

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA
ANNO ACCADEMICO 2004-2005

Alejandro Kievsky, Luca Girlanda

**Modellistica Nucleare e Interazione
Radiazione-Materia**

Dispense del Corso

Scuola di Specializzazione in Fisica Sanitaria

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Principali caratteristiche dei nuclei	1
1.2	Nucleoni e interazione forte	3
1.3	Isospin	6
1.4	Scambio di mesoni	10
2	Liquid drop model	13
2.1	Energia di legame nucleare	13
2.2	La formula semiempirica di massa	15
2.3	Il modello a goccia: oscillazioni attorno alla forma sferica . . .	19
2.4	Nuclei deformati e spettri rotazionali	26
3	Shell model	31
3.1	Il potenziale medio del nucleo	31
3.2	Oscillatore armonico isotropo	34
3.3	Buca di potenziale sferica infinita	37
3.4	Accoppiamento spin-orbita	39
3.5	L'approccio dello shell model al problema a molti corpi	42
4	Momenti di multipolo e transizioni elettromagnetiche	48
4.1	Momenti di multipolo statici	48
4.2	Espansione multipolare del campo di radiazione	55
4.3	Transizioni multipolari	59
4.4	Transizioni di singola particella	63
4.5	Transizioni elettromagnetiche dei modi vibrazionali	66
5	Decadimenti nucleari	68
5.1	Nozioni generali	69

5.2	Unità di misura	70
5.3	Larghezza di decadimento	72
5.4	Radioattività naturale	73
6	Decadimenti beta	75
6.1	Valori- Q delle reazioni	76
6.2	Teoria di Fermi	77
6.3	Decadimenti permessi e vietati	85
7	Decadimenti alfa	88
7.1	Bilancio energetico	88
7.2	La legge di Geiger-Nuttall	91
8	Fissione nucleare	95
8.1	Instabilità per deformazioni	96
8.2	Distribuzione di massa	98
8.3	Energia di attivazione	100
9	Interazione radiazione-materia	104
9.1	Analisi cinematica del processo d'urto (collisioni dure)	104
9.2	Potere frenante per le particelle cariche pesanti	106
9.3	Potere frenante per gli elettroni	113
9.4	Interazione dei fotoni	114
10	Interazione dei neutroni con la materia	119
10.1	Moderazione di neutroni	120
10.2	Diffusione dei neutroni	122
10.3	Cattura di neutroni - modello ottico	126
11	Fusione termonucleare	129
11.1	Reazioni termonucleari	129
11.2	Criterio di Lawson e meccanismi di confinamento	131

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Principali caratteristiche dei nuclei

Dagli esperimenti di Rutherford sappiamo che il nucleo atomico è concentrato in una piccola regione al centro dell'atomo, con raggio dell'ordine dei 10^{-13} cm. A questa unità di misura è stato dato il nome di "fermi" (fm), in onore di Enrico Fermi, per i suoi fondamentali contributi nel campo della fisica nucleare. A questa distanza si cominciano a rilevare deviazioni rispetto alla diffusione coulombiana di particelle cariche (diffusione di Rutherford). Una possibile definizione del raggio nucleare è infatti a partire da esperimenti di diffusione da parte del nucleo di entità nucleari più piccole, come protoni, neutroni, deutoni, particelle α . Quando nucleo e particella carica sono sufficientemente vicini, la repulsione coulombiana viene compensata da una forza attrattiva. Il fatto che una tale forza attrattiva esista è ovvio per il fatto che particelle nucleari possono legarsi tra loro per formare nuclei stabili più pesanti. La distanza alla quale la repulsione coulombiana viene vinta dall'attrazione forte può essere presa come definizione di raggio nucleare. Questa forza attrattiva è a corto raggio, cosicché il raggio nucleare è una quantità abbastanza ben definita, molto meglio definita, ad esempio, del raggio atomico. Nel caso di diffusione di neutroni la repulsione coulombiana è ovviamente assente, e partecipa solo l'interazione specificamente nucleare che comincia ad agire per distanze dell'ordine del raggio nucleare. Il raggio nucleare è dell'ordine di grandezza che ci si aspetta dall'energia di legame dei nucleoni, protoni e neutroni. La lunghezza d'onda di un protone o un neutrone , di

massa M è

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2ME_{\text{cin}}}}. \quad (1.1)$$

Supponendo che l'energia cinetica sia dello stesso ordine dell'energia di legame (pari a circa 8.5 MeV, come vedremo), otteniamo $\lambda = 1.55$ fm, dello stesso ordine del raggio nucleare. In effetti è ragionevole che λ sia più piccola del raggio nucleare, perché in generale in un nucleo pesante saranno presenti molti nucleoni, che si troveranno in stati eccitati e la cui funzione d'onda dovrà perciò contenere diversi nodi. Da notare che lo stesso ragionamento applicato agli elettroni diventa un forte argomento contro la presenza degli elettroni nel nucleo. A questa ipotesi si potrebbe essere condotti dall'osservazione di decadimenti β , in cui, come vedremo, elettroni vengono emessi dai nuclei. Tuttavia, se supponiamo che gli elettroni siano presenti nei nuclei, tali elettroni dovrebbero avere lunghezza d'onda minore del raggio nucleare, quindi

$$\lambda = \frac{\hbar c}{E_{\text{cin}}} < 1 \text{ fm} \implies E_{\text{cin}} > \frac{\hbar c}{1 \text{ fm}} = 40 \text{ MeV}. \quad (1.2)$$

Abbiamo usato l'approssimazione ultrarelativistica per gli elettroni, visto il risultato finale. Questo valore è molto più grande dell'energia di legame nucleare. Inoltre l'energia tipica degli elettroni emessi nei decadimenti β è molto minore (dell'ordine di qualche MeV). L'ipotesi che gli elettroni siano costituenti del nucleo non è quindi plausibile. Ulteriori argomenti contro tale ipotesi sono: *i*) Spin e statistica dei nuclei: nuclei con peso atomico pari hanno spin intero e obbediscono alla statistica di Bose-Einstein, nuclei con peso atomico dispari hanno spin semiintero e obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac. Questo è consistente con l'ipotesi che i nuclei contengano solo protoni e neutroni (entrambi fermioni). Se invece sostituissimo un neutrone con un protone ed un elettrone (anch'esso fermione) avremmo dei cambi di statistica da Bose-Einstein a Fermi-Dirac e viceversa. *ii*) Momenti magnetici nucleari: sono tutti dell'ordine del magnetone del protone $e\hbar/2Mc$, mentre dovrebbero essere molto maggiori (dell'ordine del magnetone di Bohr) se ci fossero elettroni nel nucleo. Quindi siamo costretti a concludere che gli elettroni osservati nei decadimenti β non preesistono nel nucleo che decade, ma vengono creati nello stesso momento in cui sono emessi. I decadimenti β sono da questo punto di vista più simili all'emissione di luce da atomi che ai decadimenti α , in cui quattro nucleoni che formano una particella α si "staccano" dal nucleo che decade.

Il nucleo è quindi formato soltanto da protoni e neutroni, che perciò vengono detti nucleoni¹. I protoni sono gli unici che contribuiscono alla carica elettrica nucleare, che vale Ze , se Z indica il numero di protoni. La carica nucleare è l'unica caratteristica del nucleo che gioca un ruolo per la struttura atomica degli elementi, e quindi per le loro proprietà chimiche, a parte piccole correzioni come la struttura iperfina o lo splitting isotopico delle linee spettrali. I neutroni invece contribuiscono in misura approssimativamente pari ai protoni alla massa atomica. In effetti era noto da tempo, ben prima che si scoprisse l'esistenza dei nuclei, che le masse atomiche erano quasi tutte vicine ad essere multipli interi della massa dell'atomo di idrogeno. Le eccezioni a questa regola sono dovute all'esistenza di diversi isotopi per ogni elemento, cioè atomi i cui nuclei hanno lo stesso numero di protoni (numero atomico), e quindi le stesse proprietà chimiche, ma diverso numero di neutroni. La massa atomica di ogni isotopo è con buona approssimazione un multiplo intero della massa dell'idrogeno, ma se un dato elemento chimico si trova in natura sotto forma di diversi isotopi, questo avrà naturalmente una massa atomica non intera. L'analisi della composizione isotopica di un elemento e la determinazione della massa atomica di un dato isotopo richiede l'uso dello spettrometro di massa.

Ogni nucleo è formato quindi da A nucleoni, dove A è la somma del numero di protoni Z e del numero di neutroni N . Per identificare completamente un isotopo si scrive AX , dove X è il simbolo chimico del corrispondente atomo, che determina il numero atomico. Una scrittura più esplicita ma ridondante è AZX_N . Naturalmente in ogni caso il numero di massa A non corrisponde esattamente alla massa atomica, poiché questa non è esattamente un multiplo intero della massa dell'idrogeno (vedi più avanti). Più esattamente le masse atomiche sono riferite alla massa dell'isotopo ${}^{12}\text{C}$ ($M({}^{12}\text{C}) = 12$ u.m.a.).

1.2 Nucleoni e interazione forte

Avendo appurato che nel nucleo atomico sono confinati in piccolissime distanze protoni e neutroni, sorgeva il problema di determinare la forza che li tiene insieme, che deve vincere la repulsione elettrostatica. Da allora ad oggi molta strada è stata percorsa, che ha portato alla teoria delle interazioni

¹L'esistenza dei neutroni, particelle neutre di massa circa uguale a quella del protone, venne stabilita nel 1931 da Chadwick e Marie Curie e Joliot nel 1932.

forti. Queste interazioni sono descritte al livello più fondamentale da una teoria di campo quantistica, che prende il nome di cromodinamica quantistica (QCD). Nel linguaggio della teoria di campo quantistica il campo in esame è trattato come variabile dinamica (esso è quindi un operatore) e gli stati fisici sono costituiti dalle eccitazioni elementari del campo, detti anche “quanti” del campo, nello stesso modo in cui gli stati di un oscillatore armonico possono essere caratterizzati dal numero di eccitazioni fondamentali (detto anche numero di occupazione). Nel caso dell’elettrodinamica quantistica (QED) i quanti del campo elettromagnetico sono i fotoni. Si dice che i fotoni “mediano” il campo elettromagnetico. Nel caso della cromodinamica quantistica i mediatori dell’interazione sono i gluoni. Come la QED, anche la QCD è una teoria di gauge, possiede cioè l’invarianza di gauge familiare dall’elettromagnetismo. Tuttavia nel caso della QCD la simmetria di gauge è più complicata poiché si tratta di un gruppo non abeliano. Come conseguenza i gluoni, esistenti in otto diverse varietà, interagiscono tra di loro (sono cioè “colorati”, essendo il “colore” l’analogo per QCD della carica elettrica per QED). Ciò fa della QED e della QCD due teorie radicalmente diverse nel loro comportamento. In particolare QCD gode della proprietà della “libertà asintotica”, che è valsa lo scorso anno il premio Nobel per la Fisica a Gross, Wilczek e Politzer. Ciò significa che l’intensità dell’interazione diminuisce quanto più sono piccole le scale di distanza in gioco (o grandi le scale di energia alle quali conduciamo gli esperimenti). Viceversa, l’intensità dell’interazione aumenta quanto più cerchiamo di allontanare due cariche di colore tra loro. Si ritiene che questo comportamento sia alla base del fenomeno del confinamento del colore, cioè del fatto che non osserviamo cariche di colore isolate. Le cariche di colore elementari nella QCD sono i quarks, cosiccome gli elettroni sono le cariche elettriche elementari della QED. Essi esistono in 3 varietà di colore. Bisogna dire che i quarks, oltre a possedere carica di colore, possiedono anche carica elettrica, interagiscono cioè anche con i fotoni (mentre gli elettroni non interagiscono coi gluoni). Sono conosciuti fino ad ora 6 “tipi” di quarks (ognuno dei quali, come detto, esistente in tre varietà di colore). A questa “tipologia” viene dato il nome di “sapore” (in inglese “flavour”) per distinguerla dal colore. Questi sapori sono denominati “up”, “charm”, “top” e “down”, “strange”, “bottom”, i primi con carica elettrica $2/3e$, i secondi con carica elettrica $-1/3e$. Il fatto che non siano mai state rivelate cariche elettriche frazionarie isolate è un’altra manifestazione evidente del confinamento. Infatti i tre diversi colori di ogni quark formano un tripletto $\mathbf{3}$ del gruppo di colore $SU(3)_c$. Confinamento del colore vuol

dire che gli stati fisici sono singoletti rispetto al gruppo di colore $SU(3)_c$. I modi più semplici per ottenere un singoletto di colore a partire dai quarks è moltiplicare 3 tripletti, o un tripetto e un antitripetto. La prima possibilità è quella realizzata dai barioni, tra cui protone e neutrone, formati da tre quarks. La seconda possibilità è realizzata dai mesoni, formati da una coppia quark-antiquark. In entrambi i casi la carica elettrica non è mai frazionaria.

Dato che gli stati fisici sono singoletti di colore (sono “neutri”) a grandi distanze, essi in effetti non interagiscono attraverso lo scambio di gluoni, ma attraverso lo scambio di altre particelle, anch’esse singole di colore. Poiché queste particelle sono massive (non esistono particelle di massa nulla in QCD; si dice che in QCD c’è un “mass gap”), l’interazione forte è a corto raggio e diminuisce esponenzialmente per distanze comparabili con la lunghezza d’onda Compton della particella mediatrice. La particella più leggera nella QCD è il mesone π , pione, che ha una massa di circa 140 MeV. Il range della forza nucleare è quindi dell’ordine di 1 fm.

Abbiamo detto che sono stati trovati finora 6 sapori di quarks. In realtà per la vita di tutti i giorni sono importanti solo i sapori up e down, quelli di massa più piccola, che sono i costituenti, nel senso visto sopra, di protoni e neutroni. Il protone è formato da 2 quarks up e un quark down (carica elettrica $+e$), mentre il neutrone è formato da un quark up e due quarks down (carica elettrica zero). A solo titolo evocativo scriviamo la Lagrangiana della QCD, limitandoci ai due sapori leggeri di quarks,

$$L = \int d^4x \sum_{k=u,d} \bar{q}_k^i(x) \gamma^0 \left[i\gamma^\mu \left(\partial_\mu \delta_{ij} - ig A_\mu^a \frac{\lambda_{ij}^a}{2} \right) - m_k \delta_{ij} \right] q_k^j(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}. \quad (1.3)$$

Senza la pretesa di chiarire in dettaglio il significato preciso di quanto scritto, che ci porterebbe fuori dal nostro tema, vogliamo comunque illustrare alcuni punti. Le variabili dinamiche in termini delle quali è formulata la QCD sono i campi dei quarks $q_k(x)$, dove k è un indice di sapore che denota rispettivamente i quarks up e down, e i campi dei gluoni A_μ^a (con $a = 1, \dots, 8$). I campi dei gluoni sono campi vettoriali e hanno un indice di quadrivettore di Lorentz, così come il campo del fotone di QED è rappresentato dal potenziale (quadri)vettore A_μ . Invece i campi dei quarks sono dal punto di vista delle trasformazioni di Lorentz, dei bispinori di Dirac: si trasformano come oggetti di spin 1/2 e hanno quattro componenti in uno spazio in cui agiscono le matrici di Dirac γ_μ , che sono, per ognuno degli indici di Lorentz μ , delle matrici 4×4 . Gli indici i e j sono indici di colore, che assumono tre valori

($i, j = 1, 2, 3$), mentre le matrici nello spazio del colore λ_{ij}^a (per $a = 1, \dots, 8$) sono le matrici di Gell-Mann di SU(3). Altre quantità importanti sono la costante di accoppiamento quarks-gluoni g , che gioca lo stesso ruolo della carica elettrica in QED, e m_k , per $k = u, d$, che rappresentano termini di massa per i campi dei quarks up e down. Quanto all'ultimo termine $F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}$, rappresenta la dinamica degli 8 campi dei gluoni che contiene anche, come caratteristica propria della QCD rispetto alla QED, le interazioni dei gluoni con altri gluoni.

Nonostante si abbiano ormai degli stringenti argomenti per ritenere che questa Lagrangiana sia quella giusta della teoria delle interazioni forti, la storia non finisce qui. L'interazione tra questi "costituenti elementari" che risulta da questa Lagrangiana è così complicata, almeno a bassa energia, che è assai arduo descrivere i barioni e i mesoni a partire da questi mattoni fondamentali. Non sono i quarks e i gluoni i gradi di libertà più adeguati per descrivere la QCD a bassa energia, che è l'ambito della fisica nucleare. In particolare gli stati fisici non sembrano avere alcuna somiglianza con i mattoni fondamentali elencati prima. Non osserviamo nell'esperienza quotidiana nè quarks nè gluoni, cosa che per inciso ha comportato una grande difficoltà nell'individuare la giusta teoria, contrariamente a quanto avvenuto per QED. Ciononostante ci sono alcune caratteristiche della teoria che si riflettono direttamente nelle proprietà degli adroni², sono le simmetrie della teoria. Nella prossima sezione analizziamo una simmetria importante nel mondo degli adroni, la simmetria di isospin.

1.3 Isospin

Una importante simmetria della Lagrangiana della QCD appare se la massa del quark up m_u è uguale alla massa del quark down m_d . In questo caso possiamo trasformare tra loro i campi dei quarks up e down con delle matrici di SU(2) (analogamente a quanto avviene sotto rotazioni ad uno stato di spin 1/2 in meccanica quantistica) che mescolano i due sapori, ma senza modificare la forma della Lagrangiana. Vi è quindi un gruppo SU(2) di trasformazioni che lasciano invariata la teoria. Questo gruppo di trasformazioni viene chiamato isospin, e i generatori sono degli operatori T_i ($i = 1, 2, 3$) che

²Gli adroni sono le particelle che risentono dell'interazione forte.

hanno le proprietà di commutazione del gruppo SU(2),

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk}T_k. \quad (1.4)$$

Sotto questa simmetria i campi dei quarks up e down si trasformano quindi secondo la rappresentazione di doppietto,

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \longrightarrow e^{i\alpha^a \frac{\tau^a}{2}} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

dove α^a sono i tre parametri della trasformazione di SU(2) e le matrici di Pauli τ sono definite da

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Questa simmetria non è mantenuta se includiamo anche l'elettromagnetismo, in quanto i campi dei quarks up e down hanno carica elettrica differente. È conveniente scegliere la direzione 3 come quella definita dai campi dei quarks up e down, cosicché

$$T_3 u(x) = \frac{1}{2}u(x), \quad T_3 d(x) = -\frac{1}{2}d(x). \quad (1.7)$$

Il fatto che in un determinato limite (che è vicino alla realtà, in quanto m_u ed m_d sono molto vicine tra loro - in realtà entrambe sono molto piccole e possono essere trattate come perturbazioni in molti casi) esista una tale simmetria ha delle conseguenze sulla dinamica delle interazioni forti. Ad esempio, così come l'invarianza sotto rotazioni di un sistema in meccanica quantistica ha come conseguenza una degenerazione nello spettro degli stati fisici, anche in QCD avremo una analoga degenerazione (approssimata): in teoria di campo quantistica, che è la teoria delle particelle, questo significa che le particelle potranno essere raggruppate in multipletti (multipletti di isospin) degeneri, cioè di massa (approssimativamente) uguale. Un esempio di multipletto di isospin è rappresentato da protone e neutrone: dal punto di vista delle interazioni forti essi rappresentano infatti, nell'approssimazione di cui sopra, due stati diversi della stessa particella, il nucleone appunto. La massa di protone e neutrone può essere oggi misurata molto accuratamente,

$$m_p = 938.27231(28) \text{ MeV}/c^2, \quad m_n = 939.56563 \text{ MeV}/c^2, \quad (1.8)$$

e la piccola differenza è da imputare a violazioni di isospin (dovute a $m_u \neq m_d$ e all'effetto dell'elettromagnetismo). Anche la differenza delle masse si conosce molto accuratamente,

$$m_n - m_p = 1.29332 \text{ MeV}/c^2 = 2.5309m_e \quad (1.9)$$

con errore sull'ultima cifra, dove abbiamo introdotto la massa dell'elettrone,

$$m_e = 0.510998902(21) \text{ MeV}/c^2. \quad (1.10)$$

Protone e neutrone costituiscono un doppietto di isospin,

$$T_3|p\rangle = \frac{1}{2}|p\rangle, \quad T_3|n\rangle = -\frac{1}{2}|n\rangle, \quad (1.11)$$

che si trasforma come il doppietto formato dai campi dei quarks up e down (in questa rappresentazione $T_3 = \tau^3/2$). Se introduciamo le matrici τ_{\pm} ,

$$\tau_{\pm} = \frac{\tau^1 \pm i\tau^2}{2}, \quad (1.12)$$

avremo, in completa analogia con l'algebra del momento angolare,

$$\tau_+|p\rangle = 0, \quad \tau_-|p\rangle = |n\rangle \quad (1.13)$$

$$\tau_+|n\rangle = |p\rangle, \quad \tau_-|n\rangle = 0. \quad (1.14)$$

In generale si avrà infatti

$$J_{\pm}|JM\rangle = \sqrt{J(J+1) - M(M\pm 1)}|J(M\pm 1)\rangle, \quad (1.15)$$

che discende direttamente dalle proprietà di commutazione di SU(2). La struttura in quarks dei nucleoni può essere rappresentata nella forma

$$|p\rangle = |uud\rangle, \quad |n\rangle = |udd\rangle, \quad (1.16)$$

in accordo con gli assegnazioni di numeri quantici per i campi dei quarks up e down,

	A	T	T_3	Q/e
u	1/3	1/2	+1/2	2/3
d	1/3	1/2	-1/2	-1/3

Essendo il nucleone un fermione, la sua descrizione richiederà 5 “coordinate”, la posizione \mathbf{r} , lo spin σ_z (in una direzione specifica) e l’isospin τ_3 . Per due nucleoni possiamo costruire autostati dell’isospin totale,

$$\xi_{T_z}^T = \sum_{m_1, m_2} \langle 1/2 m_1; 1/2, m_2 | T T_z \rangle \xi_{m_1}^{1/2}(1) \xi_{m_2}^{1/2}(2), \quad (1.17)$$

dove (1) e (2) denotano collettivamente le coordinate spaziali e di spin del nucleone 1 e 2 rispettivamente. Le due combinazioni irriducibili sono quella di tripletto di isospin,

$$\begin{aligned} \xi_1^1 &= \xi_{1/2}^{1/2}(1) \xi_{1/2}^{1/2}(2) \\ \xi_{-1}^1 &= \xi_{-1/2}^{1/2}(1) \xi_{-1/2}^{1/2}(2) \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\xi_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\xi_{1/2}^{1/2}(1) \xi_{-1/2}^{1/2}(2) + \xi_{-1/2}^{1/2}(1) \xi_{1/2}^{1/2}(2) \right] \quad (1.19)$$

simmetrica per scambio di isospin, e quella ortogonale, di singoletto,

$$\xi_0^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\xi_{1/2}^{1/2}(1) \xi_{-1/2}^{1/2}(2) - \xi_{-1/2}^{1/2}(1) \xi_{1/2}^{1/2}(2) \right]. \quad (1.20)$$

L’operatore di isospin totale, $\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}(1) + \hat{\mathbf{T}}(2)$ ha per autovalori

$$\hat{T}_3 \xi_{T_z}^T = T_z \xi_{T_z}^T, \quad \hat{\mathbf{T}}^2 \xi_{T_z}^T = T(T+1) \xi_{T_z}^T. \quad (1.21)$$

Un altro multipletto (quasi) degenere di isospin è il tripletto dei pioni, che rappresentano gli adroni più leggeri. I pioni esistono in tre stati di carica $(+1, 0, -1)$ e corrispondenti a componente z di isospin pari a $(+1, 0, -1)$. Possiamo quindi stabilire un’algebra di isospin per il sistema nucleone-pione:

- a) $\pi^+ - p$ ha $T_3 = 3/2 \implies T = 3/2$.
- b) $\pi^- - p$ è una miscela di $T_3 = 1/2$ e $T_3 = 3/2$, così come $\pi^+ - n$.
- c) $\pi^- - n$ ha $T_3 = -3/2 \implies T = 3/2$.

