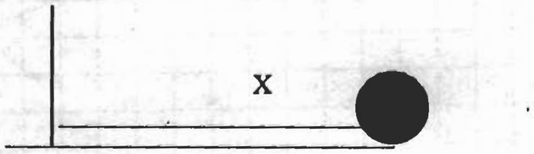
Problema 1:
Una puleggia di massa 0.470 kg e raggio di 0.0570 m è legata ad un punto P con un filo lungo 2 m avvolto nella sua gola interna di 3 cm di raggio (YoYo orizzontale) ed è libera di scivolare senza attrito su di un piano orizzontale. Il filo inizialmente è praticamente tutto avvolto all'interno della puleggia, che si trova ferma nel punto iniziale: il filo è massivo, ma inestensibile: si sa che la massa di filo inizialmente avvolta attorno alla puleggia è pari a 0.10 kg. All'istante t=0 s si colpisce la puleggia all'altezza del suo centro con un impulso pari a 10 Ns, in direzione parallela al filo, e verso tale da far srotolare il filo stesso: la puleggia si mette in moto rettilineo sul piano orizzontale.



1

Nei calcoli si consideri la puleggia come un cilindro di raggio dato con la parte di filo avvolto a distanza fissa dal centro della puleggia stessa. Si noti che durante il moto la massa effettivamente in movimento cambia, mano a mano che il filo si srotola; può aiutare nello svolgimento del problema identificare quale sia il centro istantaneo di rotazione.

1. Si calcoli la velocità iniziale del centro della puleggia. (3,-1)
   v_{cp} [m/s] = 6.59 A 7.45 B 1.77 C 4.29 D 9.76 E ~~6.59~~
2. Si determini l'energia totale del sistema. (3,-1)
   E_{tot} [J] = 32.9 A 23.8 B 156 C ~~32.9~~ D 111 E 63.2
3. Si determini la velocità angolare iniziale della puleggia. (1,-1)
   ω [Js] = 220 A ~~220~~ B 1030 C 3140 D 2160 E 489

Dopo un certo tempo la carrucola ha percorso un metro: Il sistema puleggia+filo nello svolgersi ha ovviamente diminuito la sua massa.

4. Si calcoli la velocità nel nuovo punto. (3,-1)
   → v [m/s] = 6.81 A 17.8 B ~~6.81~~ C 8.14 D 3.28 E 2.69
5. Quanto vale la accelerazione della puleggia? (3,-1)
   a [m/s²] = 1.64 A ~~1.64~~ B 3.74 C 0.268 D 4.97 E 1.94
6. Quanto vale la tensione del filo? (2,-1)
   T [N] = [redacted] A 0.0439 B 0.0198 C 0.310 D 0.0175 E 0.177

1)
2)
3)

$$I_{CM} = \frac{1}{2} M R^2 + m(x) r^2 \qquad m(x) = m_0 - \underbrace{\frac{m_0}{\ell}}_{=\rho} x$$

$$I_p = M\left(\frac{R^2}{2} + r^2\right) + 2\, m(x)\, r^2 \equiv I_p(x)$$

$$\dot{I}_p\, \omega + \dot{\omega}\, I_p = F r \qquad F = \text{forza impulsiva}$$

$$I_p\, \Delta\omega + \omega\, \Delta I_p = F \Delta t\, r$$

$$\Delta I_p = -2 \rho r^2 \Delta x \Rightarrow \qquad \dot{x} = \omega r \Rightarrow \quad \Delta x = \omega r \Delta t$$

$$I_p\, \omega(\Delta t) - \underbrace{2 \rho \omega^2 r^3 \Delta t}_{\to 0 \text{ if } \Delta t \to 0} = F \Delta t\, r$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{I r}{\left[M\left(\frac{R^2}{2} + r^2\right) + 2 m(0) r^2\right]}} \; ; \quad \boxed{v_0 = \omega_0 r = \frac{I r^2}{\left[M\left(\frac{R^2}{2} + r^2\right) + 2 m(0) r^2\right]}}$$

$$\boxed{E_0 = \frac{I^2 r^2}{2\left[M\left(\frac{R^2}{2}+r^2\right)+2m(0)r^2\right]}} \qquad E_0 = \frac{1}{2} I_p(0)\,\omega_0^2$$

4) $E_0 = \frac{1}{2} I_p(x)\,\omega^2$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2E_0}{\left[M\left(\frac{R^2}{2}+r^2\right)+2m(x)r^2\right]}}} \qquad v = \omega r$$

5) $$\frac{dE_0}{dt} = 0 = \frac{1}{\cancel{2}} I_p(x)\,\cancel{2}\omega\dot{\omega} + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{dI_p}{dx}\dot{x}$$

$$= I_p(x)\,\cancel{\omega}\dot{\omega} + \frac{1}{\cancel{2}}\omega^2(-\cancel{2}\rho)r^2\,\cancel{\omega}r$$

$\dot{x} = \omega r$

$\ddot{x} = \dot{\omega} r$ $\quad\Rightarrow\quad I_p(x)\,\frac{\ddot{x}}{r} - \rho\,\omega^2 r^3 = 0$

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{\rho\,\omega^2 r^4}{I_p(x)}}$$

6) II eq. card. rispetto al c. di m.

$$r T = \frac{d}{dt}\left(I_{cm}\,\omega\right) = \left(\frac{d}{dt} I_{cm}\right)\omega + I_{cm}\,\dot{\omega}$$

$$= -\rho\,\dot{x}\,r^2\,\omega + \left(\frac{1}{2}MR^2 + m(x)\,r^2\right)\dot{\omega}$$

$$= -\rho\,\dot{x}\,r^2\,\frac{\dot{x}}{\cancel{r}} + \left(\frac{1}{2}MR^2 + (m_0 - \rho x)\,r^2\right)\frac{\ddot{x}}{r}$$

$$\Rightarrow \quad T = -\rho\,\dot{x}^2 + \left(\frac{1}{2}MR^2 + (m_0-\rho x)\,r^2\right)\frac{\ddot{x}}{r^2}$$