $v_n$ nell'acqua immobile. Vuole attraversare un fiume di larghezza $d$, nel quale l'acqua scorre ad una velocità $v_c > v_n$ che si suppone indipendente dalla distanza dalla riva.




Decide di nuotare in linea retta, in modo che la propria velocità relativa all'acqua formi un angolo $\theta$ con l'asse del fiume.

1. Quanto vale, in funzione di $\theta$, l'angolo tra la velocità del nuotatore e l'asse del fiume?
2. Per quale valore di $\theta$ il fiume viene attraversato nel minor tempo possibile, e quanto vale tale tempo?
3. Per quale valore di $\theta$ dopo la traversata è minimo lo spostamento trasversale $h$ causato dalla corrente? Quanto vale il tempo di attraversamento in questo caso?

### Soluzione

#### Domanda 1

La velocità del nuotatore relativa all'acqua si può scrivere nella forma

$$\vec{v}_{rel} = \begin{pmatrix} v_n \cos\theta \\ v_n \sin\theta \end{pmatrix}$$

dove l'asse $x$ è stato scelto parallelo all'asse del fiume. Per ottenere la velocità del nuotatore dobbiamo aggiungere la velocità della corrente, e quindi

$$\vec{v}_n = \vec{v}_c + \vec{v}_{rel} = \begin{pmatrix} -v_c \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_n \cos\theta \\ v_n \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_n \cos\theta - v_c \\ v_n \sin\theta \end{pmatrix}$$

e facendo il rapporto tra le due componenti otteniamo la tangente dell'angolo cercato:

$$\tan\phi = \frac{v_{n,y}}{v_{n,x}} = \frac{v_n \sin\theta}{v_n \cos\theta - v_c} .$$

## Domanda 2

Il tempo di attraversamento è dato da

$$t = \frac{d}{v_{n,y}} = \frac{d}{v_n \sin\theta}$$

ed è chiaramente minimo per $\theta = \pi/2$. In tal caso si ha $t = d/v_n$.

## Domanda 3

La legge oraria del nuotatore si scrive, scegliendo l'origine nel punto di partenza del nuotatore,

$$\begin{aligned} x &= (v_n \cos\theta - v_c)t \\ y &= (v_n \sin\theta)t \end{aligned}$$

e il tempo di attraversamento vale, come visto nell'esercizio precedente, $t = d/(v_n \sin\theta)$. Sostituendo nella prima equazione otteniamo

$$h = \frac{d\,(v_c - v_n \cos\theta)}{v_n \sin\theta}\,.$$

Determiniamo il minimo di $h$ al variare di $\theta$:

$$\frac{dh}{d\theta} = \frac{d}{v_n}\frac{v_n - v_c\cos\theta}{(\sin\theta)^2} = 0$$

da cui $\cos\theta = v_n/v_c$. Possiamo calcolare adesso il tempo di attraversamento:

$$t = \frac{d}{v_n \sin\theta} = \frac{d}{v_n\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \frac{d}{v_n\sqrt{1 - v_n^2/v_c^2}}\,.$$