Si osserva sperimentalmente che l’interazione a bassa energia è maggiore negli stati $T = 3/2$ rispetto agli stati $T = 1/2$, e non dipende (a parte effetti elettromagnetici) dal valore di T_3 . Questa è un’ulteriore manifestazione della simmetria di isospin della QCD. Come già detto l’isospin non è esattamente conservato, anche a causa della presenza dell’elettromagnetismo, che distingue tra quark up e quark down. La carica del nucleone i è legata alla componente 3 dell’isospin dalla relazione

$$Q_N(i) = \frac{1}{2} + T_3(i), \quad (1.22)$$

e la forza di Coulomb tra i nucleoni i e j è

$$\frac{e^2}{r_{ij}} \left[\frac{1}{2 + T_3(i)} \right] \left[\frac{1}{2 + T_3(j)} \right]. \quad (1.23)$$

Mentre \mathbf{T} non è più conservato, la componente 3 lo sarà sempre, perché è legata alla carica elettrica. La relazione tra carica elettrica e isospin per i pioni è

$$Q_\pi = T_3, \quad (1.24)$$

mentre in generale, si ha la seguente espressione

$$Q = T_3 + \frac{1}{2}Y, \quad (1.25)$$

dove Y è chiamata ipercarica.

1.4 Scambio di mesoni

Come già detto l'interazione forte tra nucleoni è mediata, a bassa energia, dai mesoni. Nell'intervallo di energia rilevante per la fisica nucleare, i mesoni più importanti da questo punto di vista sono i pioni. I pioni sono prodotti in collisioni nucleone-nucleone,

$$N + N \longrightarrow N + N + \pi, \quad (1.26)$$

se l'energia è sufficiente. Poiché la carica deve essere conservata, due protoni potranno creare π^+ o π^0 , mentre è necessario almeno un neutrone per produrre π^- . I pioni hanno spin zero e parità negativa, e hanno massa

$$M_{\pi^\pm} = 139.6 \text{ MeV}/c^2, \quad M_{\pi^0} = 135.0 \text{ MeV}/c^2. \quad (1.27)$$

Sono particelle instabili, che prevalentemente si disintegrano rispettivamente in $\mu + \nu$ (vita media $\tau_\pm \sim 10^{-8}$ s) e in $\gamma + \gamma$ (vita media $\tau_0 \sim 10^{-16}$ s). Entrambi questi tempi sono grandi rispetto ai tempi tipici dei nucleoni legati nel nucleo $\tau \sim 10^{-22}$ s, quindi i pioni possono essere considerati particelle stabili dentro il nucleo. I pioni possono essere assorbiti dai nucleoni,

$$\pi + N \longrightarrow N, \quad (1.28)$$

ma in questo processo la massa della particella finale dovrà cambiare (conservazione di momento-energia). Questo è possibile solo per brevi periodi di tempo, come indicato dalla relazione di indeterminazione di Heisenberg

$$\Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta E} \sim \frac{\hbar}{M_\pi c^2} \sim 5 \cdot 10^{-24} \text{ s.} \quad (1.29)$$

In questo tempo può succedere che *i*) il pione è riassorbito dal nucleone: questo processo è sempre presente, e costituisce la stessa “essenza” del nucleone; *ii*) il pione è assorbito da un altro nucleone sufficientemente vicino da poter essere raggiunto in questo breve tempo, $c\Delta t \sim 1.5 \text{ fm}$; questo processo è tra i più importanti all’origine della forza tra nucleone e nucleone. Nel contesto della meccanica quantistica non relativistica questa forza può essere descritta da un potenziale, il cui range è dell’ordine di 2 fm. È anche possibile studiare il processo

$$\pi + N \longrightarrow N^*, \quad (1.30)$$

in analogia a quanto avviene per gli atomi, in cui i fotoni sono diffusi elasticamente secondo un processo del tipo

$$\gamma + A \longrightarrow A^* \longrightarrow A + \gamma. \quad (1.31)$$

Studiando lo spettro si osserva (cfr. Fig. 1.1) un massimo nella sezione d’urto in prossimità di uno stato eccitato e la larghezza ci dà una stima della durata di vita dello stato eccitato. In questo caso si dice che siamo in presenza di una risonanza. Nel caso di diffusione $\pi - N$ si osserva un picco nella sezione d’urto $\pi^+ - p$ per un’energia cinetica nel laboratorio di circa 195 MeV. La risonanza in questione è chiamata $\Delta(1236)$ che ha numeri quantici $J^P = 3/2^+$ e $T = 3/2$. Questa risonanza sarà quindi visibile solo nei canali di diffusione con $T = 3/2$. Le $\Delta(1236)$ è il più leggero stato eccitato del nucleone (il successivo è il $N(1470)$, a 530 MeV sopra la soglia) ed è l’unico che può essere importante per la struttura nucleare.

Una domanda importante a cui dare risposta è quale sia il ruolo dei gradi di libertà non nucleonici per la struttura nucleare. Qui è necessario uno sforzo comune tra teorici e sperimentali, in cui errori sperimentali e approssimazioni teoriche vanno valutati con attenzione. Per esempio, prendiamo il deutone ${}^2\text{H}$,

$$\psi = a_2\psi(N^2) + b_2\psi(\Delta^2), \quad (1.32)$$

($N\Delta$ non è permesso perché ${}^2\text{H}$ ha $T = 0$), oppure il trizio ${}^3\text{H}$ o l’ ${}^3\text{He}$,

$$\psi = a_3\psi(N^3) + b_3\psi(N^2\Delta) + c_3\psi(N\Delta^2) + \dots \quad (1.33)$$

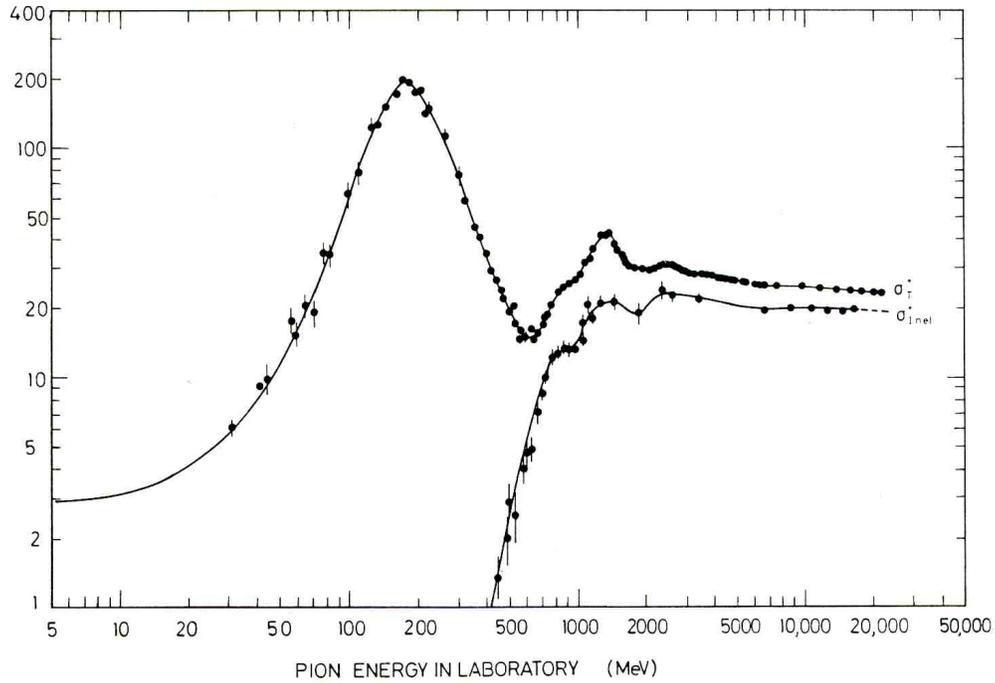


Figura 1.1: Sezione d'urto totale e inelastica per lo scattering $\pi^+ - p$. (Da Ref. [4]).

Si trova $|b_2|^2 \sim 0.02$ e $|b_3|^2 \sim |c_3|^2 \sim 0.02$, che sono numeri molto piccoli ma non zero. Questi piccoli contributi alla funzione d'onda nucleare possono avere conseguenze nei fattori di forma elettromagnetici o in alcuni processi dove per qualche motivo il contributo della parte principale della funzione d'onda è soppresso, per esempio la cattura $p + d \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$ a bassa energia. In linea di massima questi contributi possono essere ottenuti come correzioni alla funzione d'onda nucleare, ottenuta, nel quadro non relativistico, risolvendo l'equazione di Schroedinger.

Capitolo 2

Liquid drop model

2.1 Energia di legame nucleare

La massa nucleare M_X di un dato isotopo ${}^A_Z X_N$ è legata alla massa atomica m_A dalla relazione

$$M_X c^2 = m_A c^2 - Z m_e c^2 + \sum_{i=1}^Z B_i \quad (2.1)$$

dove B_i è l'energia di legame dell' i -esimo elettrone, $B_i \sim 10 - 100$ keV, e può quindi essere trascurata poiché le energie di massa atomiche sono dell'ordine di $m_A c^2 \sim A m_N c^2 \sim A \cdot 1000$ MeV. L'energia di legame dell'isotopo X è la differenza di massa tra l'isotopo e i suoi costituenti, Z protoni e N neutroni,

$$\begin{aligned} B(Z, N) &= \{Z m_p + N m_n - M_X\} c^2 \\ &= Z m_p c^2 + N m_n c^2 - m_A c^2 + Z m_e c^2 \\ &= \{Z m({}^1\text{H}) + N m_n - m({}^A X)\} c^2 \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato nell'ultimo passaggio con $m({}^A X)$ la massa atomica dell'isotopo ${}^A X$. Se le masse sono espresse in unità atomiche u ,

$$u = \frac{1g}{N_A} \quad (2.2)$$

è utile calcolare il valore di u in MeV,

$$u c^2 = 931.502 \text{ MeV}, \quad (2.3)$$

in modo che

$$m_p = 1.00727u, \quad m_n = 1.00866u. \quad (2.4)$$

Oltre all'energia di legame B si definisce anche l'energia di separazione di un nucleone, come la differenza tra l'energia di legame di un nucleo e quella del nucleo con un nucleone in più o in meno,

$$S_n(Z, N) = B(Z, N) - B(Z, N - 1), \quad (2.5)$$

$$S_p(Z, N) = B(Z, N) - B(Z - 1, N). \quad (2.6)$$

Variazioni nei valori di S riscontrate nelle vicinanze dei cosiddetti numeri magici, testimoniano la struttura in shell dei nuclei. Di seguito riportiamo l'energia di legame e le energie di separazione per alcuni nuclei

Nucleo	$\Delta(\text{MeV})$	$S_n(\text{MeV})$	$S_p(\text{MeV})$
^{16}O	-4.737	15.66	12.13
^{17}O	-0.810	4.14	13.78
^{17}F	1.952	16.81	0.60
^{40}Ca	-34.847	15.64	8.33
^{41}Ca	-35.138	8.36	8.89
^{41}Sc	-28.644	16.19	1.09
^{208}Pb	-21.759	7.37	8.01
^{209}Pb	-17.624	3.94	8.15
^{209}Bi	-18.268	7.46	3.80

dove Δ è l'eccesso di massa dato da

$$\Delta(Z, N) = (M(Z, N)_{\text{in } u} - A) \times 931.502 \text{ MeV}, \quad (2.7)$$

in modo che

$$B(Z, N) = Z\Delta(\text{H}) + N\Delta(n) - \Delta(Z, N). \quad (2.8)$$

La dipendenza di $B(Z, N)$ da A è approssimativamente lineare, ed è quindi conveniente definire l'energia di legame media B/A , che si trova essere approssimativamente costante, (se si escludono i nuclei più leggeri $A > 12$), con un massimo di circa 8.5 MeV per il ^{56}Fe , cfr. Fig. 2.1. Questa constatazione è all'origine del modello a goccia del nucleo.

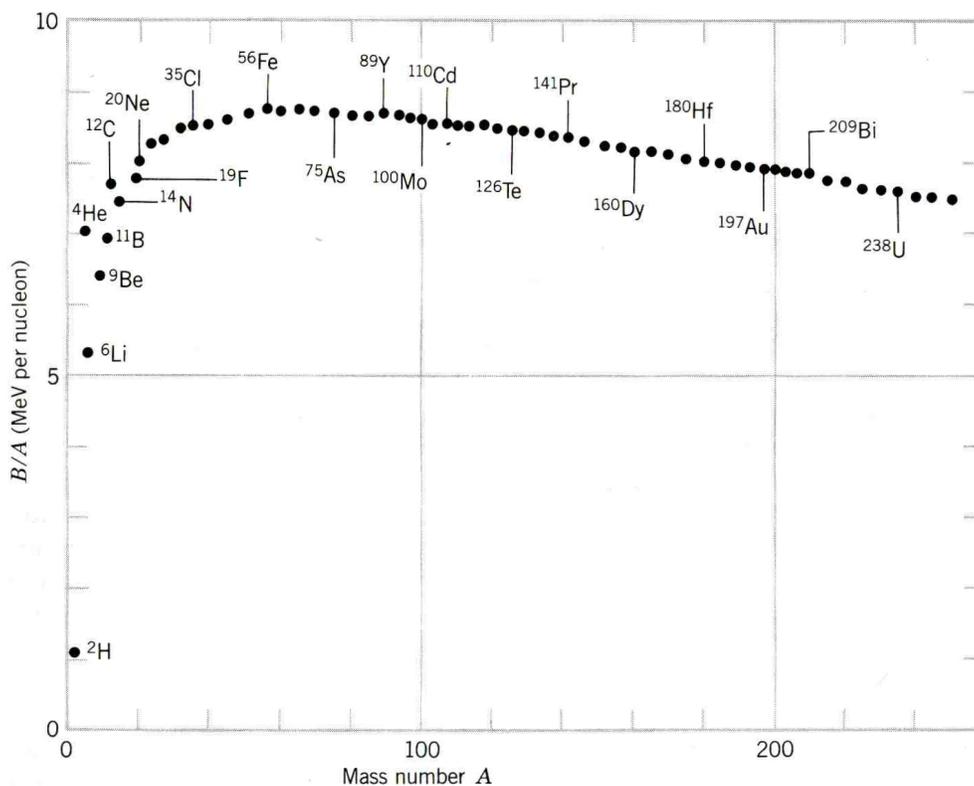


Figura 2.1: Energia di legame per nucleone. (Da Ref. [4]).

2.2 La formula semiempirica di massa

Il nucleo è un sistema saturato, cioè ha una bassissima comprimibilità ed ha una superficie ben definita (come un liquido). Ci sono però delle sostanziali differenze rispetto ad un liquido ordinario: ad esempio in un liquido ordinario le particelle sono a distanze in cui il potenziale ha il suo minimo, mentre in un nucleo questo minimo è a circa 1 fm ed i nucleoni si trovano in media a distanze di 2.4 fm. Un motivo per questa grande differenza è il fatto che i nucleoni obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac, e formano quindi un liquido quantistico; in questo caso il principio di Pauli gioca un ruolo nell'impedire che due nucleoni si trovino troppo vicini. In particolare i processi di diffusione sono piuttosto rari nei liquidi quantistici, al contrario dei liquidi ordinari. Quest'ultimo fatto ci farebbe piuttosto assimilare il nucleo a un gas di Fermi non interagente, poiché il cammino libero medio del nucleone è

dell'ordine delle dimensioni nucleari. Nonostante queste differenze, il “liquid drop model” riflette la succitata dipendenza lineare dell'energia di legame dal numero di massa. Infatti normalmente l'energia di legame totale cresce col numero di coppie $\sim 1/2A(A - 1)$, cosa che comporterebbe piuttosto $B \sim A^2$. Il comportamento totalmente diverso dei sistemi nucleari può essere attribuito alla proprietà di saturazione: un nucleone interagisce solo con un numero limitato di altri nucleoni dentro il nucleo, e quindi $B(N, Z) \sim A$. Un'altra conseguenza è il fatto che la densità nucleonica dentro il nucleo sia essenzialmente costante, con una brusca diminuzione alla superficie, in corrispondenza di un raggio R ,

$$R \sim r_0 A^{1/3}, \quad (2.9)$$

con $r_0 \sim 1.2$ fm sperimentalmente. L'origine fisica di questo comportamento risiede nel fatto che il potenziale a due corpi è a corto raggio e molto repulsivo a corta distanza.

La dipendenza dell'energia di legame dal numero di massa può essere ragionevolmente approssimata con la formula semiempirica di Bethe-Weizsäcker,

$$B(N, Z) = a_V A + a_S A^{2/3} + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_I \frac{(N - Z)^2}{A} + \delta(A) \quad (2.10)$$

con coefficienti determinati già dagli anni '70

$$a_V = 15.5 \text{ MeV}, \quad a_S = -16.8 \text{ MeV}, \quad a_C = -0.72 \text{ MeV}, \quad a_I = -23 \text{ MeV}, \quad (2.11)$$

e la cosiddetta energia di pairing,

$$\delta(A) = \begin{cases} 34 \text{ MeV } A^{-3/4}, (12 \text{ MeV } A^{-1/2}) & \text{even - even} \\ 0 & \text{even - odd} \\ -34 \text{ MeV } A^{-3/4}, (-12 \text{ MeV } A^{-1/2}) & \text{odd - odd.} \end{cases} \quad (2.12)$$

Il primo coefficiente, il termine di volume, $a_V \sim 16$ MeV può essere interpretato come l'energia di legame per nucleone nella materia nucleare, cioè nel limite $A \rightarrow \infty$. Il motivo per cui non è uguale a circa 8 MeV è che gli altri termini agiscono tutti nella stessa direzione per diminuire l'energia di legame. Il termine in a_S è un termine di superficie, proporzionale a $R^2 \sim A^{2/3}$ e ha origine nel fatto che i nucleoni vicino alla superficie contribuiscono di meno all'energia di legame nucleare. Si può calcolare dal coefficiente a_S una tensione superficiale σ definita come l'energia di superficie per unità di area,

$$\sigma = \frac{|a_S|}{4\pi r_0^2} \sim 0.93 \text{ MeV fm}^{-2}. \quad (2.13)$$

Il terzo termine è la repulsione elettrostatica dei Z protoni, direttamente proporzionale al numero di coppie protone-protone $\sim Z^2$ e inversamente proporzionale al raggio nucleare. a_I prende il nome di energia di simmetria, e tiene conto del fatto che i nuclei più stabili tendono ad avere lo stesso numero di protoni e neutroni, regola che è meglio rispettata dai nuclei leggeri. L'origine fisica di questo termine è il fatto che la forza nucleare è simmetrica rispetto alla carica (la forza tra protone e protone è uguale a quella tra neutrone e neutrone, se si trovano negli stessi stati. Scostamenti da questa situazione dovranno contribuire con un termine del secondo ordine (quindi quadratico in $(N - Z)$) all'energia di legame totale. È facile convincersi che la dipendenza da Z e N deve essere quella indicata, a partire da un modello di gas di Fermi. Se schematizziamo il potenziale dentro il nucleo come una buca cubica infinita, con livelli energetici degeneri per spin e isospin, è chiaro che la configurazione in cui questi livelli siano ugualmente popolati da protoni e neutroni sarà energeticamente favorita, grazie al principio di Pauli. Il valore trovato con queste considerazioni qualitative è abbastanza vicino al valore sperimentale. Il contributo di questi termini all'energia di legame per nucleone è illustrato nella Fig. 2.2. Infine l'ultimo termine tiene conto del fatto che due nucleoni identici tendono ad accoppiarsi tra loro in configurazioni particolarmente stabili. L'evidenza fenomenologica di questa forza di pairing appare quando rileviamo che esistono solo quattro nuclei stabili in natura con un numero dispari di protoni e neutroni, e tutti di numero di massa piccolo, (${}^2\text{H}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^{10}\text{B}$, ${}^{14}\text{N}$). Il termine di pairing distingue le situazioni in cui vi siano un numero pari di protoni e neutroni (nuclei "even-even") in cui tutti i nucleoni formano coppie particolarmente stabili, un numero pari di protoni e dispari di neutroni (o viceversa, nuclei "even-odd"), in cui un nucleone è "spaiato" e un numero dispari di protoni e neutroni (nuclei "odd-odd"), in cui due nucleoni sono "spaiati". Diverse forme per l'energia di pairing sono state proposte, tra cui quelle scritte sopra. Usando la formula semiempirica per l'energia di legame $B(Z, N)$, la massa di un nucleo diventa

$$M(Z, N) = Zm({}^1\text{H}) + Nm_n - \frac{B(Z, N)}{c^2}. \quad (2.14)$$

Per valori di A fissati questa è una parabola $M(Z)$. La parabola è centrata attorno al valore di Z in cui M raggiunge un minimo. Tale valore di Z lo troviamo imponendo che la derivata rispetto a Z sia zero,

$$\frac{\partial M}{\partial Z} = m({}^1\text{H}) - m_n + \left[\frac{2a_c Z}{A^{1/3}} - \frac{a_c}{A^{1/3}} - 4a_I \frac{(A - 2Z)}{A} \right] = 0 \quad (2.15)$$

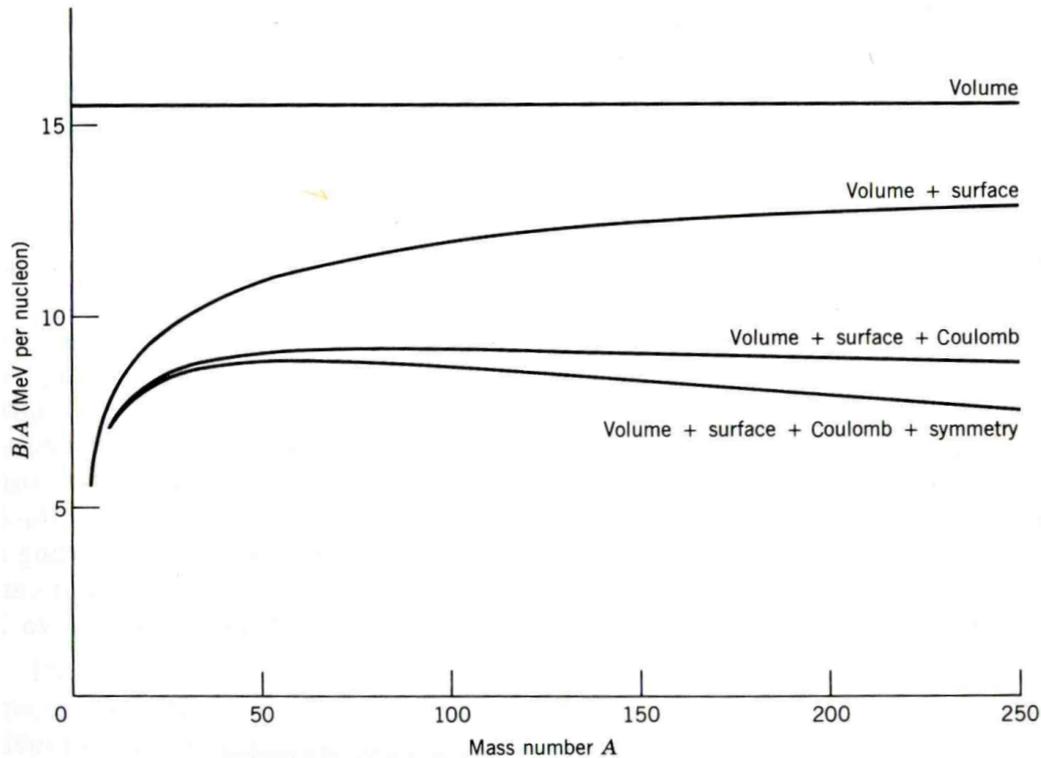


Figura 2.2: I diversi contributi alla formula semiempirica di massa. (Da Ref. [4]).

cioè

$$Z_{\min} \sim \frac{A}{2} \frac{1}{1 + A^{2/3} \frac{a_c}{4a_I}}. \quad (2.16)$$

Per piccoli A il valore “di equilibrio” sarà $Z \sim A/2$, mentre per grandi A il numero di protoni sarà più piccolo del numero di neutroni, a causa della repulsione coulombiana. Per nuclei con A dispari ce sarà una sola parabola, per nuclei con A pari ce ne saranno due, una (più bassa) corrispondente al caso even-even e l'altra (più alta) corrispondente al caso odd-odd. C'è quindi sempre un nuclide even-odd stabile, mentre nessuno odd-odd. Queste conclusioni sono ben verificate dalla tavola degli isotopi stabili. Gli isotopi instabili decadono per decadimento β^- o β^+ . Nel caso dei nuclei odd-odd si possono avere entrambi i tipi di decadimento, convertendo un neutrone in protone, o un protone in neutrone. Inoltre possono diventare energeticamente

possibili i doppi decadimenti β , in cui 2 protoni si convertono in due neutroni. Questa situazione è illustrata nella Fig. 2.3, nei casi $A = 125$ e $A = 128$. I doppi decadimenti β , che potrebbero avvenire anche senza emissione di

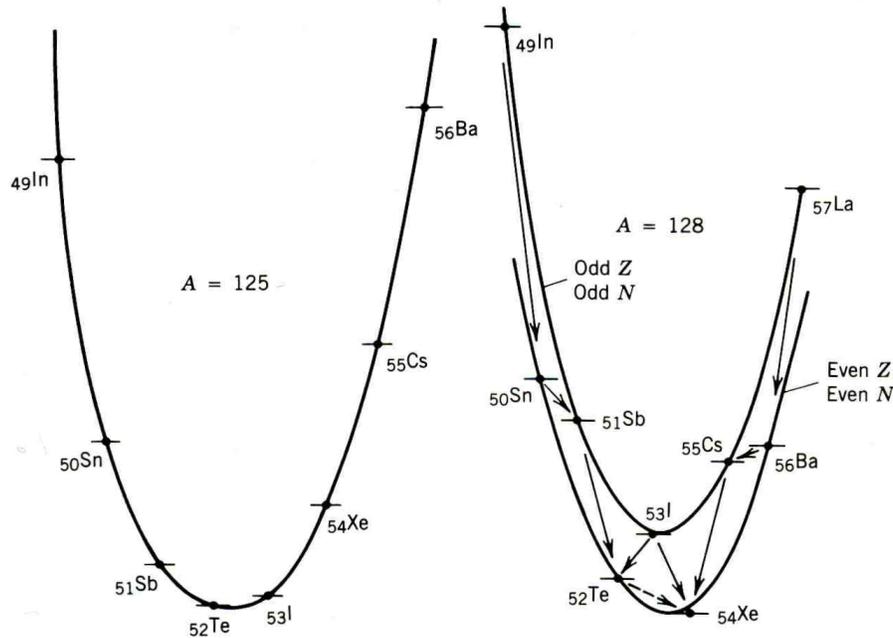


Figura 2.3: Parabole corrispondenti alla curva dell'energia di legame in funzione di Z per $A = 125$ e $A = 128$. Nel caso di A pari vi sono due parabole che si differenziano per l'energia di pairing. (Da Ref. [4]).

neutrini nel caso in cui questi ultimi fossero particelle di Majorana (identici cioè alle proprie antiparticelle), sono oggetto di ricerche sperimentali molto attive, volte a identificare una violazione del numero leptonico.

2.3 Il modello a goccia: oscillazioni attorno alla forma sferica

La formula di massa dà solo le proprietà statiche del modello a goccia. È anche possibile studiare le oscillazioni della superficie, che sono analoghe alle oscillazioni di alta frequenza di una goccia di liquido. Il raggio della superficie

può essere parametrizzato in termini di armoniche sferiche come segue

$$R = R(\theta, \phi) = R_\alpha \left[1 + \sum_{\lambda \geq 1} \sum_{\mu = -\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right]. \quad (2.17)$$

Essendo il raggio una quantità reale, deve essere

$$\alpha_{\lambda\mu} = (-)^{\mu} \alpha_{\lambda, -\mu}^*. \quad (2.18)$$

Inoltre, dal momento che sappiamo che il nucleo è pressoché incompressibile, possiamo imporre che il volume totale sia costante e pari a quello di una sfera di raggio R_0 , $V = 4/3\pi R_0^3$. Questo ci fornisce un vincolo che fissa il parametro R_α , che rappresenterebbe vibrazioni di monopolo, in termini dei coefficienti di deformazione $\alpha_{\lambda\mu}$

$$R_\alpha = \frac{R_0}{1 + \frac{1}{4\pi} \sum_{\lambda \geq 1} |\alpha_{\lambda\mu}|^2}. \quad (2.19)$$

Il termine di dipolo ($\lambda = 1$) descrive traslazioni dell'intero sistema, e quindi può essere ignorato nel caso in cui il nucleo sia isolato. Più esattamente, possiamo imporre che il centro di massa della nostra goccia stia nell'origine delle coordinate: questo fissa i coefficienti $\alpha_{1\mu}$ come funzioni quadratiche dei coefficienti di ordine superiore. La prima oscillazione dinamica è quella di quadrupolo $\lambda = 2$, che corrisponde a deformazioni ellissoidali. Altre condizioni su R , e quindi sui coefficienti $\alpha_{\lambda\mu}$ sono l'invarianza per parità e per rotazioni. Questo implica che i coefficienti $\alpha_{\lambda\mu}$ debbano comportarsi sotto queste trasformazioni come le armoniche sferiche corrispondenti, e li caratterizzano come tensori sferici. Le piccole oscillazioni attorno alla forma sferica saranno descritte da un'Hamiltoniana di oscillatori armonici,

$$H_{\text{coll}} = T + V = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} \left(B_\lambda |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2 + C_\lambda |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \right), \quad (2.20)$$

con dei parametri di inerzia B_λ e di rigidità C_λ che sono costanti reali. In effetti questa è la forma quadratica più generale invariante sotto rotazioni, ma vedremo qual è il collegamento tra questi parametri e la fisica del modello a goccia. Nonostante le nostre variabili dinamiche corrispondano a delle quantità complesse, i gradi di libertà sono sempre $(2\lambda + 1)$ per ogni λ , a causa della condizione di realtà del raggio che abbiamo già discusso. Alle quantità α^* corrisponderanno nella versione quantistica gli operatori aggiunti

α^\dagger . Questa Hamiltoniana può essere quantizzata nel modo usuale, definendo il momento coniugato alla variabile $\alpha_{\lambda\mu}$,

$$\pi_{\lambda\mu} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_{\lambda\mu}^\dagger} = B_\lambda \dot{\alpha}_{\lambda\mu}^*, \quad (2.21)$$

in modo che l'Hamiltoniana collettiva diventi

$$H_{\text{coll}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} \left(\frac{1}{B_\lambda} |\pi_{\lambda\mu}|^2 + C_\lambda |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \right), \quad (2.22)$$

che rappresenta una collezione di oscillatori armonici con frequenze

$$\omega_\lambda = \sqrt{\frac{C_\lambda}{B_\lambda}}. \quad (2.23)$$

Imponendo le relazioni di commutazione canonica,

$$[\alpha_{\lambda\mu}, \pi_{\lambda'\mu'}] = i\hbar \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}, \quad (2.24)$$

e definendo gli operatori bosonici di creazione e distruzione $p_{\lambda\mu}$ e $p_{\lambda\mu}^\dagger$,

$$p_{\lambda\mu} = \sqrt{\frac{B_\lambda \omega_\lambda}{2\hbar}} \alpha_{\lambda\mu} + i \sqrt{\frac{1}{2B_\lambda \hbar \omega_\lambda}} \pi_{\lambda\mu}^\dagger, \quad (2.25)$$

$$p_{\lambda\mu}^\dagger = \sqrt{\frac{B_\lambda \omega_\lambda}{2\hbar}} \alpha_{\lambda\mu}^\dagger - i \sqrt{\frac{1}{2B_\lambda \hbar \omega_\lambda}} \pi_{\lambda\mu}, \quad (2.26)$$

che hanno proprietà di commutazione

$$[p_{\lambda\mu}, p_{\lambda'\mu'}^\dagger] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}, \quad (2.27)$$

e tali che

$$\alpha_{\lambda\mu} = \sqrt{\frac{\hbar}{2B_\lambda \omega_\lambda}} \left[p_{\lambda\mu} + (-1)^\mu p_{\lambda, -\mu}^\dagger \right], \quad (2.28)$$

$$\pi_{\lambda\mu} = i \sqrt{\frac{B_\lambda \hbar \omega_\lambda}{2}} \left[p_{\lambda, \mu}^\dagger - (-1)^\mu p_{\lambda, -\mu} \right], \quad (2.29)$$

l'Hamiltoniana diventa

$$H_{\text{coll}} = \sum_{\lambda\mu} \hbar \omega_\lambda \left(p_{\lambda\mu}^\dagger p_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.30)$$

Per ogni valore di λ abbiamo uno spettro armonico, degenerare in μ . Dato che gli operatori di creazione e distruzione sono anch'essi tensori sferici di rango λ , ogni stato bosonico creato dagli operatori di creazione sul vuoto,

$$|\lambda\mu\rangle = p_{\lambda\mu}^\dagger|0\rangle \quad (2.31)$$

avrà momento angolare $I = \lambda$, componente- z $M = \mu$ e parità $(-1)^\lambda$. A questi bosoni viene dato il nome di fononi. Per costruire stati a due o più fononi $p_{\lambda\mu_1}^\dagger p_{\lambda\mu_2}^\dagger|0\rangle$ dobbiamo usare le regole di addizione dei momenti angolari:

$$|IM\rangle = \langle\lambda\mu_1\lambda\mu_2|IM\rangle p_{\lambda\mu_1}^\dagger p_{\lambda\mu_2}^\dagger|0\rangle. \quad (2.32)$$

Non tutti i valori $I = 0, \dots, 2\lambda$ sono permessi, a causa della simmetria di scambio dello stato. Infatti, poiché si tratta di bosoni,

$$p_{\lambda\mu_1}^\dagger p_{\lambda\mu_2}^\dagger|0\rangle = p_{\lambda\mu_2}^\dagger p_{\lambda\mu_1}^\dagger|0\rangle, \quad (2.33)$$

mentre d'altra parte, per i coefficienti di Clebsch-Gordan

$$\langle\lambda\mu_1\lambda\mu_2|IM\rangle = (-1)^I \langle\lambda\mu_2\lambda\mu_1|IM\rangle, \quad (2.34)$$

quindi

$$|IM\rangle = (-1)^I |IM\rangle, \quad (2.35)$$

da cui si ricava che I deve essere per forza pari. Lo spettro delle vibrazioni di quadrupolo sarà dunque caratterizzato da livelli di energia equidistanziati, $0, \hbar\omega_2, 2\hbar\omega_2, 3\hbar\omega_2, \dots$ caratterizzati da numeri quantici J^P rispettivamente $0^+, 2^+, (0^+, 2^+, 4^+), (0^+, 2^+, 4^+, 6^+), \dots$. Per le vibrazioni di ottupolo i livelli saranno sempre equidistanti, ma con diverse frequenze, $0, \hbar\omega_3, 2\hbar\omega_3, 3\hbar\omega_3$, con numeri quantici $0^+, 3^-, (0^+, 2^+, 4^+, 6^+), \dots$.

Molti nuclei sferici pari-pari hanno nel loro spettro uno stato $J^P = 2^+$ e, a circa il doppio dell'energia di eccitazione, un tripletto $(0^+, 2^+, 4^+)$, anche se non proprio degenerare, in accordo col modello di oscillazioni di quadrupolo collettive.

Vediamo adesso il legame con il modello a goccia, e calcoliamo le costanti B_λ e C_λ in termini dei parametri che descrivono il movimento del fluido all'interno della goccia.

L'ipotesi più semplice dalla quale partire è che il campo di velocità all'interno della goccia sia irrotazionale, cioè che

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0, \quad (2.36)$$

per cui possiamo scrivere la velocità come gradiente di una funzione scalare,

$$\mathbf{v} = -\nabla\Phi(\mathbf{r}). \quad (2.37)$$

Dall'ipotesi di incomprimibilità della materia nucleare segue che la densità all'interno del nucleo è costante ($\dot{\rho} = 0$) e quindi, dall'equazione di continuità

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \implies \Delta\Phi = 0. \quad (2.38)$$

La soluzione più generale di questa equazione che sia regolare nell'origine è

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda\mu} d_{\lambda\mu} r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi). \quad (2.39)$$

Imponendo che, sulla superficie, la componente radiale della velocità sia data da \dot{R} ,

$$v_r = -\frac{\partial}{\partial r}\Phi = \dot{R}, \quad \text{per } r = R_0, \quad (2.40)$$

otteniamo la corretta identificazione dei coefficienti $d_{\lambda\mu}$ in termini di derivate temporali dei coefficienti di deformazione, nel limite di piccole deformazioni,

$$d_{\lambda\mu} = -\frac{1}{\lambda} R_0^{2-\lambda} \dot{\alpha}_{\lambda\mu}. \quad (2.41)$$

Possiamo ora scrivere l'energia cinetica delle vibrazioni della superficie, se $\rho = A/V$ è la densità costante di nucleoni di massa m ,

$$T = \frac{1}{2} m\rho \int_V v^2(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2} m\rho \int_V |\nabla\Phi|^2 d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2} m\rho \oint_S \Phi^* \nabla\Phi ds, \quad (2.42)$$

e ds è l'elemento infinitesimo di superficie orientato lungo la perpendicolare uscente alla superficie stessa. Integrando sulla sfera di raggio R_0 arriviamo a

$$T = \frac{1}{2} m\rho R_0^5 \sum_{\lambda\mu} \frac{|\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2}{\lambda}, \quad (2.43)$$

che ci permette di ricavare il coefficiente di inerzia B_λ introdotto precedentemente,

$$B_\lambda = \frac{m\rho R_0^5}{\lambda} = \frac{3}{4\pi\lambda} AmR_0^2. \quad (2.44)$$

Nel caso di oscillazioni attorno ad una forma non sferica avremmo una ulteriore dipendenza da μ .

Per determinare i coefficienti di rigidità C_λ dobbiamo analizzare il cambiamento di energia della goccia per deformazioni della forma della sua superficie. Per fare questo possiamo sfruttare la formula semiempirica di massa di Bethe-Weizsäcker, e appoggiarci all'ipotesi di incomprimibilità della materia nucleare per stabilire che gli unici cambiamenti di energia saranno dovuti al termine di superficie e al termine di Coulomb. Il primo produrrà un cambiamento di energia proporzionale alla superficie della goccia deformata, $V(\alpha) = E_S(\alpha) - E(0)$, con

$$E_S(\alpha) = \sigma S = \sigma \int \frac{R^3}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}} d\Omega. \quad (2.45)$$

In questa equazione \mathbf{R} gioca il ruolo di una variabile di integrazione, mentre il versore normale alla superficie \mathbf{n} è definito da

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla R_\alpha}{|\nabla R_\alpha|}, \quad (2.46)$$

con

$$R_\alpha = \frac{R}{1 + \sum \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)}. \quad (2.47)$$

L'integrale si calcola espandendo fino al secondo ordine nei coefficienti di deformazione α . Portiamo avanti qualche passaggio,

$$S = \int R^2 d\Omega \left(1 + \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu} \right) |\nabla R_\alpha|, \quad (2.48)$$

dove il valore assoluto lo calcoliamo come radice quadrata del modulo quadro, e sviluppando per piccoli α ,

$$\begin{aligned} |\nabla R_\alpha| &= [\nabla R_\alpha \cdot \nabla R_\alpha]^{1/2} = \left[1 - 2 \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu} + 3 \sum_{\lambda\mu\lambda'\mu'} \alpha_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda'\mu'} Y_{\lambda\mu} Y_{\lambda'\mu'} \right. \\ &\quad \left. + R^2 \sum_{\lambda\mu\lambda'\mu'} \alpha_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda'\mu'} \nabla Y_{\lambda\mu} \cdot \nabla Y_{\lambda'\mu'} \right]^{1/2}; \end{aligned} \quad (2.49)$$

alla fine integriamo sull'angolo solido sostituendo

$$R = R(\theta, \phi) = R_0 \left[1 + \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu} - \frac{1}{4\pi} \sum_{\lambda\mu} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \right]. \quad (2.50)$$

Il risultato è

$$E_S(\alpha) = E_S(0) + \frac{1}{2} R_0^2 \sigma \sum_{\lambda\mu} [\lambda(\lambda+1) - 2] |\alpha_{\lambda\mu}|^2, \quad (2.51)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che le armoniche sferiche sono autofunzioni dell'operatore laplaciano per calcolare

$$\int d\Omega \nabla Y_{\lambda\mu}^* \cdot \nabla Y_{\lambda'\mu'} = - \int d\Omega Y_{\lambda\mu}^* \nabla^2 Y_{\lambda'\mu'} = \frac{\lambda(\lambda+1)}{R^2} \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}. \quad (2.52)$$

Dal confronto con l'Hamiltoniana collettiva scritta prima otteniamo il contributo della tensione superficiale al coefficiente di rigidità,

$$C_\lambda^S = (\lambda-1)(\lambda+2) R_0^2 \sigma, \quad (2.53)$$

con σ dato dall'Eq. (2.13). L'altro contributo al cambiamento dell'energia della goccia in presenza di deformazioni è il termine di Coulomb,

$$E_C(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{(Ze)^2}{V^2} \int \frac{d^3 r_1 d^3 r_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \quad (2.54)$$

che si può calcolare facilmente ricordando lo sviluppo

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \sum_{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} \frac{1}{r_{>}} \sum_m Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}_1) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}_2), \quad (2.55)$$

dove $r_{<}$ ($r_{>}$) è il minore (maggiore) tra r_1 e r_2 . Il termine di Coulomb in presenza di deformazioni si può quindi scrivere

$$\begin{aligned} E_C(\alpha) &= \frac{1}{2} \frac{(Ze)^2}{V^2} \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 \int_0^{R(\theta_1, \phi_1)} dr_1 \sum_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}_1) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}_2) \frac{4\pi}{2\ell+1} \\ &\times \left[\int_0^{r_1} dr_2 r_2^{\ell+2} r_1^{-\ell-1} + \int_{r_1}^{R(\theta_2, \phi_2)} dr_2 r_2^{1-\ell} r_1^{\ell} \right]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Sviluppando fino al secondo ordine negli α si arriva a

$$E_C(\alpha) = E_C(0) - \frac{1}{4\pi} \frac{(Ze)^2}{R_0} \sum_{\lambda\mu} \frac{3(\lambda-1)}{2\lambda+1} |\alpha_{\lambda\mu}|^2. \quad (2.57)$$

Siamo quindi arrivati ad una determinazione “microscopica” della dinamica delle deformazioni attorno alla forma sferica

$$B_\lambda = \frac{3}{4\pi\lambda} AmR_0^2, \quad C_\lambda = (\lambda - 1)(\lambda + 2)R_0^2\sigma - \frac{3(\lambda - 1)}{2\pi(2\lambda + 1)} \frac{(Ze)^2}{R_0}. \quad (2.58)$$

Possiamo quindi calcolare lo spettro delle vibrazioni. Ad esempio siamo in grado di prevedere che l’energia di eccitazione di queste vibrazioni collettive deve variare col numero di massa come $A^{-1/2}$. Questo comportamento è verificato solo in media dai nuclei even-even, ed il modello a goccia fallisce chiaramente per numeri di massa $150 < A < 190$ e $A > 220$, che sono caratterizzati da energie di eccitazione molto più piccole e praticamente costanti nei due intervalli, cioè indipendenti da A . Vedremo nella prossima sezione che questi stati sono da interpretare come livelli rotazionali, piuttosto che vibrazionali.

2.4 Nuclei deformati e spettri rotazionali

Può succedere che la configurazione di equilibrio dei nucleoni in un nucleo non risulti in una superficie sferica, ma sia caratterizzata da parametri di deformazione $\alpha = \alpha_0$. Si parla in questo caso di nuclei deformati. Quando questo succede sarà possibile distinguere le situazioni in cui la superficie del nucleo ruota. Questi stati di rotazione sono chiamati rotazioni collettive, in cui il momento angolare non è dato dal momento angolare di eccitazioni di singola particella, ma del nucleo che ruota come un tutto. Questo tipo di rotazioni non è possibile attorno ad un asse di simmetria: in una descrizione quantomeccanica, lo stato ruotato attorno ad un asse di simmetria differisce dal corrispondente non ruotato solo per una fase, ed è quindi lo stesso stato a tutti gli effetti, con uguali numeri quantici. Nella maggior parte dei nuclei è lo stato di quadrupolo ($\lambda = 2$) che gioca il ruolo più importante e ci concentreremo su questo caso. Se la deformazione “di equilibrio” è caratterizzata dai coefficienti $\alpha_{\lambda\mu}$ con $\lambda = 2$, ci sono a priori 5 possibili deformazioni fondamentali. Tuttavia solo 2 di questi coefficienti rappresentano forme intrinsecamente diverse, gli altri 3 descrivono l’orientazione del nucleo rispetto al riferimento del laboratorio. Tali orientazioni sono caratterizzate da 3 angoli di Eulero, denotati collettivamente da Ω , la cui dipendenza dal tempo descriverà appunto le rotazioni che vogliamo studiare. Se abbiamo chiamato $\alpha_{\lambda\mu}$ i parametri di deformazione nel sistema di coordinate del laboratorio,

chiamiamo $a_{\lambda\mu}$ i corrispondenti parametri in un sistema di coordinate ruotato rispetto al laboratorio, che ci converrà prendere solidale al nucleo stesso,

$$a_{\lambda\mu} = \sum_{\mu'} d_{\mu'\mu}^{\lambda}(\Omega) \alpha_{\lambda\mu'}. \quad (2.59)$$

Più precisamente consideriamo un sistema di coordinate cartesiane con gli assi disposti lungo gli assi principali di inerzia del nucleo. Questi sono definiti dalla condizione che gli $a_{\lambda\mu}$ siano diversi da zero solo per $\mu = 0, \pm 2$, sono cioè presenti solo a_{20} e $a_{22} = a_{2,-2}$. Esprimendo le armoniche sferiche in coordinate cartesiane, questo significa che la forma quadratica in x, y e z , che descrive la superficie del nucleo non contiene termini misti xy, xz, yz .

I due parametri di deformazione intrinseci sono tradizionalmente espressi in termini di due quantità β e γ ,

$$a_{20} = \beta \cos \gamma, \quad a_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma, \quad (2.60)$$

anche se purtroppo questa notazione può creare confusione con gli angoli di Eulero, che descrivono l'orientazione del nucleo come un tutto. Dal momento che l'armonica sferica Y_{20} non dipende dall'angolo ϕ , il caso $a_{22} = 0$ ($\gamma = 0$) descrive configurazioni della superficie con simmetria assiale (rispetto al sistema di coordinate solidale al nucleo), che sono quindi caratterizzate dal solo parametro β . In questo caso la superficie è a forma di ellissoide di rotazione, in cui 2 assi principali di inerzia sono uguali, ed è descritta da

$$R(\theta, \phi) = R_{\alpha} \left[1 + \beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \right]. \quad (2.61)$$

Se $\beta > 0$ il nucleo ha una forma allungata (tipo pallone da rugby) e si chiama “ellissoide prolato”, mentre se $\beta < 0$ il nucleo ha una forma appiattita (tipo disco) e si chiama “ellissoide oblato”. Nel caso con $\gamma \neq 0$ le sezioni dell'ellisse sono a loro volta ellittiche. È chiaro che la divisione tra parametri di deformazione intrinseca e angoli di Eulero della rotazione del nucleo come un tutto non è univoca, ma vi saranno delle simmetrie discrete che metteranno in relazione le diverse scelte possibili. Con questa nuova scelta per i cinque gradi di libertà delle deformazioni di quadrupolo, dobbiamo adesso trasformare l'espressione dell'energia cinetica e potenziale. Per quanto riguarda l'energia potenziale la trasformazione è abbastanza semplice: il termine proporzionale a C_2 è uno scalare, invariante per rotazioni, e quindi non

dipende dagli angoli di Eulero Ω ; avrà esattamente la stessa forma nel sistema di coordinate del laboratorio e nel sistema di coordinate ruotato (proprio per definizione di scalare), bisogna solamente sostituire $a_{\lambda\mu}$ al posto di $\alpha_{\lambda\mu}$. In termini dei parametri di Hill-Wheeler, β e γ il contributo di quadrupolo all'energia potenziale diventa,

$$V = \frac{1}{2}C_2 \sum_{\mu} |a_{2\mu}|^2 = \frac{1}{2}C_2\beta^2. \quad (2.62)$$

Il discorso è più complicato per l'energia cinetica: le derivate temporali delle coordinate $\alpha_{\lambda\mu}$ faranno intervenire le derivate temporali delle matrici $D_{\mu'\mu}^{\lambda}$, che a loro volta faranno intervenire le derivate temporali degli angoli di rotazione di Eulero, a partire dalle quali è possibile introdurre le velocità angolari attorno agli assi principali di inerzia. La trattazione quantomeccanica è piuttosto complicata e quindi illustriamo solo il risultato finale: innanzitutto, grazie alla particolare scelta del sistema di coordinate solidale al nucleo (caratterizzato da $a_{21} = a_{2,-1} = 0$), si ha che

$$T = \frac{1}{2}B_2 \left[\sum_{\mu\nu\sigma} (-1)^{\mu} \dot{D}_{\mu\nu}^{2*} \dot{D}_{-\mu\sigma}^{2*} a_{2\nu} a_{2\sigma} + \sum_{\nu} (-1)^{\nu} \dot{a}_{2\nu} \dot{a}_{2,-\nu} \right], \quad (2.63)$$

senza la presenza di termini “incrociati”. Il primo termine, che possiamo chiamare energia cinetica rotazionale, T_{rot} , può essere espresso in termini delle velocità angolari attorno agli assi principali di inerzia,

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \omega_k^2 \mathcal{I}_k(a_{20}, a_{22}), \quad (2.64)$$

con le quantità \mathcal{I}_k , che possiamo chiamare momenti di inerzia rispetto agli assi principali, date da

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(a_{20}, a_{22}) &= B_2(3a_{20}^2 + 2\sqrt{6}a_{20}a_{22} + 2a_{22}^2) = 4B_2\beta^2 \sin^2 \left(\gamma - \frac{2}{3}\pi \right) \\ \mathcal{I}_2(a_{20}, a_{22}) &= B_2(3a_{20}^2 - 2\sqrt{6}a_{20}a_{22} + 2a_{22}^2) = 4B_2\beta^2 \sin^2 \left(\gamma - \frac{4}{3}\pi \right) \\ \mathcal{I}_3(a_{22}) &= 8B_2a_{22}^2 = 4B_2\beta^2 \sin^2 \gamma \end{aligned} \quad (2.65)$$

che possono essere riassunte in un'unica formula,

$$\mathcal{I}_k = 4B_2\beta^2 \sin^2 \left(\gamma - k\frac{2}{3}\pi \right), \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.66)$$

Dal punto di vista classico, per deformazioni fisse β e γ , T_{rot} è l'energia cinetica di un corpo rigido con momenti di inerzia \mathcal{I}_k , mentre nel caso generale in cui β e γ sono anch'esse variabili dinamiche, i gradi di libertà rotazionali e vibrazionali sono accoppiati. Tuttavia notiamo che i momenti di inerzia \mathcal{I}_k sono molto diversi dalle corrispondenti quantità per un corpo rigido, ed i valori sperimentali si collocano tra i due estremi. In particolare vediamo che per deformazioni nulle $\beta = \gamma = 0$, gli \mathcal{I}_k si annullano, mostrando che le rotazioni sono fisicamente irrilevanti in caso di simmetria sferica. La quantizzazione del sistema nelle coordinate “ruotate” (che sono delle coordinate curvilinee, nel senso che la forma quadratica dell'energia cinetica dipende dalle coordinate stesse), porta al risultato che l'energia cinetica rotazionale può essere scritta come

$$T_{\text{rot}} = \frac{\hat{I}_1^2}{2\mathcal{I}_1} + \frac{\hat{I}_2^2}{2\mathcal{I}_2} + \frac{\hat{I}_3^2}{2\mathcal{I}_3}, \quad (2.67)$$

dove I_k rappresentano le componenti del momento angolare lungo gli assi principali di inerzia, e sono da considerarsi operatori differenziali negli angoli di Eulero Ω . Questa energia cinetica rotazionale è diagonalizzata da autovettori simultanei di \hat{I}^2 , \hat{I}_z e \hat{I}_3 , che sono dati da.

$$|IMK\rangle = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}} D_{MK}^{I*}(\Omega), \quad (2.68)$$

in cui $I(I+1)$ è l'autovalore di \hat{I}^2 , M è l'autovalore di \hat{I}_z e K è l'autovalore di \hat{I}_3 , la componente del momento angolare lungo l'asse principale 3. Nel limite in cui rotazioni e vibrazioni sono disaccoppiate (espandendo all'ordine più basso nei coefficienti di deformazione), all'energia cinetica rotazionale va aggiunta l'energia cinetica di vibrazione e l'energia potenziale, sviluppata al secondo ordine negli spostamenti dalle deformazioni di equilibrio. Allo spettro rotazionale vanno aggiunti i contributi armonici delle vibrazioni in β e in γ ,

$$h_\beta = \hbar\omega_\beta \left(n_\beta + \frac{1}{2} \right), \quad h_\gamma = \hbar\omega_\gamma \left(n_\gamma + \frac{1}{2} \right), \quad (2.69)$$

con delle frequenze proprie, nel caso di nuclei deformati, a priori sconosciute che dipendono dalla dinamica che ha prodotto le deformazioni di equilibrio. Nel caso in cui vi sia un asse di simmetria, $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}$ e $\mathcal{I}_3 = 0$, l'energia cinetica rotazionale diventa,

$$T_{\text{rot}} = \frac{\hat{I}^2 - \hat{I}_3^2}{2\mathcal{I}}. \quad (2.70)$$

Si distinguono due casi: le cosiddette bande $K = 0$ e $K \neq 0$. Nel caso $K = 0$ lo spettro è

$$E_{n_\beta n_\gamma}(I) = E_{n_\beta n_\gamma}(0) + \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} I(I+1), \quad (2.71)$$

che rappresenta bande di livelli con spaziamento che cresce linearmente con I . Le bande cominciano in

$$E_{n_\beta n_\gamma}(0) = \hbar\omega_\beta \left(n_\beta + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_\gamma \left(n_\gamma + \frac{1}{2} \right). \quad (2.72)$$

Vi è la restrizione, ricavata da considerazioni di simmetria delle funzioni d'onda sotto certe trasformazioni discrete, che I debba essere pari. Nel caso $K \neq 0$, il termine $\hat{I}_3^2/2\mathcal{I}_3$ accoppia le vibrazioni in γ con le rotazioni, e lo spettro risulta ,

$$E_{K,n_\beta,n_\gamma}(I) = E_{K,n_\beta,n_\gamma}(0) + \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} [I(I+1) - K^2], \quad (2.73)$$

con le bande che cominciano in

$$E_{K,n_\beta,n_\gamma}(0) = \hbar\omega_\beta \left(n_\beta + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_\gamma \left(n_\gamma + \frac{1}{2} + \frac{|K|}{4} \right). \quad (2.74)$$

Quindi, mentre i nuclei sferici hanno uno spettro armonico, nei nuclei deformati osserviamo diverse bande rotazionali che cominciano dagli stati di eccitazione vibrazionali.

Capitolo 3

Shell model

3.1 Il potenziale medio del nucleo

Nello shell model si modella il nucleo come composto da nucleoni che si muovono singolarmente sotto l'azione di un potenziale creato dagli altri nucleoni. La motivazione per un tale approccio viene sostanzialmente dalla presenza di certe regolarità nelle caratteristiche dei nuclei come funzione del numero di neutroni e del numero di protoni: si individuano delle discontinuità di queste caratteristiche in corrispondenza di certi “numeri magici”, che risultano essere

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, \dots \quad (3.1)$$

Un esempio di questo comportamento si ha anche nell'andamento delle masse nucleari in funzione di N , come illustrato nella Fig. 3.1, dove sono riportate le differenze tra le masse nucleari e quelle calcolate in base al liquid drop model. È una situazione analoga a quella incontrata dai chimici, che ordinarono i diversi elementi nella tavola di Mendeleev in base a certe regolarità osservate. La teoria atomica spiega queste regolarità come dovute alla presenza di diversi “gusci” elettronici, degeneri in energia, le configurazioni in cui tali gusci sono completamente riempiti essendo particolarmente stabili. Naturalmente, se l'idea di particelle indipendenti, che si muovono su orbite imperturbate, è facile da intuire nel caso degli elettroni di un atomo, per i quali l'interazione dominante è l'attrazione coulombiana del nucleo, lo stesso non si può dire nel caso dei nucleoni nel nucleo, che si muovono in un potenziale medio creato da loro stessi. Il fatto è che, come già osservato a proposito

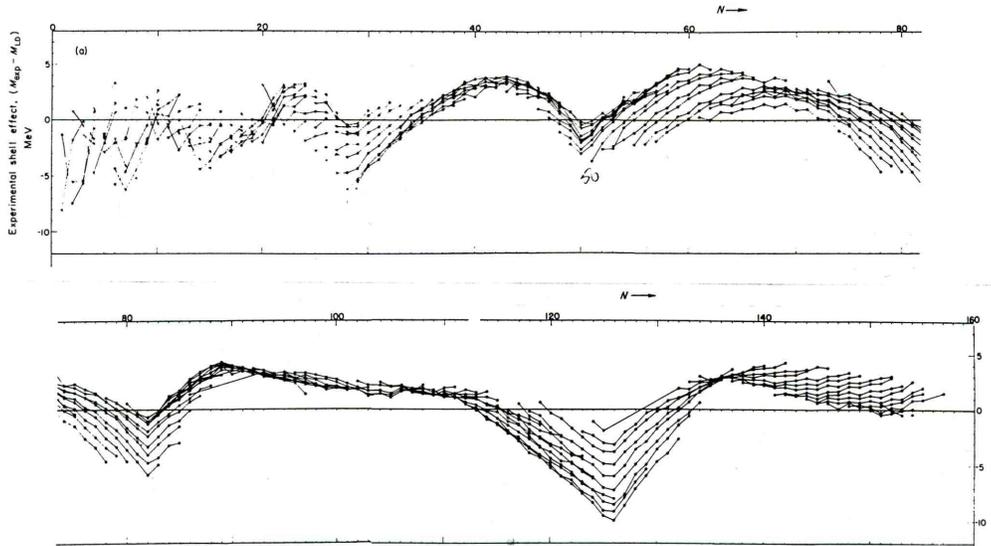


Figura 3.1: Masse nucleari in funzione di N , riferite alle predizioni del liquid drop model. Sono evidenti delle nette discontinuità nell'andamento di queste curve in corrispondenza dei numeri magici 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. (Da Ref. [8]).

del modello a goccia, gli eventi di collisione tra nucleoni sono abbastanza rari, per via del principio di Pauli, che impedisce ai nucleoni di essere troppo vicini tra loro: il cammino libero medio dei nucleoni nel nucleo è dell'ordine delle dimensioni nucleari, rendendo il loro comportamento simile ad un gas di Fermi non interagente. L'argomento più convincente per la validità dei modelli a particella singola viene in ogni caso dall'evidenza sperimentale, e dall'insorgere dei numeri magici. Le principali osservazioni che conducono all'esistenza dei numeri magici sono

- discontinuità negli andamenti dell'energia di legame nucleare in funzione di N e Z in corrispondenza dei numeri magici;
- picchi nell'abbondanza relativa di isotopi e isotone in corrispondenza dei numeri magici;

- aumento dell'energia del primo stato eccitato nucleare in vicinanza dei numeri magici;
- diminuzione pronunciata della sezione d'urto di cattura di neutrone in vicinanza dei numeri magici;
- momenti di quadrupolo elettrico nucleare molto piccoli in vicinanza dei numeri magici (come vedremo meglio in seguito).

Una volta accettata l'idea di moto indipendente dei singoli nucleoni in un potenziale medio, si fa generalmente l'ipotesi che tale potenziale sia centrale e se ne postula la forma in modo da riprodurre le caratteristiche spettroscopiche dei nuclei. In realtà si potrebbe anche porre il problema più complesso di determinare, supposta nota l'interazione nucleone-nucleone, un potenziale autoconsistente di Hartree-Fock, trattando i nucleoni come completamente indipendenti. Noi ci limiteremo tuttavia a postulare l'esistenza di un tale potenziale medio, cercando di indovinarne le proprietà. Un nucleone all'interno del nucleo risente della forza nucleare uniformemente in tutte le direzioni, col risultato che la forza risultante sarà nulla. Quindi all'interno del nucleo il potenziale medio sarà all'incirca piatto. In vicinanza della superficie nucleare la forza nucleare di richiamo cresce, quindi il potenziale aumenta vicino alla superficie, e ridiventa piatto (uguale a zero) all'esterno del nucleo, per il fatto che la forza nucleare è a corto raggio. Una forma analitica che soddisfa queste proprietà e che genera densità nucleari ragionevoli è la funzione di Fermi, o potenziale di Woods-Saxon,

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}, \quad (3.2)$$

con parametri

$$R_0 = r_0 A^{1/3}, \quad V_0 \sim 50 \text{ MeV}, \quad a \sim 0.5 \text{ fm}, \quad r_0 \sim 1.2 \text{ fm}. \quad (3.3)$$

Il problema di questo potenziale è che le sue autofunzioni non possono essere date in forma analitica, e quindi si ricorre spesso a due approssimazioni: *i*) potenziale di oscillatore armonico isotropo e *ii*) buca di potenziale centrale infinita. Entrambe queste forme (come anche il potenziale di Woods-Saxon), hanno simmetria sferica, e possono quindi descrivere nuclei sferici. Limitiamoci per il momento a questo caso. Una caratteristica da notare è che le due approssimazioni sopra descritte rappresentano dei potenziali infiniti.

Bisogna quindi aspettarsi l'insorgenza di stati spurii, non presenti nello spettro, perché corrisponderebbero, nel potenziale di Woods-Saxon, a stati del continuo, che non è possibile ovviamente descrivere con l'approssimazione di oscillatore armonico o di buca infinita.

3.2 Oscillatore armonico isotropo

In questa approssimazione il potenziale nucleare è dato da,

$$V(r) = -V_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} m \omega_0^2 (r^2 - R_0^2). \quad (3.4)$$

In coordinate cartesiane, tralasciando un irrilevante termine costante, l'Hamiltoniana si separa in tre parti indipendenti, che si riferiscono alle componenti x , y e z ,

$$H = H^x + H^y + H^z = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 y^2 + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 z^2, \quad (3.5)$$

ed è diagonalizzata nella rappresentazione dei numeri di occupazione $|n_x, n_y, n_z\rangle$, essendo $n_i \geq 0$ ($i = x, y, z$) gli autovalori dell'operatore numero \hat{N}_i ,

$$H = \hbar \omega_0 \left(\hat{N}_x + \hat{N}_y + \hat{N}_z + \frac{3}{2} \right), \quad (3.6)$$

con

$$\hat{N}_i = a_i^\dagger a_i, \quad a_i = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} r_i + i \sqrt{\frac{1}{2\hbar m \omega_0}} p_i, \quad i = x, y, z. \quad (3.7)$$

Lo spettro dell'Hamiltoniana è armonico, cioè con livelli equispaziati,

$$E(N) = \hbar \omega_0 \left(N + \frac{3}{2} \right), \quad N = n_x + n_y + n_z. \quad (3.8)$$

È facile calcolare la degenerazione $D(N)$, dei livelli di energia in questa base, che risulta essere

$$D(N) = \frac{1}{2} (N + 1)(N + 2). \quad (3.9)$$

In questa base però il momento angolare non è diagonale, mentre sappiamo, per il fatto che il potenziale è centrale, che il momento angolare commuta con l'Hamiltoniana, e deve quindi essere possibile diagonalizzare simultaneamente

con H anche \mathbf{L}^2 e L_z . Per ottenere lo spettro in termini degli autovalori (N, l, m) invece che (n_x, n_y, n_z) , definiamo innanzitutto delle combinazioni degli operatori di creazione e distruzione a_i ,

$$A_1 = \frac{a_x + ia_y}{\sqrt{2}}, \quad A_0 = a_z, \quad A_{-1} = \frac{a_x - ia_y}{\sqrt{2}}, \quad (3.10)$$

che soddisfano le stesse relazioni di commutazione degli operatori a_i e in termini dei quali l'Hamiltoniana diventa,

$$H = \hbar\omega_0 \sum_{m=-1}^1 \left(\hat{N}_m + \frac{1}{2} \right), \quad \hat{N}_m = A_m^\dagger A_m, \quad (3.11)$$

che è quindi diagonalizzata in una nuova rappresentazione di numeri di occupazione $|n_1, n_0, n_{-1}\rangle$,

$$E(N) = \hbar\omega_0 \left(N + \frac{3}{2} \right), \quad N = n_1 + n_0 + n_{-1}, n_m \geq 0. \quad (3.12)$$

Quello che abbiamo guadagnato è che in questa base almeno la componente z del momento angolare è diagonale, perché

$$L_z = \hbar \left(\hat{N}_{-1} - \hat{N}_1 \right), \quad (3.13)$$

e quindi il numero quantico magnetico m lo possiamo esprimere in termini dei nuovi numeri di occupazione n_m ,

$$m = n_{-1} - n_1. \quad (3.14)$$

Per ogni autovalore N , il numero quantico magnetico deve quindi essere,

$$-N \leq m \leq N. \quad (3.15)$$

Fissato N vediamo, per ogni valore di m permesso, quanti sono gli stati possibili. Chiamiamo c_m il numero di stati indipendenti (nella rappresentazione $|n_1, n_0, n_{-1}\rangle$) con quel determinato m . Possiamo costruire la seguente tabella, fissato N : Poiché ogni stato caratterizzato da m appartiene ad un multipletto caratterizzato da l , con $-l \leq m \leq l$, è chiaro, dall'esame della tabella, che i due stati con $m = N$ ed $m = N - 1$ appartengono ad uno stesso multipletto con $l = N$, cui apparterranno anche uno degli stati in ognuna delle classi successive, con $m = N - 2, N - 3, \dots$. A partire da $m = N - 2$

m	c_m	$ n_{-1}, n_0, n_1\rangle$
N	1	$ N, 0, 0\rangle$
$N - 1$	1	$ N - 1, 1, 0\rangle$
$N - 2$	2	$ N - 2, 2, 0\rangle$ $ N - 1, 0, 1\rangle$
$N - 3$	2	$ N - 3, 3, 0\rangle$ $ N - 2, 1, 1\rangle$
$N - 4$	3	$ N - 4, 4, 0\rangle$ $ N - 3, 2, 1\rangle$ $ N - 2, 0, 2\rangle$
$N - 5$	3	...

partirà un altro multipletto con $l = N - 2$, eccetera. Arriviamo quindi alla conclusione che è possibile caratterizzare gli autostati della Hamiltoniana con 3 numeri quantici

$$|N, l, m\rangle, \quad l = N, N - 2, \dots, \geq 0, \quad -l \leq m \leq l. \quad (3.16)$$

I livelli di energia, in notazione spettroscopica sono riassunti nella tabella dove abbiamo anche indicato nell'ultima colonna i numeri magici che si ot-

N	$D(N)$	stati	numeri magici
0	1	1s	2
1	3	1p	8
2	6	2s, 1d	20
3	10	2p, 1f	40
4	15	3s, 2d, 1g	70

tengono, cioè il numero di protoni o neutroni che riempiono in successione tutti i livelli di energia fino all'ultimo dato. Come si vede il modello a oscillatore armonico isotropo riproduce bene i primi 3 numeri magici, ma fallisce a partire dal quarto in poi, cosa comunque incoraggiante, data la semplicità del modello. Si può anche mettere in relazione la frequenza ω_0 , che dà lo spacing tra i livelli, con il raggio quadratico medio nucleare, sfruttando il teorema del viriale,

$$\sum_{i=1}^A E_i = m\omega_0^2 \sum_{i=1}^A \langle i | \mathbf{r}^2 | i \rangle = m\omega_0^2 \langle r^2 \rangle, \quad (3.17)$$

dove abbiamo indicato con $\langle r^2 \rangle$ il raggio quadratico medio nucleare,

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A \langle i | \mathbf{r}^2 | i \rangle. \quad (3.18)$$

Per una distribuzione sferica uniforme di nucleoni, di raggio R , questo raggio quadratico medio è

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R^2 = \frac{\int \rho r^2 dV}{\int \rho dV}. \quad (3.19)$$

Resta da determinare il primo membro dell'Eq. (3.17). Innanzitutto il numero di nucleoni A è dato da

$$A = 2 \sum_{k=0}^N (k+1)(k+2) \sim \frac{2}{3} N^3, \quad (3.20)$$

dove abbiamo tenuto conto dell'esistenza di due stati di spin e di isospin per ogni livello energetico, e per semplicità considerato N come grande. La somma delle energie degli A nucleoni è

$$\sum_{i=1}^A E_i = \hbar\omega_0 \sum_{k=1}^N 2(k+1)(k+2) \left(k + \frac{3}{2}\right) \sim \hbar\omega_0 \frac{N^4}{2} \sim \frac{\hbar\omega_0}{2} \left(\frac{3}{2}A\right)^{4/3}, \quad (3.21)$$

che, combinata con l'Eq. (3.17) dà,

$$\hbar\omega_0 \sim \frac{5}{6} \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} \frac{\hbar^2}{mr_0^2} A^{-1/3} \sim 41 A^{-1/3} \text{ MeV.}, \quad (3.22)$$

dove abbiamo usato $R = r_0 A^{1/3} = 1.2 A^{1/3} \text{ fm}$.

3.3 Buca di potenziale sferica infinita

I livelli energetici dell'oscillatore armonico hanno una degenerazione accidentale, che è rimossa nella buca di potenziale sferica infinita. Questa è caratterizzata da un potenziale centrale,

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r \leq R_0 \\ \infty & r > 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Le autofunzioni dell'Hamiltoniana si separano in coordinate polari sferiche,

$$\psi(r, \theta, \phi) = u^\ell(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (3.24)$$

e la parte radiale della funzione d'onda soddisfa un'equazione di Schroedinger unidimensionale,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (ru^\ell) - \frac{1}{r^2} \ell(\ell+1)u^\ell \right] = Eu^\ell. \quad (3.25)$$

In termini della coordinata ρ ,

$$\rho = kr, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad (3.26)$$

l'equazione diventa

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} u^\ell + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} u^\ell + \left[1 - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right] u^\ell = 0, \quad (3.27)$$

che ha per soluzione le funzioni di Bessel sferiche (scegliamo quelle regolari all'origine), $j_\ell(\rho)$,

$$j_\ell(\rho) = -\rho^\ell \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^\ell \left(\frac{\sin \rho}{\rho} \right). \quad (3.28)$$

Gli autovalori dell'energia sono determinati dalla condizione al contorno $u^\ell(R_0) = 0$, cioè

$$j_\ell(\rho)|_{r=R_0} = 0 \longrightarrow E_\ell = \frac{\hbar^2}{2mR_0} \rho^*, \quad (3.29)$$

dove con ρ^* abbiamo indicato gli zeri delle funzioni di Bessel. Riportiamo nella tabella i primi zeri delle $j_\ell(\rho)$.

$\ell = 0(s)$	$\ell = 1(p)$	$\ell = 2(d)$	$\ell = 3(f)$	$\ell = 4(g)$	$\ell = 5(h)$	$\ell = 6(i)$
3.142	4.493	5.763	6.988	8.183	9.356	10.513
6.283	7.725	9.095	10.417	11.705		
9.425	10.904					

L'ordine dei livelli è quindi, $1s(2)$, $1p(8)$, $1d(18)$, $2s(20)$, $1f(34)$, $2p(40)$, $1g(58)$, $2d(68)$, $1h(90)$, ..., dove abbiamo indicato tra parentesi le predizioni per i numeri magici. Come si vede, anche in questa approssimazione sono correttamente individuati 3 numeri magici. Rispetto al caso dell'oscillatore armonico isotropo viene risolta la degenerazione accidentale su ℓ . I veri

livelli di energia si trovano sempre a metà strada tra questi due casi, in accordo con l'aspettativa che un potenziale realistico, tipo Woods-Saxon, abbia caratteristiche che interpolano tra i due semplici esempi discussi qui. D'altra parte, nessuno dei due modelli riesce a spiegare correttamente i più alti numeri magici. L'ingrediente che manca a questo scopo è un termine di interazione spin-orbita.

3.4 Accoppiamento spin-orbita

Consideriamo adesso il potenziale dell'oscillatore armonico isotropo, cui aggiungiamo un termine V_{SO} ,

$$V_{SO} = \alpha_{SO} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}. \quad (3.30)$$

Con l'aggiunta di questo termine all'Hamiltoniana di particella singola, le proiezioni L_z e S_z lungo l'asse quantizzato non sono più buoni numeri quantici, in quanto i corrispondenti operatori non commutano con l'Hamiltoniana. Restano invece buoni numeri quantici i moduli dei momenti angolari orbitali e di spin, ℓ ed $s = 1/2$. Invece l'operatore momento angolare totale \mathbf{J} ,

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}, \quad (3.31)$$

commuta con l'Hamiltoniana, e quindi possiamo scegliere come numeri quantici il modulo del momento angolare totale j e la sua proiezione j_z sull'asse z . Ricapitolando, gli autostati dell'Hamiltoniana, in presenza dell'interazione spin-orbita, possono essere caratterizzati da 5 numeri quantici, $|nsljj_z\rangle$, con $s = 1/2$ nel nostro caso. I valori possibili di j , dati dalla somma di un momento angolare orbitale di modulo ℓ e di un momento angolare di spin $s = 1/2$, sono

$$\begin{aligned} j &= \ell \pm 1/2 & \ell > 0 \\ j &= 1/2 & \ell = 0, \end{aligned} \quad (3.32)$$

e gli stati sono indicati, in rappresentazione spettroscopica, con $n\ell_j$. Vediamo il risultato dell'azione dell'operatore $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ sui nuovi autostati $|nsljj_z\rangle$:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} |nsljj_z\rangle &= \frac{1}{2} [\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2] |nsljj_z\rangle \\ &= \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right] |nsljj_z\rangle = \begin{cases} -\ell - 1 & [j = \ell + 1/2] \\ 0 & [\ell = 0] \\ \ell & [j = \ell - 1/2] \end{cases} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Se si sceglie la costante α_{SO} negativa, avremo che gli stati con $j = \ell + 1/2$ saranno energeticamente favoriti, cioè la loro energia diminuisce, per effetto del termine aggiuntivo V_{SO} , rispetto al caso di oscillatore armonico isotropo, mentre quelli con $j = \ell - 1/2$ saranno sfavoriti. Per effetto quindi dell'interazione spin-orbita i livelli energetici si riorganizzeranno nello spettro. Vediamo qualitativamente come, riferendoci anche alla Fig. 3.2. Il primo livello di energia dell'oscillatore armonico, con $N = 0$, era un $1s$, e adesso lo indichiamo con $1s_{1/2}$, con energia invariata. Quindi il primo numero magico 2 è mantenuto. Il secondo livello di energia $N = 1$, era costituito da un tripletto degenero $1p$ fatto in realtà di 6 stati diversi, due valori di s_z per ogni $m = -1, 0, 1$. Adesso si splitta in un doppietto, $2p_{1/2}$ e in un quadrupletto, $2p_{3/2}$, con quest'ultimo avente energia minore rispetto allo stato imperturbato, mentre il $2p_{1/2}$ avrà energia maggiore. Ovviamente il conto del numero degli stati è uguale. Se lo splitting è piccolo [lo splitting dovuto all'interazione spin-orbita è più grande per i grandi valori del momento angolare orbitale, cfr. Eq. (3.33)], questi 6 stati restano vicini in energia, in modo da mantenere che 8 sia il secondo numero magico. Per il terzo livello di energia la situazione è analoga: i vari stati si mescolano e diventano (in ordine di energia crescente) $1d_{5/2}$, $2s_{1/2}$ e $1d_{3/2}$, restando vicini in energia tali da poterli considerare come appartenenti ad uno stesso guscio, fatto da 12 stati, in modo che il terzo numero magico sia 20, in accordo con l'esperienza. Le prime differenze rispetto al caso di oscillatore armonico puro, le vogliamo a partire dal quarto livello, con $N = 3$. Originariamente era costituito dagli stati $1f$ e $2p$, degeneri in energia. L'interazione spin-orbita rimuove la degenerazione, e gli stati si ricombinano per diventare $1f_{7/2}$, $2p_{3/2}$, $2p_{1/2}$ e $1f_{5/2}$. In particolare il primo multipletto avrà un'energia sensibilmente inferiore a quella originaria poiché, come abbiamo visto, lo splitting di spin-orbita è maggiore per i grandi momenti angolari orbitali. L'ottupletto $1f_{7/2}$ andrà quindi a costituire il quarto guscio, corrispondente ad un numero magico 28. Il numero di stati dei restanti multipletti è 12, ai quali però bisogna aggiungere, per un ragionamento analogo, il livello $1g_{9/2}$, originariamente appartenente al livello $N = 4$, ma che sarà tra tutti i sottolivelli $N = 4$ quello con splitting maggiore in energia verso il basso. Si tratta di 10 stati, che aggiunti ai 12 dei sottolivelli $N = 3$ fanno 22 stati, che costituiscono quindi il quinto guscio, corrispondente al numero magico 50. Analogamente, ai restanti stati del livello originario $N = 4$, che sono 20, si aggiungono gli stati del sottolivello $1h_{11/2}$ di $N = 5$, con splitting maggiore verso il basso. In totale quindi 32 stati costituiscono il quinto guscio, corrispondente al numero magico 82, in accordo con l'osservazione sperimentale.

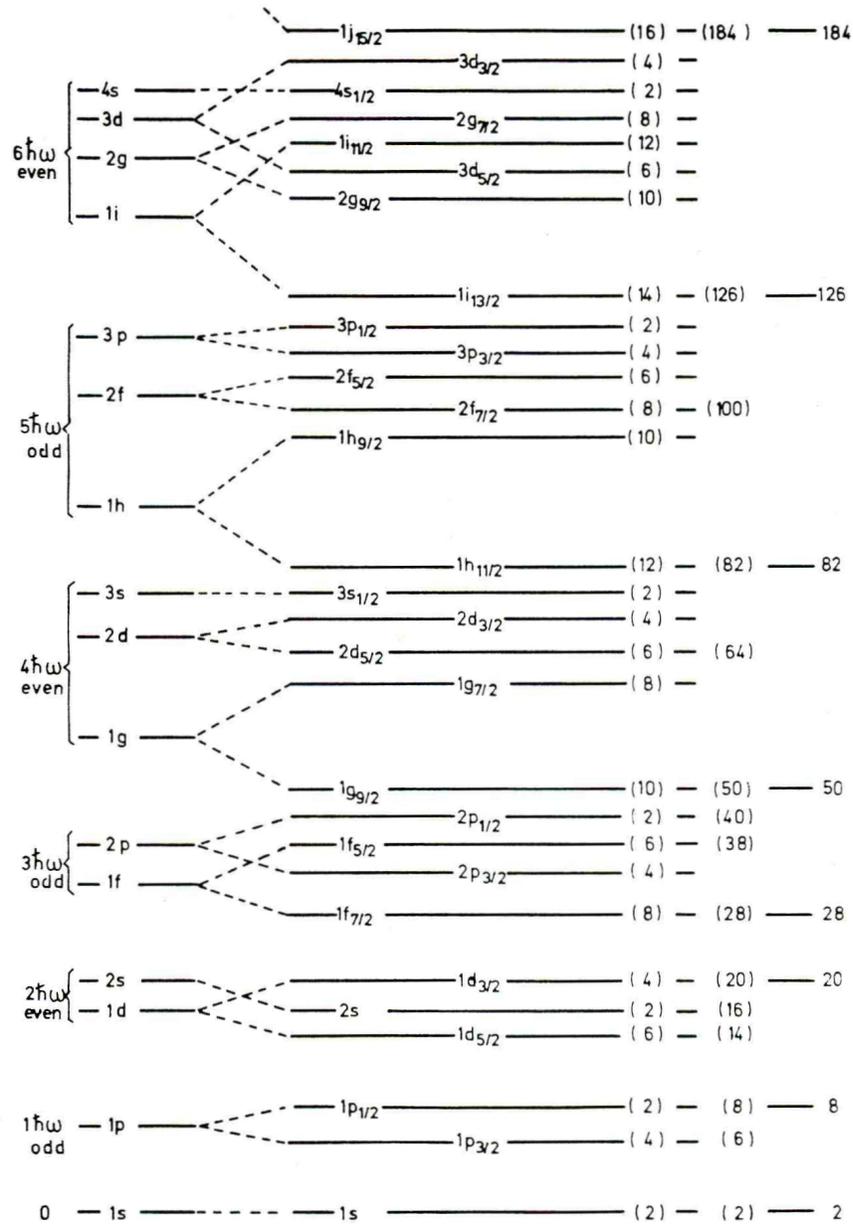


Figura 3.2: Livelli di energia dello shell model. I livelli dell'oscillatore armonico sono splittati (la degenerazione è rimossa) nella buca sferica infinita, e questi livelli sono ricombinati dall'accoppiamento spin-orbita per riprodurre i numeri magici. (Da Ref. [1]).

È chiaro che sarà necessario scegliere il valore del parametro α_{SO} in modo da ottenere quantitativamente il raggruppamento dei livelli voluto, come descritto sopra. In generale bisognerà anche includere una dipendenza da ℓ di α_{SO} , o equivalentemente considerarlo invece una funzione della coordinata radiale,

$$V_{\text{SO}} = f(r)\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}, \quad (3.34)$$

e scegliere la funzione $f(r)$ in modo da riprodurre lo spettro voluto. Risultata che la funzione $f(r)$ deve essere diversa da zero in corrispondenza della superficie nucleare. La si sceglie generalmente della forma

$$f(r) = \lambda \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}, \quad \lambda \sim -0.5 \text{ fm}^2. \quad (3.35)$$

3.5 L'approccio dello shell model al problema a molti corpi

Il punto di partenza dello shell model è la sostanziale semplificazione del problema nucleare a molti corpi. Anche assumendo nota l'interazione tra i nucleoni, il problema a molti corpi presenta difficoltà insormontabili. L'equazione di Schroedinger ha la forma,

$$H\Psi = \left[\sum_{i=1}^A -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \sum_{i<j}^A V(i,j) + \sum_{i<j<k}^A W(i,j,k) + \dots \right] \Psi = E\Psi, \quad (3.36)$$

dove Ψ è la funzione d'onda complessiva degli A nucleoni,

$$\Psi = \Psi(1, \dots, A), \quad (3.37)$$

ognuno descritto da 5 coordinate, 3 spaziali, 1 di spin e 1 di isospin

$$(i) = (\mathbf{r}_i, s_i, t_i). \quad (3.38)$$

Nello shell model questo problema viene ridotto alla replica di A problemi ad un corpo,

$$H_0\Psi = \left[\sum_{i=1}^A h_i \right] \Psi = \sum_{i=1}^A \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V_{\text{SM}}(i) \right] \Psi = E_0\Psi, \quad (3.39)$$

e l'interazione residua

$$V_R = \sum_{i < j}^A V(i, j) + \sum_{i < j < k}^A W(i, j, k) + \dots - \sum_{i=1}^A V_{\text{SM}}(i), \quad (3.40)$$

viene trattata come una piccola perturbazione. Poiché le h_i commutano tra loro, cioè i nucleoni sono indipendenti, la funzione d'onda complessiva sarà il prodotto di funzioni d'onda $\phi_k(i)$ di singola particella, tali cioè che

$$h_i \phi_k(i) = \epsilon_k \phi_k(i), \quad (3.41)$$

dove k indica complessivamente i numeri quantici che caratterizzano un dato livello energetico. Poiché i nucleoni obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac, la funzione d'onda complessiva deve essere antisimmetrica nelle coordinate dei singoli nucleoni, che sono indistinguibili. Essa quindi assume la forma di un determinante di Slater,

$$\Psi_{k_1, \dots, k_A}(1, \dots, A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \phi_{k_1}(1) & \dots & \phi_{k_1}(A) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{k_A}(1) & \dots & \phi_{k_A}(A) \end{vmatrix}, \quad (3.42)$$

con autovalori

$$E_{k_1, \dots, k_A} = \epsilon_{k_1} + \dots + \epsilon_{k_A}. \quad (3.43)$$

Da notare che in questo modo si descrive la dinamica del nucleo, con $3A$ coordinate spaziali, laddove invece 3 coordinate descrivono una banale traslazione del nucleo come un tutto. Bisogna quindi in generale aspettarsi la presenza di stati spurii, che non corrispondono a vere eccitazioni del nucleo.

I nucleoni riempiono così i livelli dello shell model che non sono occupati da altre particelle. L'introduzione del potenziale di spin-orbita ha rimosso la degenerazione di spin, resta a questo livello la degenerazione di isospin. In realtà protoni e neutroni risentono di un potenziale medio diverso, per almeno due ragioni: i protoni subiscono, contrariamente ai neutroni, la repulsione coulombiana, che viene generalmente tenuta in conto con l'introduzione del potenziale $V_C(r)$ di una sfera carica uniformemente,

$$V_C(r) = \begin{cases} \frac{Ze^2}{2R} \left[3 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] & r \leq R, \\ \frac{Ze^2}{r} & r > R. \end{cases} \quad (3.44)$$

In secondo luogo, come abbiamo già visto, la cosiddetta energia di simmetria favorisce configurazioni in cui il numero di protoni è uguale al numero di neutroni. A causa della repulsione coulombiana, nei nuclei pesanti ci sarà un numero superiore di neutroni rispetto al numero di protoni. Se sostituiamo un neutrone con un protone, paghiamo un conto in energia di Coulomb, ma guadagniamo in energia di simmetria. Quindi, se teniamo conto dell'energia di Coulomb come detto sopra, dobbiamo anche introdurre una differenza nel potenziale di singola particella tra protoni e neutroni, causata da questa energia di simmetria. Possiamo quindi dire che la parte nucleare del potenziale dei protoni è più profonda della corrispondente quantità per i neutroni. I due effetti non si compensano, e anzi sappiamo che come risultato la buca dei protoni sarà complessivamente meno profonda di quella dei neutroni almeno per i nuclei pesanti, perché di protoni ce n'è di meno. Infatti i livelli di Fermi per protoni e neutroni devono alla fine essere uguali, altrimenti protoni diventerebbero neutroni per decadimento β o viceversa. Nei nuclei pesanti la differenza che risulta dall'energia di Coulomb e dall'energia di simmetria è tale che il livello di Fermi appartiene a gusci diversi per neutroni e protoni.

Nello shell model le eccitazioni del sistema sono date dal trasferimento di uno o più nucleoni da livelli al di sotto del livello di Fermi a livelli al di sopra di esso. Il determinante di Slater forma un insieme completo di stati del sistema ad A nucleoni. Ogni stato è caratterizzato da una certa distribuzione dei nucleoni nei livelli di particella singola, cioè dai numeri di occupazione (che possono essere 0 o 1) per ogni stato. Si classificano generalmente gli stati eccitati prendendo lo stato fondamentale come riferimento. I nucleoni che mancano rispetto allo stato fondamentale si chiamano “lacune” (holes) quelli sopra il livello di Fermi si chiamano “particelle”. Nel caso di eccitazione di un solo nucleone si parla di stati $1p - 1h$ (“one particle - one hole”), con energia di eccitazione data da $\sim \hbar\omega_0$. Per esempio, per il ${}^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$, in cui il livello di Fermi coincide con il livello $1d_{3/2}$ un tale stato eccitato è dato dal passaggio di un nucleone dal livello $2s_{1/2}$ al livello $1f_{7/2}$, e si indica con

$$(2s_{1/2})^{-1}(1f_{7/2}), \quad (3.45)$$

con energia di eccitazione

$$\hbar\omega_0 \sim \frac{41}{3\sqrt{40}} \text{ MeV} \sim 12 \text{ MeV}. \quad (3.46)$$

A partire da un nucleo magico, con numero di massa A , aggiungendo un nucleone nel livello m si ottiene un nucleo con $A + 1$ nucleoni, la cui energia

di legame ci dà indicazioni sull'energia del livello m di particella singola, ϵ_m ,

$$\epsilon_m = E_m(A + 1) - E_0(A). \quad (3.47)$$

Ovviamente questo vale solo approssimativamente, a causa dell'interazione residua e del fatto che lo stesso potenziale medio dipende da A , in modo abbastanza sottile. Quindi non possiamo sperare che lo stesso potenziale di particella singola, preso una volta per tutte, fornisca un'accurata descrizione dei livelli di energia, persino se ci limitiamo a un insieme di pochi nuclei con A simile. In particolare, il modello a shell sferico è valido solo in vicinanza dei nuclei magici (con gusci completamente riempiti). Man mano che aggiungiamo particelle in gusci liberi questo potenziale sferico potrà essere modificato, e si parla di shell model deformato. Sappiamo già dalla nostra discussione sulle rotazioni collettive del nucleo che questa situazione di nuclei non sferici è realizzata in natura. Quando riempiamo un guscio vuoto con più di un nucleone, ci saranno delle degenerazioni in energia, dovute alle diverse disposizioni possibili dei nucleoni nei diversi livelli. Per esempio la configurazione con κ protoni nel livello $n\ell_j$ e λ neutroni nel livello $n'\ell'_j$, che si denota generalmente con

$$(\nu n \ell j)^\kappa (\pi n' \ell' j')^\lambda, \quad (3.48)$$

avrà una degenerazione data dai coefficienti binomiali,

$$\binom{2j+1}{\kappa} \binom{2j'+1}{\lambda}, \quad (3.49)$$

a causa della degenerazione di $2j+1$ valori possibili di j_z per ogni valore di j . Ovviamente questa degenerazione viene rimossa dall'interazione residua V_R .

Nello shell model sferico il momento angolare totale è \mathbf{J} ,

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^A \mathbf{j}_i, \quad (3.50)$$

ed è una quantità conservata. Una osservazione sperimentale senza eccezioni è che lo stato fondamentale dei nuclei con gusci completi è non degenero, e corrisponde quindi a $J = 0$. Quindi, nelle situazioni in cui si abbia solo un nucleone fuori dai gusci completi, lo stato fondamentale avrà momento angolare totale dato dal nucleone "di valenza". Lo stesso sarà vero se c'è

solo un nucleone mancante rispetto alla situazione di gusci completi (un hole). Solo poche eccezioni sperimentali si conoscono a questa regola. Se si aggiungono (o rimuovono) più di un nucleone ai gusci completi, bisogna accoppiare i momenti angolari dei nucleoni “di valenza”. Ad esempio, nel caso di due nucleoni nello stesso livello j , con numeri quantici magnetici m_1 ed m_2 , avremo autostati del momento angolare totale $|JM\rangle$, dati da,

$$\begin{aligned}
|JM\rangle &= \sum_{m_1, m_2} \langle jm_1; jm_2 | JM \rangle |jm_1; jm_2\rangle \\
&= \sum_{m_1, m_2} (-1)^{2j-J} \langle jm_2; jm_1 | JM \rangle |jm_1; jm_2\rangle \\
&= - \sum_{m_1, m_2} (-1)^{2j-J} \langle jm_1; jm_2 | JM \rangle |jm_1; jm_2\rangle \\
&= (-1)^{2j-J+1} |JM\rangle,
\end{aligned} \tag{3.51}$$

dove abbiamo sfruttato nel secondo passaggio le proprietà dei coefficienti di Clebsch-Gordan e nel terzo passaggio le proprietà di antisimmetria dello stato per scambio di particelle. Quindi, dal momento che $2j + 1$ è sempre pari, deduciamo che il momento angolare totale in questi nuclei deve essere pari. Non è possibile stabilire quale sia lo stato fondamentale. La regola osservata sperimentalmente è che in questi nuclei pari-pari, lo stato fondamentale ha $J = 0$. Il modello in cui ogni coppia di nucleoni si combina per formare un momento angolare totale zero si chiama modello estremo a particella singola, perché i numeri quantici del nucleo sono determinati solo dal nucleone “spaiato”. Questo schema di accoppiamento delle coppie di nucleoni viene talvolta indicato col nome di “seniority coupling scheme”.

Possiamo anche definire un operatore di isospin totale del nucleo

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^A \mathbf{t}^{(i)}, \tag{3.52}$$

la cui terza componente è una misura dell'eccesso di protoni nel nucleo,

$$T_z \Psi(1, \dots, A) = \frac{Z - N}{2} \Psi(1, \dots, A). \tag{3.53}$$

In genere lo stato legato corrisponde a $T = |Z - N|/2$. Per esempio nelle tre isobare

$${}^{10}_4\text{Be}_6, \quad {}^{10}_5\text{B}_5, \quad {}^{10}_6\text{C}_4, \tag{3.54}$$

l'isospin totale può essere 1, nel qual caso dovrebbe presentarsi uno stato alla stessa energia in tutti e tre i nuclei, o 0, possibile solamente nel Boro. Si osservano in effetti sperimentalmente nei tre nuclei degli stati 0^+ e 2^+ alla stessa energia, mentre altri stati sono presenti solo nel caso del Boro, attribuiti a stati di isospin 0.

Chiudiamo il capitolo con un accenno all'evidenza sperimentale per i livelli di particella singola nei nuclei. Infatti, a parte la spiegazione dei numeri magici, ci sono come abbiamo visto ben precise predizioni dello shell model per quanto riguarda lo spettro dei livelli. Un modo per mettere in luce queste proprietà è lo studio di reazioni di "stripping" (d, p), in cui un deutone interagendo con un nucleo, gli trasferisce un neutrone, o di "pick-up" (p, d), o anche reazioni ($p, 2p$) o ($e, e'p$). Ad esempio, in un processo ($p, 2p$) l'energia E del protone incidente è così alta che esso interagisce solo una volta con un altro protone del nucleo, ed entrambi lasciano il nucleo senza altre interazioni, con energia E' ed E'' . Se il protone urtato era in uno stato di particella singola si può dedurre la sua energia di legame E_B dal bilancio energetico,

$$E_B = E - E' - E''. \quad (3.55)$$

La predizione dello shell model è che questo processo può avvenire solo per ben determinati valori discreti di E_B . In realtà queste "risonanze" hanno una certa larghezza, per via dell'interazione residua. Un'analisi della sezione d'urto della reazione

$${}^{16}\text{O}(p, 2p){}^{15}\text{N}, \quad (3.56)$$

in funzione della variabile E_B mostra in effetti dei picchi in corrispondenza degli stati $1p_{1/2}$ e $1p_{3/2}$, ed una struttura più larga, a più alta energia, identificata con lo stato $1s_{1/2}$. Dal confronto di questi dati con i calcoli teorici è possibile estrarre utili informazioni sull'interazione residua e sulla forma del potenziale centrale e di spin-orbita dello shell-model.

Capitolo 4

Momenti di multipolo e transizioni elettromagnetiche

4.1 Momenti di multipolo statici

Essendo le interazioni elettromagnetiche quelle più familiari e meglio conosciute, possiamo imparare molto sulla struttura nucleare dallo studio del comportamento dei nuclei in campi elettromagnetici esterni. Il campo elettromagnetico esterno è caratterizzato (a meno della trasformazione di gauge, ma si sceglierà ovunque nel seguito la scelta di gauge di Coulomb, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$), dal quadripotenziale (Φ, \mathbf{A}) e dai corrispondenti campi elettrico $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ e magnetico $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. L'Hamiltoniana del nucleo nel campo esterno è

$$H = H_{\text{nucl}} + H_{\text{em}} + H_{\text{int}}. \quad (4.1)$$

H_{nucl} è l'Hamiltoniana nucleare, o quantomeno una sua versione approssimata, o un modello, come lo shell model, che ha per autostati gli stati del nucleo,

$$H_{\text{nucl}}\Psi_i(1, \dots, A) = E_i\Psi(1, \dots, A), \quad (4.2)$$

che supponiamo noti. H_{em} è l'Hamiltoniana che descrive la dinamica del campo elettromagnetico, è quadratica nei campi \mathbf{E} e \mathbf{B} e può essere ignorata ai nostri scopi, in quanto il campo elettromagnetico esterno è supposto statico. Il pezzo interessante è l'Hamiltoniana di interazione tra nucleo e campo esterno,

$$H_{\text{int}} = \int \left[\rho(\mathbf{r}, t)\Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right] dV. \quad (4.3)$$

Le variabili dinamiche del sistema nucleare sono contenute nell'espressione della densità di carica elettrica ρ ,

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^A e \left(\frac{1}{2} + t_3^{(i)} \right) \delta^3 [\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)], \quad (4.4)$$

dove abbiamo considerato i nucleoni come puntiformi, e nella densità di corrente \mathbf{j} ,

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^O + \mathbf{j}^S, \quad (4.5)$$

che contiene una parte orbitale \mathbf{j}^O , costituita dal moto dei nucleoni, e una parte di spin \mathbf{j}^S , che viene anche chiamata corrente di magnetizzazione, e descrive l'interazione degli spin dei nucleoni con il campo magnetico. È conveniente riscrivere \mathbf{j} in termini di un campo μ di densità di momento magnetico (che avrà a sua volta una componente orbitale e di spin),

$$\frac{1}{c} \mathbf{j} = \nabla \times \mu = \nabla \times (\mu^O + \mu^S). \quad (4.6)$$

Mentre per la parte di spin questa riscrittura è data direttamente dalla conoscenza dell'interazione degli spin col campo magnetico \mathbf{B} ,

$$\mu^S(\mathbf{r}, t) = \sum_{i,1}^A \frac{e\hbar}{2mc} \left[\left(\frac{1}{2} + t_3^{(i)} \right) g_p + \left(\frac{1}{2} - t_3^{(i)} \right) g_n \right] \mathbf{S}_i \delta^3 [\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)], \quad (4.7)$$

per la parte orbitale è una riscrittura permessa per il fatto che in situazioni statiche ρ è costante, e quindi $\nabla \cdot \mathbf{j}^O = 0$. Se per la componente di spin conosciamo l'espressione di μ^S in termini delle variabili dinamiche del sistema, per la componente orbitale è il contrario, cioè conosciamo l'espressione di \mathbf{j}^O in termini delle variabili dinamiche del sistema,

$$\mathbf{j}^O(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^A e \left(\frac{1}{2} + t_3^{(i)} \right) \mathbf{v}_i \delta^3 [\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)], \quad (4.8)$$

considerando i nucleoni come cariche puntiformi (cioè senza struttura), e ignorando l'effetto della corrente data dallo scambio di pioni. I valori dei fattori g di Landè nell'Eq. (4.7) sono dati da

$$g_p = 5.586, \quad g_n = -3.826, \quad (4.9)$$

volendo usare i valori corrispondenti a protoni e neutroni liberi. A volte si tiene conto delle correzioni dovute alla corrente di scambio di pioni usando

dei valori modificati per g_p e g_n . Avendo espresso la corrente \mathbf{j} in termini di μ , l'Hamiltoniana di interazione con il campo elettromagnetico statico diventa, integrando per parti,

$$H_{\text{int}} = \int [\rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) - \mu(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})] dV. \quad (4.10)$$

Poiché le sorgenti che creano il campo elettromagnetico esterno sono fuori dal nucleo, i campi soddisfano le equazioni di Maxwell omogenee:

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi(\mathbf{r}) &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

quindi \mathbf{B} può essere espresso come il gradiente di un campo scalare armonico, cioè che soddisfa l'equazione di Laplace,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\nabla\Theta(\mathbf{r}), \quad \nabla^2\Theta(\mathbf{r}) = 0. \quad (4.12)$$

La soluzione più generale per i campi, espressa in coordinate sferiche è,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi), \quad (4.13)$$

$$\Theta(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu} r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi), \quad (4.14)$$

avendo escluso, per ogni valore di λ , la soluzione $r^{-\lambda-1}$ che è singolare nell'origine, cioè dove è il nucleo, e dove quindi non ci sono sorgenti per i campi esterni. L'Hamiltoniana di interazione assume quindi la forma

$$H_{\text{int}} = \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \hat{Q}_{\lambda\mu} + b_{\lambda\mu} \hat{M}_{\lambda\mu}, \quad (4.15)$$

dove gli operatori di multipolo rispettivamente elettrici e magnetici sono dati da

$$\hat{Q}_{\lambda\mu} = \int \rho(\mathbf{r}) r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) dV, \quad (4.16)$$

$$\hat{M}_{\lambda\mu} = \int \mu(\mathbf{r}) \cdot \nabla [r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)] d^3\mathbf{r}. \quad (4.17)$$

Per ottenere l'espressione dei momenti di multipolo magnetici in termini delle variabili dinamiche del nucleo, bisogna esprimere ancora μ^O in termini di \mathbf{j}^O . Per far questo sfruttiamo la relazione

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{r}) [r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)] = (\lambda + 1) \nabla [r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)], \quad (4.18)$$

che si dimostra osservando che $\nabla \cdot \mathbf{r} = 2 + (\partial/\partial r)r$, nel senso operatoriale, e integriamo per parti l'Eq. (4.17), ottenendo per la componente orbitale,

$$\begin{aligned}\hat{M}_{\lambda\mu}^O &= \frac{1}{\lambda+1} \int [\mathbf{r} \times (\nabla \times \mu^O)] \cdot \nabla [r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)] d^3\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{\lambda+1} \int (\mathbf{r} \times \mathbf{j}^O) \cdot \nabla [r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)] d^3\mathbf{r}.\end{aligned}\quad (4.19)$$

Adesso usiamo l'Eq. (4.4) per la densità di carica, l'Eq. (4.8) per la densità di corrente orbitale, e l'Eq. (4.7) per la densità di momento magnetico di spin, ottenendo alla fine

$$\hat{Q}_{\lambda\mu} = e \sum_{i=1}^A \left(\frac{1}{2} + t_3^{(i)} \right) r_i^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta_i, \phi_i) \quad (4.20)$$

$$\hat{M}_{\lambda\mu} = \frac{e\hbar}{2mc} \sum_{i=1}^A \left[g_s^{(i)} \mathbf{s}_i + \frac{2}{\lambda+1} g_l^{(i)} \mathbf{l}_i \right] \cdot [\nabla r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}, \quad (4.21)$$

con $g_s^{(i)} = g_p(g_n)$ e $g_l^{(i)} = 1(0)$ per i protoni (neutroni). I valori di aspettazione di questi operatori in uno stato nucleare si chiamano momenti di multipolo elettrici e magnetici di questo stato,

$$Q_{\lambda\mu} = \langle \Psi | \hat{Q}_{\lambda\mu} | \Psi \rangle, \quad (4.22)$$

$$M_{\lambda\mu} = \langle \Psi | \hat{M}_{\lambda\mu} | \Psi \rangle. \quad (4.23)$$

Dal momento che le interazioni forti commutano con la parità, gli stati del nucleo hanno parità definita. D'altra parte gli operatori di multipolo $\hat{Q}_{\lambda\mu}$ e $\hat{M}_{\lambda\mu}$ hanno parità $(-1)^\lambda$ e $(-1)^{\lambda+1}$ rispettivamente, quindi $Q_{\lambda\mu} = 0$ per λ dispari e $M_{\lambda\mu} = 0$ per λ pari: possiamo avere momenti di multipolo elettrico (la carica totale), di quadrupolo elettrico, e così via, e momenti di dipolo magnetico, ottupolo magnetico, e così via. Dal teorema di Wigner-Eckart, possiamo scrivere i momenti di multipolo elettrici e magnetici in funzione degli elementi di matrice ridotti, che non dipendono dal numero quantico M ,

$$Q_{\lambda\mu} = \langle JM | \hat{Q}_{\lambda\mu} | JM \rangle = \frac{\langle JM; \lambda\mu | J\lambda; JM \rangle}{2J+1} \langle J || \hat{Q}_{\lambda\mu} || J \rangle, \quad (4.24)$$

$$M_{\lambda\mu} = \langle JM | \hat{M}_{\lambda\mu} | JM \rangle = \frac{\langle JM; \lambda\mu | J\lambda; JM \rangle}{2J+1} \langle J || \hat{M}_{\lambda\mu} || J \rangle. \quad (4.25)$$

Se si conosce il valore dei momenti di multipolo elettrici e magnetici per un valore di M tutti gli altri possono essere calcolati a partire dal teorema di

Wigner-Eckart. È chiaro dalle proprietà dei coefficienti di Clebsch-Gordan che i momenti di multipolo così definiti sono non nulli solo per $\mu = 0$ e per $0 \leq \lambda \leq 2J$. Convenzionalmente si prende come valore di riferimento quello corrispondente allo stato con proiezione del momento angolare massima, $M = J$. Si introducono per comodità anche dei coefficienti di normalizzazione. Ad esempio, il momento di dipolo magnetico si definisce nel modo seguente,

$$\mu = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \langle JJ | \hat{M}_{10} | JJ \rangle, \quad (4.26)$$

mentre per il momento di quadrupolo elettrico,

$$Q = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle JJ | \hat{Q}_{20} | JJ \rangle. \quad (4.27)$$

Questi coefficienti numerici sono introdotti per semplificare la normalizzazione delle armoniche sferiche. Consideriamo infatti ad esempio i momenti di dipolo magnetico: abbiamo che, nel caso $\lambda = 1$, $\mu = 0$,

$$\nabla(r^\lambda Y_{\lambda\mu}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \hat{\mathbf{z}}, \quad (4.28)$$

cosicché alla fine

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc} \langle JJ | g_s s_z + g_l l_z | JJ \rangle. \quad (4.29)$$

ovviamente il momento di dipolo magnetico totale del nucleo è dato dalla somma dei contributi di tutti i nucleoni. Ma assumendo lo schema del seniority coupling, in cui le coppie di nucleoni identici (è necessario che siano due nucleoni identici, cioè due protoni o due neutroni, in modo che i rispettivi g_s e g_l siano uguali) formano stati di momento angolare zero, il solo contributo è quello del nucleone “spaiato”, come è facile vedere. Analogamente per il momento di quadrupolo elettrico. Dal teorema della proiezione, che non è altro che il teorema di Wigner-Eckart applicato agli operatori vettoriali \mathbf{A} ,

$$\langle JM | \mathbf{A} | JM' \rangle = \langle JM | \mathbf{J} | JM' \rangle \frac{\langle JJ | \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} | JJ \rangle}{J(J+1)}, \quad (4.30)$$

otteniamo, per il momento di dipolo magnetico,

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{e\hbar}{2mc} \frac{1}{J+1} \langle JJ | g_s \mathbf{s} \cdot \mathbf{J} + g_l \mathbf{l} \cdot \mathbf{J} | JJ \rangle \\ &= \frac{e\hbar}{2mc} \frac{2}{J+1} \left\{ g_s \left[J(J+1) + \frac{3}{4} - l(l+1) \right] + g_l \left[J(J+1) + l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Ricordiamoci che $J = l \pm 1/2$, e quindi abbiamo nei due casi,

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc} \begin{cases} g_l \left(J - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} g_s, & J = l + \frac{1}{2} \\ \frac{J}{J+1} \left[g_l \left(J + \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2} g_s \right] & J = l - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.32)$$

Queste funzioni, al variare di J prendono il nome di linee di Schmidt. Nel caso dei protoni la linea corrispondente a $J = l + 1/2$ è una retta e sta sopra quella corrispondente a $J = l - 1/2$, che parte negativa con andamento $\sim J^2$ e diventa asintoticamente una retta parallela alla linea superiore. Si osserva sperimentalmente che quasi tutti i nuclei con Z dispari ed N pari hanno momenti di dipolo magnetici compresi tra queste due linee. Questa situazione è illustrata nella Fig. 4.1. Nel caso dei neutroni la linea corrispon-

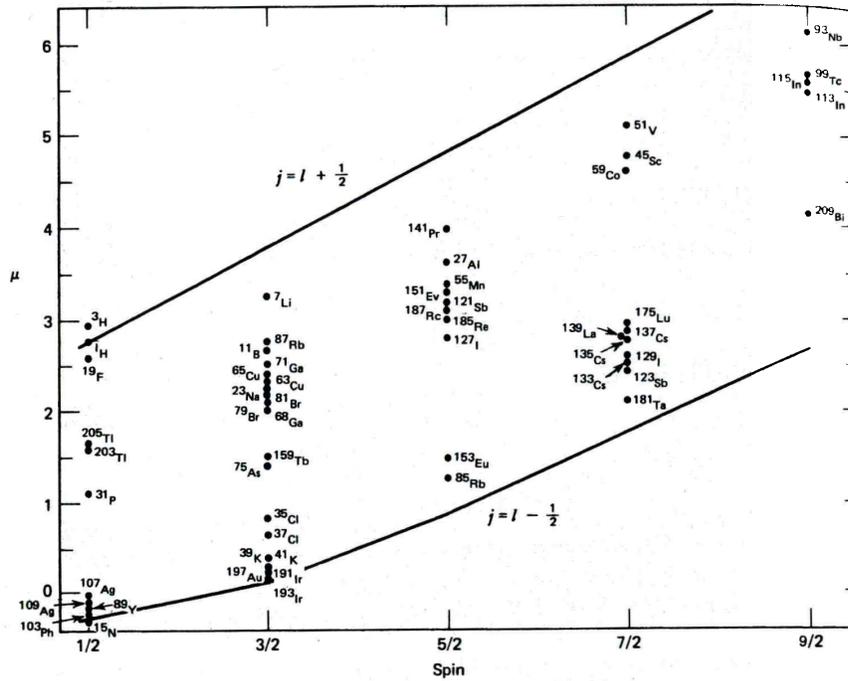


Figura 4.1: Momenti magnetici in magnetoni di Bohr di nuclei con Z dispari e N pari., in funzione del momento angolare totale J . La linea superiore si riferisce al caso $J = l + 1/2$, cioè a momento angolare orbitale e di spin allineati. Quella inferiore al caso $J = l - 1/2$, cioè momento angolare orbitale e di spin anti allineati. (Da Ref. [1]).

dente a $J = l + 1/2$ è una retta orizzontale, sempre negativa, mentre la linea corrispondente a $J = l - 1/2$ è sempre positiva. Anche in questo caso, si osserva sperimentalmente che i nuclei con N dispari e Z pari hanno momenti di dipolo magnetici compresi tra queste due linee (cfr. Fig. 4.2). I nuclei

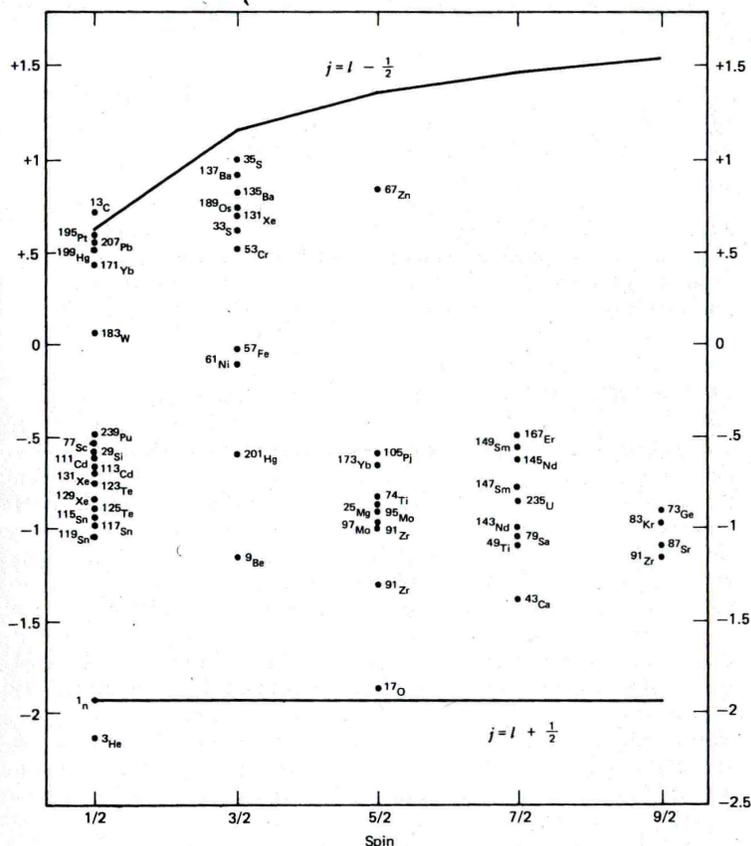


Figura 4.2: Momenti magnetici in magnetoni di Bohr di nuclei con N dispari e Z pari., in funzione del momento angolare totale J . La linea inferiore (orizzontale) si riferisce al caso $J = l + 1/2$, cioè a momento angolare orbitale e di spin allineati. Quella superiore al caso $J = l - 1/2$, cioè momento angolare orbitale e di spin antiallineati. (Da Ref. [1]).

che più si avvicinano alle linee di Schmidt sono quelli vicini a configurazioni magiche, come ^{15}N , ^{17}O , ^{39}K , ^{41}K , Ad esempio, l'Azoto ^{15}N ha 8 neutroni e 7 protoni. In base allo shell model, il protone "spaiato" si trova in uno stato $1p_{1/2}$, e difatti il valore del momento di dipolo magnetico del ^{15}N

è molto vicino alla linea di Schmidt inferiore (cfr. Fig. 4.1), con momento angolare orbitale e di spin antiallineati. Nel nucleo di Ossigeno ^{17}O invece, che ha 8 protoni e 9 neutroni, il nono neutrone si trova in uno stato $1d_{5/2}$ ($J = l + 1/2$) e difatti il suo momento di dipolo magnetico è molto vicino alla linea di Schmidt inferiore (cfr. Fig. 4.2), con momento angolare orbitale e di spin allineati. Deviazioni dalle linee di Schmidt sono attese per nuclei con gusci parzialmente riempiti, e nel caso dei nuclei deformati.

4.2 Espansione multipolare del campo di radiazione

Nel caso di radiazione elettromagnetica, in cui i campi dipendono dal tempo, in assenza di sorgenti le equazioni di Maxwell si scrivono,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (4.33)$$

La relazione tra campi e potenziali diventa,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.34)$$

Convienne adottare la scelta di gauge di Coulomb,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (4.35)$$

che implica, in assenza di sorgenti,

$$\Phi = 0. \quad (4.36)$$

Consideriamo i campi trasformati di Fourier rispetto al tempo, cioè assumiamo una dipendenza temporale oscillante $\sim \exp(-ikct)$ comune a tutti i campi. Le equazioni di Maxwell diventano,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} - ik\mathbf{B} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} + ik\mathbf{E} = 0. \end{cases} \quad (4.37)$$

Esprimendo \mathbf{E} in termini del rotore di \mathbf{B} o \mathbf{B} in termini del rotore di \mathbf{E} , si arriva a due forme alternative delle equazioni di Maxwell, ciascuna delle due equivalente alle equazioni di partenza,

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k^2) \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \mathbf{E} = \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{B}, \end{cases} \quad \begin{cases} (\nabla^2 + k^2) \mathbf{E} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \\ \mathbf{B} = -\frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{E}. \end{cases} \quad (4.38)$$

Quindi ciascuna delle componenti dei campi elettrico e magnetico soddisfa l'equazione di Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2) \varphi = 0, \quad (4.39)$$

che ha per soluzioni, come già visto per la buca di potenziale sferica,

$$\varphi = \sum_{k\ell m} c^{k\ell m} j_\ell(kr) Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (4.40)$$

Tuttavia non è facile a priori imporre il vincolo che la divergenza dei campi sia nulla. Convien quindi osservare che, se il campo \mathbf{E} ha divergenza nulla e soddisfa l'equazione di Helmholtz, allora anche lo scalare $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ soddisfa l'equazione di Helmholtz,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (\nabla^2 + k^2) \mathbf{E} = 0 \implies (\nabla^2 + k^2) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) = 0, \quad (4.41)$$

e lo stesso vale ovviamente per il campo \mathbf{B} . Possiamo quindi usare lo sviluppo multipolare (4.40) per gli scalari $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ e $\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$ e individuare due tipi di soluzioni, detti rispettivamente multipoli magnetici ed elettrici,

$$\begin{cases} \mathbf{r} \cdot \mathbf{B}^M = j_\ell(kr) Y_{\ell m}(\theta, \phi), \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}^M = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}^E = j_\ell(kr) Y_{\ell m}(\theta, \phi), \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{B}^E = 0. \end{cases} \quad (4.42)$$

Sostituendo ad esempio nella prima equazione l'espressione per \mathbf{B} in termini del rotore di \mathbf{E} si ottiene,

$$\begin{cases} \frac{1}{k} \mathbf{L} \cdot \mathbf{E}^M = j_\ell(kr) Y_{\ell m}(\theta, \phi), \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}^M = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{k} \mathbf{L} \cdot \mathbf{B}^E = j_\ell(kr) Y_{\ell m}(\theta, \phi), \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{B}^E = 0. \end{cases} \quad (4.43)$$

Abbiamo indicato con \mathbf{L} l'operatore $-i\mathbf{r} \times \nabla$. Questo operatore agisce solo sulle variabili angolari (θ, ϕ) , poiché la coordinata r commuta con \mathbf{L} . Quindi la parte radiale del campo \mathbf{E}^M è data dalle funzioni di Bessel sferiche. D'altra parte l'azione di \mathbf{L} sulle armoniche sferiche $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ è di rimescolare i vari

m , senza cambiare il numero quantico ℓ . È facile convincersi che la soluzione per \mathbf{E}^M è

$$\mathbf{E}^M \propto \mathbf{A}^M \propto j_\ell(kr) \mathbf{L}Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (4.44)$$

Analogo discorso vale per \mathbf{B}^E , quindi possiamo dire, sfruttando la relazione tra \mathbf{B} ed \mathbf{E} , che

$$\mathbf{E}^E \propto \mathbf{A}^E \propto \nabla \times [j_\ell(kr) \mathbf{L}Y_{\ell m}(\theta, \phi)]. \quad (4.45)$$

I potenziali vettori così definiti sono ortogonali, come è facile verificare esplicitamente, ma come è anche ovvio per il fatto che sono autofunzioni di un operatore hermitiano. Queste funzioni non sono però normalizzabili, perché si estendono su tutto lo spazio. Per rimediare a questa difficoltà formale si considera il sistema immerso all'interno di una sfera conduttrice cava, di raggio R molto grande. Le condizioni al contorno per i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} sulla sfera sono che

$$\mathbf{E}_\parallel = 0, \quad \mathbf{B}_\perp = 0, \quad (4.46)$$

che implicano, nel caso di radiazione di tipo magnetico ed elettrico, rispettivamente,

$$j_\ell(kR) = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial r} [r j_\ell(kr)] \right|_{r=R} = 0. \quad (4.47)$$

Queste due condizioni comportano una discretizzazione dell'autovalore k , $k \rightarrow k_n$. Concretamente, sfruttando la forma asintotica delle funzioni di Bessel sferiche,

$$j_\ell(x) \sim \frac{1}{x} \sin\left(x - \ell \frac{\pi}{2}\right), \quad (4.48)$$

si ha che

$$j_\ell(kR) = 0 \implies \frac{1}{kR} \sin\left(kR - \ell \frac{\pi}{2}\right) = 0 \implies k_n R = \ell \frac{\pi}{2} + n\pi. \quad (4.49)$$

Nel caso di radiazione di tipo elettrico il risultato è analogo. Da questa espressione è possibile calcolare la densità degli stati corrispondenti ad una energia $E = \hbar\omega = \hbar kc$; infatti

$$E_n = \hbar k_n c \sim \frac{\hbar c \pi}{R} n, \quad (4.50)$$

da cui segue che la densità degli stati $g(E)$ è

$$g(E) = \frac{R}{\hbar c \pi}. \quad (4.51)$$

È possibile adesso imporre condizioni di normalizzazione dei campi \mathbf{A}^M ed \mathbf{A}^E , limitando l'integrazione all'interno della sfera di raggio R . Definendo

$$\mathbf{A}_{k\ell m}^M = \sqrt{\frac{4\pi\hbar ck}{R}} \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} j_\ell(kr) \mathbf{L}Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{k\ell m}^E &= \frac{i}{k} \sqrt{\frac{4\pi\hbar ck}{R}} \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \nabla \times [j_\ell(kr) \mathbf{L}Y_{\ell m}(\theta, \phi)] \\ &= \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{A}_{k\ell m}^M, \end{aligned} \quad (4.53)$$

si hanno le condizioni di ortonormalità

$$\int dV (\mathbf{A}_{k\ell m}^I)^* \cdot \mathbf{A}_{k'\ell'm'}^{I'} = \frac{2\pi\hbar c}{k} \delta_{II'} \delta_{kk'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (4.54)$$

avendo introdotto un altro indice $I = M, E$. Finalmente, operando la trasformata di Fourier temporale inversa, il più generico potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ può essere espresso in termini delle funzioni di base sopra definite,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{Ik\ell m} [a_{Ik\ell m}^* \mathbf{A}_{k\ell m}^I(\mathbf{r}) e^{-ikct} + \text{c.c.}]. \quad (4.55)$$

L'Hamiltoniana del campo elettromagnetico,

$$H_{\text{em}} = \frac{1}{8\pi} \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), \quad (4.56)$$

assume quindi la forma

$$H_{\text{em}} = \sum_{Ik\ell m} \frac{1}{2} (\hbar ck) [a_{Ik\ell m}^* a_{Ik\ell m} + \text{c.c.}], \quad (4.57)$$

nella quale si riconosce la somma di infiniti oscillatori armonici disaccoppiati. La quantizzazione si realizza promuovendo i coefficienti $a_{Ik\ell m}$ ad operatori $\hat{a}_{Ik\ell m}$, che soddisfano le relazioni di commutazione canoniche,

$$[\hat{a}_{Ik\ell m}, \hat{a}_{I'k'\ell'm'}] = 0, \quad [\hat{a}_{Ik\ell m}, \hat{a}_{I'k'\ell'm'}^\dagger] = \delta_{II'} \delta_{kk'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}. \quad (4.58)$$

L'Hamiltoniana diventa così

$$H_{\text{em}} = \sum_{Ik\ell m} (\hbar ck) \left[\hat{a}_{Ik\ell m}^\dagger a_{Ik\ell m} + \frac{1}{2} \right], \quad (4.59)$$

mentre il campo elettromagnetico diventa un operatore,

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{Iklm} \left[\hat{a}_{Iklm}^\dagger \mathbf{A}_{klm}^I(\mathbf{r}) e^{-ikct} + \hat{a}_{Iklm} \mathbf{A}_{klm}^{I*}(\mathbf{r}) e^{ikct} \right]. \quad (4.60)$$

Le eccitazioni elementari di questa serie di oscillatori armonici si chiamano i fotoni, e gli stati stazionari della Hamiltoniana del campo elettromagnetico sono gli stati con numero definito di fotoni di ciascun tipo.

4.3 Transizioni multipolari

Abbiamo quindi caratterizzato gli stati stazionari dell'Hamiltoniana nucleare e dell'Hamiltoniana del campo elettromagnetico di radiazione separatamente. Resta ancora da considerare il termine di interazione, presente nell'Hamiltoniana totale (4.1). Questo termine, della forma,

$$H_{\text{int}} = -\frac{1}{c} \int dV \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}, \quad (4.61)$$

lo scriviamo in termini degli operatori di creazione e distruzione di fotoni,

$$H_{\text{int}} = -\frac{1}{c} \sum_{Iklm} \left[\hat{a}_{Iklm}^\dagger \int dV \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}_{klm}^I e^{-ikct} + \text{h.c.} \right]. \quad (4.62)$$

Gli operatori che si riferiscono ai gradi di libertà nucleari sono contenuti nell'espressione della densità di corrente \mathbf{j} (4.5). Poiché l'Hamiltoniana di interazione è lineare negli operatori di creazione e distruzione di fotoni, essa non commuta col numero di fotoni e provocherà transizioni tra stati che differiscono nel numero di fotoni (di ciascun tipo) di un'unità. La perturbazione H_{int} provocherà quindi transizioni da stati iniziali $|i\rangle$, autostati del sistema imperturbato (cioè in assenza di H_{int} , e che saranno quindi esprimibili come prodotti di uno stato nucleare con uno stato di fotoni, nella rappresentazione dei numeri di occupazione) a stati finali $|f\rangle$,

$$\begin{aligned} |i\rangle = |\Psi_i\rangle | \dots, n_\lambda, \dots \rangle &\longrightarrow |\Psi_f\rangle | \dots, n_\lambda - 1, \dots \rangle && \text{assorbimento} \\ &\longrightarrow |\Psi_f\rangle | \dots, n_\lambda + 1, \dots \rangle && \text{emissione} \end{aligned} \quad (4.63)$$

con processi di assorbimento o emissione di un fotone. La probabilità di transizione è data, al primo ordine della teoria delle perturbazioni, dalla regola d'oro di Fermi,

$$T_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H_{\text{int}} | i \rangle|^2 g(E_f), \quad (4.64)$$

dove $g(E)$ è la densità degli stati finali, data per i fotoni dall'Eq. (4.51). Poiché per stati normalizzati si ha che

$$\begin{aligned}\langle \dots, n_\lambda - 1, \dots | \hat{a}_\lambda | \dots, n_\lambda, \dots \rangle &= \sqrt{n_\lambda}, \\ \langle \dots, n_\lambda + 1, \dots | \hat{a}_\lambda^\dagger | \dots, n_\lambda, \dots \rangle &= \sqrt{n_\lambda + 1},\end{aligned}\quad (4.65)$$

la probabilità di assorbimento di un fotone di tipo λ è proporzionale al numero di questi fotoni, mentre è possibile un'emissione di fotoni anche se $n_\lambda = 0$ (emissione spontanea). Ci riferiremo nel seguito a quest'ultimo tipo di transizioni, che è anche equivalente all'assorbimento con $n_\lambda = 1$. Per questo tipo di transizioni il contributo dei fotoni all'elemento di matrice è 1. Resta da determinare il contributo nucleare all'ampiezza di transizione, che è dato esplicitamente, nei due casi di transizione di tipo magnetico o elettrico, da

$$\begin{aligned}T_{fi}(M, k\ell m) &= \frac{8\pi k}{\hbar} \left| \langle \Psi_f | \frac{1}{c} \int dV \mathbf{j} \cdot j_\ell(kr) \frac{\mathbf{L}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} Y_{\ell m}(\theta, \phi) | \Psi_i \rangle \right|^2, \\ T_{fi}(E, k\ell m) &= \frac{8\pi k}{\hbar} \left| \langle \Psi_f | \frac{1}{kc} \int dV \mathbf{j} \cdot \nabla \times \left[j_\ell(kr) \frac{\mathbf{L}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \right] | \Psi_i \rangle \right|^2.\end{aligned}\quad (4.66)$$

Queste espressioni si riscrivono convenzionalmente in termini di elementi di matrice degli operatori di multipolo $\mathcal{M}(I)$ ($I = E, M$), assorbendo convenientemente alcuni fattori

$$T_{fi}(I, k\ell m) = \frac{8\pi(\ell+1)}{\hbar\ell[(2\ell+1)!!]^2} \left(\frac{E}{\hbar c}\right)^{2\ell+1} |\langle \Psi_f | \mathcal{M}(I) | \Psi_i \rangle|^2, \quad (4.68)$$

la cui forma esplicita, nel caso di multipoli magnetici, è (introducendo un inessenziale fattore di fase)

$$\mathcal{M}(M, k\ell m) = \frac{-(2\ell+1)!!}{ck^\ell(\ell+1)} \int dV \mathbf{j} \cdot (\mathbf{r} \times \nabla) [j_\ell(kr) Y_{\ell m}(\theta, \phi)], \quad (4.69)$$

mentre, nel caso di multipoli elettrici, integrando per parti e usando l'equazione di continuità per la carica elettrica,

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho = ikc\rho, \quad (4.70)$$

risulta

$$\mathcal{M}(E, k\ell m) = \frac{(2\ell + 1)!!}{k^\ell(\ell + 1)} \int dV \left\{ \rho Y_{\ell m}(\theta, \phi) \frac{\partial}{\partial r} [r j_\ell(kr)] + i \frac{k}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{r} Y_{\ell m}(\theta, \phi) j_\ell(kr) \right\}. \quad (4.71)$$

Tutto questo abbiamo fatto in quanto in fisica nucleare siamo interessati al limite di bassa energia. Più precisamente, le lunghezze d'onda delle transizioni sono molto più grandi delle dimensioni nucleari,

$$kR_0 \ll 1 \implies E_\gamma = \hbar\omega \ll \frac{\hbar c}{R_0} \sim \frac{\hbar c}{r_0} A^{-1/3} = 197 \text{MeV} A^{-1/3}, \quad (4.72)$$

ed è quindi possibile utilizzare la forma asintotica per le funzioni di Bessel sferiche per piccoli valori degli argomenti,

$$j_\ell(kr) \sim \frac{(kr)^\ell}{(2\ell + 1)!!}, \quad (4.73)$$

ottenendo per l'operatore della transizione di multipolo magnetico,

$$\mathcal{M}(M, k\ell m) = \frac{1}{c(\ell + 1)} \int dV (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) \cdot \nabla [r^\ell Y_{\ell m}(\theta, \phi)], \quad (4.74)$$

che è esattamente l'operatore di multipolo magnetico statico già incontrato in Eq. (4.17), mentre per il multipolo elettrico,

$$\mathcal{M}(E, k\ell m) = \int dV \rho r^\ell Y_{\ell m} + \frac{ik}{\ell + 1} \int dV (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) \cdot \nabla [r^\ell Y_{\ell m}(\theta, \phi)]. \quad (4.75)$$

La prima parte non dipende da k e corrisponde al momento di multipolo elettrico statico (4.16), la seconda parte, del primo ordine in kR_0 , viene normalmente trascurata. Se non specificiamo la componente $M_{i,f}$ del momento angolare $J_{i,f}$ dello stato iniziale e degli stati finali, dobbiamo sommare su tutti gli M_f e mediare su tutti gli M_i (che sono in numero $2J_i + 1$). In più, nel caso più semplice in cui non vogliamo fare misure di polarizzazione, dobbiamo anche sommare su tutti i valori di m che caratterizzano i fotoni emessi. Dal teorema di Wigner-Eckart sappiamo che

$$\langle J_f M_f | \mathcal{M}_{\ell m} | J_i M_i \rangle = \frac{\langle J_i M_i; \ell m | J_f M_f \rangle}{\sqrt{2J_f + 1}} \langle J_f || \mathcal{M}_\ell || J_i \rangle, \quad (4.76)$$

dove l'elemento di matrice ridotto $\langle J_f || M_\ell || J_i \rangle$, definito da questa relazione, è indipendente dai numeri quantici magnetici. Sfruttando le relazioni di ortogonalità dei coefficienti di Clebsch-Gordan, arriviamo alla seguente espressione per la probabilità di transizione elettromagnetica,

$$T_{fi}(I, \ell) = \frac{8\pi(\ell + 1)}{\hbar\ell [(2\ell + 1)!!]^2} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c} \right)^{2\ell+1} B(I\ell, J_i \rightarrow J_f), \quad (4.77)$$

dove i coefficienti B sono chiamati probabilità di transizione ridotte, e sono dati in termini degli elementi di matrice ridotti,

$$B(E\ell, J_i \rightarrow J_f) = \frac{1}{2J_i + 1} \left| \langle J_f || \hat{Q}_\ell || J_i \rangle \right|^2 \Delta(J_i \ell J_f), \quad (4.78)$$

$$B(M\ell, J_i \rightarrow J_f) = \frac{1}{2J_i + 1} \left| \langle J_f || \hat{M}_\ell || J_i \rangle \right|^2 \Delta(J_i \ell J_f), \quad (4.79)$$

con \hat{Q} e \hat{M} gli operatori di multipolo elettrici e magnetici già definiti nel caso statico, e con

$$\Delta(j_1 j_2 j_3) = \begin{cases} 1 & \text{per } |j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.80)$$

cioè J_i , ℓ e J_f devono soddisfare la regola dell'addizione dei momenti angolari. Questa condizione fornisce le regole di selezione per la transizione sui momenti angolari. Dalle già discusse proprietà di trasformazione degli operatori delle transizioni multipolari sotto parità deduciamo ulteriori regole di selezione sulle parità $\pi_{i,f}$ degli stati iniziale e finale,

$$\begin{cases} \pi_i \pi_f = (-1)^\ell & \text{per transizioni } E\ell, \\ \pi_i \pi_f = (-1)^{\ell+1} & \text{per transizioni } M\ell. \end{cases} \quad (4.81)$$

Per esempio, una transizione $2^+ \rightarrow 0^+$ coinvolge il multipolo $E2$, mentre una $2^- \rightarrow 0^+$ coinvolge $M2$. Ovviamente per calcolare le probabilità di transizione è necessario conoscere le funzioni d'onda nucleari, e viceversa, misurando le probabilità di transizione abbiamo informazioni sulla struttura nucleare. Tuttavia possiamo già procedere con semplici stime di ordini di grandezza,

$$\langle f | \hat{Q}_{\ell m} | i \rangle \sim Z e R^\ell, \quad \langle f | \hat{M}_{\ell m} | i \rangle \sim A \left(\frac{e\hbar}{2mc} \right) R^{\ell-1}, \quad (4.82)$$

il cui rapporto è

$$\frac{\hbar c}{mc^2} \frac{1}{R} \sim \frac{197}{1000} \frac{1}{1.2} A^{-1/3}, \quad (4.83)$$

che varia da 0.2 a 0.03; considerato che la probabilità di transizione dipende dal quadrato delle ampiezze, deduciamo che le transizioni elettriche sono favorite rispetto a quelle magnetiche. Dall'Eq. (4.77) possiamo anche stimare il rapporto tra le probabilità di transizione per due multipoli consecutivi,

$$\frac{T_{fi}(I, \ell + 1)}{T_{fi}(I, \ell)} \sim \frac{(kR)^2}{(2\ell + 1)^2}, \quad (4.84)$$

e dal momento che $kR \ll 1$ vediamo che ogni transizione è molto soppressa rispetto a quella di multipolarità precedente. Questa è la base dell'utilità dell'espansione multipolare: solo i primi multipoli permessi dalle regole di selezione contribuiscono alla transizione. In realtà non è così immediato comparare transizioni elettriche e magnetiche della stessa multipolarità, poiché se l'una è permessa l'altra è vietata dalle regole di selezione per la parità. Il confronto può però essere fatto nel modo seguente. Dati uno stato iniziale e finale, se le transizioni $E\ell$ ed $M(\ell + 1)$ sono entrambe permesse dalle regole di selezione per il momento angolare e la parità, allora la transizione $E\ell$ domina di gran lunga. D'altra parte, se sono permesse le transizioni $M\ell$ ed $E(\ell + 1)$, allora può esservi una competizione tra i due diversi modi.

4.4 Transizioni di singola particella

Un'importante informazione sulla struttura di uno stato nucleare, per esempio il fatto che sia o meno uno stato collettivo, può essere ottenuta comparando le probabilità di transizione elettromagnetiche con le corrispondenti quantità calcolate per stati di particella singola. Questo si può giustificare per i nuclei dispari nell'ambito del seniority coupling scheme, in cui tutte le coppie di nucleoni identici hanno momento angolare zero, e il nucleone spaiato è quello che dà i numeri quantici al nucleo. Ovviamente i sottosistemi di spin zero non contribuiscono alle transizioni, i cui operatori non sono invarianti per rotazioni, e quindi possiamo interpretare la transizione come dovuta al singolo nucleone che cambia stato sotto l'azione di un operatore multipolare che coinvolge le sue variabili dinamiche e non quelle degli altri nucleoni. Più precisamente, vogliamo comparare i valori delle probabilità di transizione ridotte $B(I\lambda)$: infatti, le probabilità di transizione variano come

$E^{2\lambda+1}$, ed è difficile dire se una data probabilità di transizione sia grande o piccola. Le quantità $B(I\lambda)$ sono in questo senso più direttamente legate alla struttura nucleare. Quello che si fa in pratica è adottare le stime per le transizioni in approssimazione di particella singola come unità di misura per tutte le transizioni (unità di Weisskopf). Per esempio, nel caso delle transizioni $E\lambda$, si considera un protone (i neutroni, di carica elettrica nulla, hanno momenti di multipolo elettirici nulli, nell'approssimazione considerata), che passa da uno stato iniziale $|j_i m_i\rangle$ ad uno stato finale $|j_f m_f\rangle$. L'elemento di matrice dell'operatore $\hat{Q}_{\lambda\mu}$ tra gli stati nucleari $|J_i M_i\rangle$ e $|J_f M_f\rangle$ si riduce all'elemento di matrice di singola particella,

$$\langle J_f M_f | \sum_{k=1}^A q_k r_k^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta_k, \phi_k) | J_i M_i \rangle = \langle j_f m_f | e r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) | j_i m_i \rangle. \quad (4.85)$$

Nei casi che abbiamo esaminato finora, in cui il momento angolare orbitale ℓ è un buon numero quantico per gli stati di singola particella, una generica funzione d'onda può essere scomposta in un prodotto di tre fattori: una parte $u(r)$ radiale, una parte angolare $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ ed una parte di spin, rappresentata dallo spinore $\chi_{1/2}$. Queste ultime due funzioni mescolano le loro componenti secondo le regole della composizione dei momenti angolari, per formare uno stato di momento angolare totale definito, che possiamo indicare sinteticamente con la notazione

$$|jm\rangle = u_\ell(r) \left(Y_{\ell m}(\theta, \phi) \times \chi_{1/2} \right)_{jm}. \quad (4.86)$$

Per quanto riguarda la dipendenza radiale, l'elemento di matrice coinvolto è

$$\int dr r^2 r^\lambda u_f^*(r) u_i(r) \sim \frac{3R^\lambda}{\lambda + 3}, \quad (4.87)$$

avendo approssimato le funzioni d'onda radiali a costanti,

$$u_f(r) \sim u_i(r) \sim \sqrt{\frac{3}{R^3}}. \quad (4.88)$$

L'integrale sugli angoli può essere effettuato con i soliti teoremi di addizione delle armoniche sferiche. Per ottenere un semplice ordine di grandezza, ignoriamo la componente di spin, consideriamo transizioni da stati iniziali $\ell = \lambda$ a stati finali $\ell = 0$, e otteniamo il valore $1/\sqrt{4\pi}$. Questa semplice

stima costituisce il valore di riferimento di Weisskopf per le probabilità di transizione ridotte $E\lambda$,

$$B_W(E\lambda) = \frac{e^2}{4\pi} R^{2\lambda} \left(\frac{3}{\lambda+3} \right)^2, \quad (4.89)$$

che conduce, per le probabilità di transizione, a

$$T_W(E\lambda) = \frac{2(\lambda+1)}{\lambda[(2\lambda+1)!!]^2} \left(\frac{3}{\lambda+3} \right)^2 \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\omega R}{c} \right)^{2\lambda} \omega, \quad (4.90)$$

ovviamente espressa in s^{-1} . Nel caso di transizioni magnetiche si usano generalmente le stime di Moszkowski, che ha tenuto conto dei diversi valori dei numeri quantici magnetici nella media (4.79), ottenendo, per transizioni da $J = \lambda + 1/2$ a $J = 1/2$,

$$B_M(M\lambda) = \frac{e^2 \hbar^2}{4\pi m^2 c^2} R^{2\lambda-2} \left(\frac{3}{\lambda+2} \right)^2 \left[g_s \lambda - \frac{\lambda}{\lambda+1} \right]^2, \quad (4.91)$$

che conduce, per le probabilità di transizione, a

$$T_M(M\lambda) = \frac{2(\lambda+1)}{\lambda[(2\lambda+1)!!]^2} \left(\frac{3}{\lambda+2} \right)^2 \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{mcR} \right)^2 \left(g_s \lambda - \frac{g_l \lambda}{\lambda+1} \right)^2 \left(\frac{\omega R}{c} \right)^{2\lambda} \omega, \quad (4.92)$$

anche questa in s^{-1} . In tutte queste espressioni R è il raggio nucleare, che introduce la dipendenza dal numero di massa A , $R = r_0 A^{1/3}$, con $r_0 = 1.2$ fm. Per esprimere la probabilità di transizione per unità di tempo si utilizza in genere la larghezza Γ_γ , definita da $\Gamma_\gamma = \hbar T_{fi}$, che è misurata in unità di energia. Nella Tabella riportiamo i valori delle unità di Weisskopf per le transizioni di tipo elettrico e di Moszkowski per quelle di tipo magnetico, per le diverse multipolarità, con le energie espresse in MeV: È bene sottolineare

Multipolo λ	$T_W(E\lambda)(s^{-1})$	$E\lambda$ Γ_γ^W (MeV)		$T_M(M\lambda)(s^{-1})$	$M\lambda$ Γ_γ^M (MeV)	
1	$1.0 \cdot 10^{14}$	$6.8 \cdot 10^{-8}$	$A^{2/3} E_\gamma^3$	$1.5 \cdot 10^{14}$	$9.5 \cdot 10^{-8}$	E_γ^3
2	$7.4 \cdot 10^7$	$4.8 \cdot 10^{-14}$	$A^{4/3} E_\gamma^5$	$3.9 \cdot 10^8$	$2.5 \cdot 10^{-13}$	$A^{2/3} E_\gamma^5$
3	34	$2.2 \cdot 10^{-20}$	$A^2 E_\gamma^7$	390	$2.5 \cdot 10^{-19}$	$A^{4/3} E_\gamma^7$
4	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$7.1 \cdot 10^{-27}$	$A^{8/3} E_\gamma^9$	$2.1 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-25}$	$A^2 E_\gamma^9$
5	$2.4 \cdot 10^{-12}$	$1.6 \cdot 10^{-33}$	$A^{10/3} E_\gamma^{11}$	$7.2 \cdot 10^{-11}$	$4.7 \cdot 10^{-32}$	$A^{8/3} E_\gamma^{11}$

che queste sono solo delle stime usate per lo più per stabilire delle convenienti unità di misura: le larghezze delle transizioni, misurate in termini di queste unità, variano anche di ordini di grandezza da nucleo a nucleo, e a volte anche per un dato nucleo.

4.5 Transizioni elettromagnetiche dei modi vibrazionali

Un esempio di casi in cui le larghezze osservate sono molto più grandi delle stime di particella singola sono gli stati collettivi di vibrazione della goccia nucleare.

In questo caso, la $\rho(\mathbf{r})$ nell' Eq. (4.16) è costante per tutti gli $r < R(\theta, \phi)$. Al primo ordine nei coefficienti di deformazione, l'operatore di multipolo elettrico è dunque,

$$\hat{Q}_{\lambda\mu}^{\text{coll}} = \frac{3Ze}{4\pi} R_0^\lambda \hat{a}_{\lambda\mu} = \frac{3Ze}{4\pi} R_0^\lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2B_\lambda \omega_\lambda}} [p_{\lambda\mu} + (-1)^\lambda p_{\lambda,-\mu}^\dagger]. \quad (4.93)$$

Come si vede questo operatore di transizione è lineare negli operatori di creazione e distruzione dei fononi. Da questo fatto possiamo dedurre alcune considerazioni:

- Le transizioni dominanti sono quelle che avvengono da uno stato con n fononi ad uno con $n \pm 1$ fononi, ad esempio $2^+ \rightarrow 0^+$.
- Le transizioni dal secondo stato eccitato allo stato fondamentale sono soppresse, assenti in questa approssimazione lineare e al primo ordine della teoria delle perturbazioni.
- Il momento di multipolo elettrico in ogni stato è nullo, poiché questo operatore, sempre nell'approssimazione lineare, cambia il numero di fononi. Le proprietà elettromagnetiche (momenti di multipolo) possono essere testate dalle larghezze di decadimento degli stati eccitati.

La probabilità di transizione elettromagnetica è data anche in questo caso dall'Eq. (4.77). Calcoliamo in questa approssimazione le probabilità di transizione ridotta di tipo elettrico dal primo stato eccitato allo stato fondamentale,

$$\begin{aligned} B(E\lambda, n_\lambda = 1 \rightarrow n_\lambda = 0) &= \left(\frac{3ZeR_0^\lambda}{4\pi} \right)^2 \frac{\hbar}{2B_\lambda \omega_\lambda} \sum_\mu \frac{1}{2\lambda + 1} |\langle \lambda\mu | p_{\lambda\mu}^\dagger | 0 \rangle|^2 \\ &= \left(\frac{3ZeR_0^\lambda}{4\pi} \right)^2 \frac{\hbar}{2B_\lambda \omega_\lambda}, \end{aligned} \quad (4.94)$$

con la caratteristica dipendenza da Z^2 e da $1/E$. Si può anche dimostrare che

$$\begin{aligned} B(E2, 2' \rightarrow 2) &= 2B(E2, 2 \rightarrow 0) \\ B(E2, 4 \rightarrow 2) &= 2B(E2, 2 \rightarrow 0) \end{aligned} \tag{4.95}$$

Sperimentalmente abbiamo che

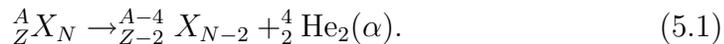
$$B(E2, 2 \rightarrow 0) \sim 40B_W(E2), \tag{4.96}$$

che è una chiara indicazione del carattere collettivo degli stati vibrazionali, mentre le due relazioni precedenti tra le transizioni da stati eccitati non sono completamente soddisfatte, specialmente la prima.

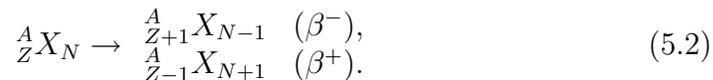
Capitolo 5

Decadimenti nucleari

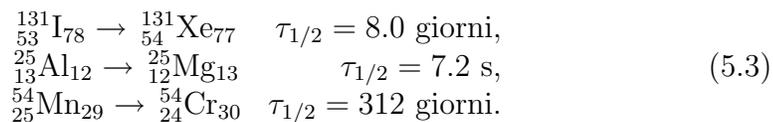
Nel capitolo precedente abbiamo esaminato le transizioni elettromagnetiche dagli stati eccitati del nucleo. Le energie in gioco, dell'ordine dei MeV, sono molto più alte rispetto alle transizioni atomiche, e infatti si è dato storicamente un altro nome a questo tipo di radiazione, raggi X o raggi γ , e le corrispondenti transizioni vengono chiamate anche decadimenti γ . Queste sono un esempio del fenomeno dell'instabilità nucleare, che si manifesta anche in altri tipi di decadimenti. Nei decadimenti α , si ha appunto l'emissione di particelle α , che sono nuclei di He,



In questi decadimenti il numero di protoni e di neutroni si conserva dallo stato iniziale allo stato finale. Un esempio di decadimento α è quello del Radio che decade in Radon ${}^{226}_{88} \text{Ra}_{138} \rightarrow {}^{222}_{86} \text{Rn}_{136} + \alpha$, con vita media $\tau_{1/2}$ di circa 1600 anni e energia cinetica della particella α di circa 4.8 MeV. Nei decadimenti β si ha la trasformazione di un protone del nucleo in un neutrone, o viceversa, con associata emissione di elettroni o positroni (accompagnati da neutrini, come vedremo meglio in seguito),



Esempi di decadimenti beta sono quelli dello Iodio in Xenon, Alluminio in Magnesio e Manganese in Cromo,



Anche i processi di fissione nucleare sono dei processi di decadimento nucleare. Questi fenomeni, fin dalla scoperta dei raggi X da parte di Roentgen, destarono subito molta curiosità: era impressionante ad esempio come queste radiazioni potessero fornire fotografie delle ossa attraverso il corpo umano, in virtù della loro grande energia, che consentiva una grande penetrazione. Vennero così stabilite le principali proprietà dei processi di decadimento nucleare. Si vide che l'attività di una sostanza diminuiva esponenzialmente secondo una caratteristica costante di tempo τ . Si comprese poi che questo andamento era dovuto al fatto che il decadimento riguardava i singoli atomi, i quali avevano una probabilità P di decadere nell'unità di tempo, indipendentemente dalla loro storia o dagli altri atomi attorno. Questo doveva suonare come abbastanza sconcertante per l'epoca, ed era un esempio di assenza di determinismo, dovuto a dinamiche essenzialmente quantistiche: non si potrà mai predire quando un singolo nucleo decade, solo la probabilità che questo accada.

5.1 Nozioni generali

Detto $N(t)$ il numero di nuclei attivi al tempo t , la variazione $dN(t)$, cioè quanti ne decadono nel tempo dt è proporzionale a $N(t)$,

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t), \implies N(t) = N(0)e^{-\lambda t}. \quad (5.4)$$

Il tempo medio di sopravvivenza di un nucleo si chiama τ , vita media, ed è legato a λ (probabilità di decadimento nell'unità di tempo) da

$$\tau = \frac{\int_0^\infty N(t)tdt}{\int_0^\infty N(t)dt} = \frac{1}{\lambda}. \quad (5.5)$$

Ci si riferisce spesso anche alla semivita, definita come il tempo $T_{1/2}$ in cui il campione si dimezza,

$$T_{1/2} = \tau \log 2. \quad (5.6)$$

Se un nucleo può decadere in diversi modi, possiamo definire costanti di decadimento parziali λ_i , tali che

$$\lambda = \sum_i \lambda_i, \quad \frac{1}{\tau} = \sum_i \frac{1}{\tau_i}. \quad (5.7)$$

Il rapporto di decadimento (branching ratio) in un dato canale i è definito da

$$BR(i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_{\text{tot}}}. \quad (5.8)$$

Per misurare λ bisogna quindi seguire $N(t)$ al variare di t . È più conveniente misurare la cosiddetta “attività” $A(t)$, definita come il numero di decadimenti nell’unità di tempo,

$$A(t) = -\frac{dN(t)}{dt} = N(0)\lambda e^{-\lambda t} = A(0)e^{-\lambda t}. \quad (5.9)$$

Ovviamente bisogna misurare il numero di decadimenti ΔN in un intervallo di tempo $\Delta t \ll \tau$. Riportando $A(t)$ così misurata in funzione del tempo su carta semilogaritmica i dati si allineeranno su una retta, la cui pendenza dà λ . Nel caso in cui le specie radioattive siano prodotte continuamente, per esempio se queste sono a loro volta prodotti del decadimento di altri nuclei, la semplice legge esponenziale di cui sopra non è più valida. In questo caso infatti, detto $N_1(t)$ il numero di nuclei della specie 1 che decade verso la specie 2, anch’essa radioattiva, il numero $N_2(t)$ di nuclei della specie 2 varia secondo l’equazione,

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = f\lambda_1 N_1(t) - \lambda_2 N_2(t), \quad (5.10)$$

dove abbiamo indicato con f il rapporto di decadimento $1 \rightarrow 2$. La soluzione di questa equazione, con condizione iniziale $N_2(0) = 0$, è

$$N_2(t) = N_1(0) \frac{f\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right), \quad (5.11)$$

e l’attività della specie 2 è $A_2(t) = \lambda_2 N_2(t)$.

5.2 Unità di misura

L’unità storica per misurare l’attività è il Curie (Ci), pari all’attività di 1 g di ^{226}Ra , ed equivalente a $3.7 \cdot 10^{10}$ decadimenti al secondo. Questa è un’unità molto grande, nelle normali attività di laboratorio si usano sorgenti con attività dell’ordine di 0.1-10 μCi . Un’altra unità di misura è il Rutherford (1Ru = 10^6 decadimenti al secondo). Nel Sistema Internazionale è stato

adottato il Becquerel (Bq), corrispondente a un decadimento al secondo, quindi

$$1\text{Ci} = 3.710^{10}\text{Bq}. \quad (5.12)$$

Queste unità non tengono conto dell'energia che una data sorgente può produrre. Questa dipende dal tipo di radiazione. Per raggi γ o raggi X (radiazioni ionizzanti) si parla di “esposizione”, definita come la carica totale di ioni positivi prodotti dalla radiazione in una massa unitaria di aria a 0°C e pressione atmosferica. L'unità di misura dell'esposizione nel SI è Coulomb/kg, ma si usa normalmente il Roentgen (R), definito come l'esposizione corrispondente alla produzione di 1 e.s.u. (l'unità cgs di carica, per cui $e = 4.8 \cdot 10^{-10}$ e.s.u.) in 1 cm^3 di aria a 0°C e pressione atmosferica (corrispondente a 0.001293 g). Quindi il fattore di conversione è

$$1\text{R} = 2.58 \cdot 10^{-4}\text{Coulomb/kg}. \quad (5.13)$$

Più generalmente, l'energia fornita da qualunque tipo di radiazione, sia essa elettromagnetica o corpuscolare, ad un grammo di materia si chiama “dose assorbita” per grammo di materia. L'unità di misura usata è il Gray (Gy),

$$1\text{Gy} = 1\text{J/kg} = 10^2\text{rad}, \quad (5.14)$$

oppure il rad (dose di radiazione assorbita), pari all'assorbimento di 100 ergs per grammo di materia. Le radiazioni emesse da sorgenti radioattive sono pericolose in quanto ionizzano la materia biologica e rompono legami chimici, uccidendo o danneggiando le cellule, e procurando cancro o altre malattie. Ad esempio le particelle α producono molta più ionizzazione in una distanza piccola e producono quindi molto più danno localmente rispetto ai raggi γ o X o alla radiazione β . Si definisce il fattore di qualità (“radiation weighing factor”) w_R che esprime empiricamente il rischio a lungo termine di contrarre cancro o leucemia come conseguenza di una esposizione cronica. I valori di w_R variano da 1 per raggi γ o X di qualunque energia (che quindi servono da riferimento), e anche per elettroni o muoni, a 5 per neutroni di bassa energia ($< 10\text{ keV}$) a 10 per neutroni di energia $10 - 100\text{ keV}$ a 20 per neutroni di energia $100\text{ keV} - 2\text{ MeV}$, a 10 per neutroni di energia $2 - 20\text{ MeV}$, a 5 per neutroni di energia $> 20\text{ MeV}$, a 5 per protoni di energia $> 2\text{ MeV}$ a 20 per particelle α o altri prodotti di fissione nucleare. Moltiplicando la dose assorbita per w_R si ottiene la “dose equivalente” per danni biologici, la cui unità di misura è il rem (“roentgen equivalent man”) se la dose assorbita è

espressa in rad ed il Sievert (Sv) se la dose assorbita è espressa in Gy,

$$1\text{Sv} = 100\text{rem}. \quad (5.15)$$

5.3 Larghezza di decadimento

Se un nucleo decade spontaneamente ciò significa che non è in uno stato stabile ($\tau < \infty$), e quindi la sua energia non è esattamente definita, per la relazione di indeterminazione di Heisenberg,

$$\tau \Delta E \sim \hbar. \quad (5.16)$$

La quantità ΔE si indica spesso anche con Γ e prende il nome di larghezza di decadimento. Vediamo perché. L'indeterminazione ΔE , o Γ , è definita in meccanica quantistica come la radice quadrata della varianza. Se effettuiamo un grande numero N di misure di energia di un nucleo preparato sempre nello stesso stato eccitato, dall'interpretazione probabilistica della meccanica quantistica abbiamo che,

$$\langle E \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_i, \quad \Gamma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (E_i^2 - \langle E \rangle^2)}. \quad (5.17)$$

Quindi la vita media di un nucleo dà la larghezza naturale di uno stato, con $\hbar = 6.6 \cdot 10^{-22}$ MeV s, $\Gamma = \hbar/\tau$, e una larghezza di 1 MeV corrisponde ad esempio a una vita media di $6.6 \cdot 10^{-22}$ s. Dal momento che i valori di τ possono arrivare a 10^{11} anni, le larghezze possono essere molto piccole. La larghezza è legata alla probabilità di trovare lo stato a una data energia E . Per stati stazionari la funzione d'onda è della forma

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-iEt/\hbar}, \quad (5.18)$$

mentre per stati instabili bisogna aggiungere all'energia E un termine complesso che renda conto del decadimento esponenziale nel tempo,

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-i\langle E \rangle t/\hbar - t/2\tau}, \quad (5.19)$$

in modo che

$$|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = |\psi(\mathbf{r}, t=0)|^2 e^{-t/\tau}. \quad (5.20)$$

La funzione d'onda (5.19) rappresenta una sovrapposizione di stati di energia definita,

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) \int a(E) e^{-iEt/\hbar} dE, \quad (5.21)$$

dove $a(E)$ è l'ampiezza di probabilità di trovare lo stato ad un'energia E . Dal confronto con l'Eq.(5.19) abbiamo che

$$e^{-t/2\tau} = \int a(E) e^{-i(E-\langle E \rangle)t/\hbar} dE, \quad (5.22)$$

per cui è chiaro che $a(E)$ può essere ricavata operando la trasformata di Fourier inversa del fattore esponenziale,

$$a(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_0^\infty e^{\{i(E-\langle E \rangle)/\hbar - 1/2\tau\}t} dt = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{E - \langle E \rangle + i\frac{\hbar}{2\tau}}, \quad (5.23)$$

e quindi la probabilità di trovare uno stato instabile con energia E è data da

$$|a(E)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(E - \langle E \rangle)^2 + (\Gamma/2)^2}, \quad (5.24)$$

che è una Lorentziana con Γ che rappresenta la larghezza a metà altezza.

5.4 Radioattività naturale

Gli elementi pesanti sono prodotti all'interno delle stelle come risultato di processi di fusione nucleare. Alcuni di questi elementi sono radioattivi con semivita comparabile con l'età della Terra. In questi casi possiamo ancora osservare i processi di decadimento, che formano la maggior parte della radioattività naturale nel nostro ambiente. Questi elementi pesanti subiscono decadimenti α e decadimenti β , diminuendo così A e Z , finché si forma un nucleo stabile più leggero. I decadimenti α cambiano A di quattro unità, mentre i decadimenti β lasciano A invariato, quindi si avranno in generale quattro catene di decadimento indipendenti, con numeri di massa $4n$, $4n + 1$, $4n + 2$ e $4n + 3$, con n intero. Come risultato dei processi di decadimento avremo una concentrazione dell'esponente più stabile di ognuna delle catene. Nella tabella riportiamo queste catene per gli elementi pesanti, con l'indicazione del nucleo finale (stabile) e del nucleo instabile con più grande vita media. Questi isotopi radioattivi presenti sulla Terra fin dalla sua formazione, circa $4.5 \cdot 10^9$ anni fa, sono tuttora presenti (tranne nel caso del Nettunio, che ha

Nome della serie	Tipo	Nucleo stabile	Nucleo con semivita maggiore	semivita (anni)
Torio	$4n$	^{208}Pb	^{232}Th	$1.41 \cdot 10^{10}$
Nettunio	$4n + 1$	^{209}Bi	^{237}Np	$2.14 \cdot 10^6$
Uranio	$4n + 2$	^{206}Pb	^{238}U	$4.47 \cdot 10^9$
Attinio	$4n + 3$	^{207}Pb	^{235}U	$7.04 \cdot 10^8$

una semivita molto più piccola). Non costituiscono in genere un pericolo per la salute perché sono strettamente legati ai minerali delle rocce. Tuttavia, tra i prodotti del decadimento vi è un gas radioattivo, il Radon, Rn, che può fuoriuscire dalle rocce in determinate situazioni. Altre sorgenti di radioattività naturale sono costituite da isotopi con semivite molto più corte, formati continuamente negli strati alti dell'atmosfera dalla diffusione dei raggi cosmici (protoni di alta energia). Tra questi vi è il ^{14}C , che ha importanti applicazioni nella datazione radioattiva. Questa è una tecnica che permette di stabilire, dalla misura dell'abbondanza relativa dell'isotopo radioattivo in un dato campione di roccia, ad esempio, e supponendo nota questa quantità all'epoca di formazione della roccia, l'età del campione stesso. Nel caso della datazione da ^{14}C si suppone nota la concentrazione relativa nella materia organica, di questo isotopo radioattivo, pari a circa 10^{-12} , frutto di un equilibrio con il tasso di produzione del ^{14}C da raggi cosmici. Quando l'organismo muore ad esempio, cessa di scambiare molecole organiche con l'ambiente, e la concentrazione di ^{14}C comincia a diminuire con semivita di 5730 anni. Se questo evento non è troppo lontano nel tempo (rispetto alla semivita), dalla misura della attività specifica del contenuto in C (attività per unità di massa) possiamo risalire all'età del campione. L'ipotesi principale in questo caso è che la produzione di ^{14}C sia rimasta pressoché costante negli ultimi 50000 anni. Questa ipotesi è confermata dalla misura dell'attività di campioni di cui si conosce l'età per altre vie. La recente attività dell'uomo rischia di compromettere questo metodo per i millenni futuri, in quanto il massiccio uso di combustibili fossili (pressoché privi di ^{14}C , data la loro età) e i numerosi test nucleari, che immettono invece quantità extra di ^{14}C nell'atmosfera, hanno modificato l'equilibrio di cui sopra.

Capitolo 6

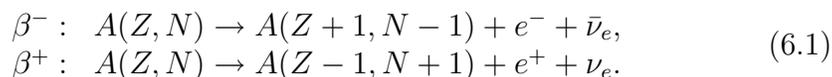
Decadimenti beta

I decadimenti β hanno avuto un ruolo centrale nello sviluppo della fisica delle particelle elementari. La apparente mancanza di conservazione dell'energia, come conseguenza del fatto che lo spettro dell'elettrone è continuo, ma anche del momento lineare e momento angolare, indussero Pauli a ipotizzare l'esistenza del neutrino, che doveva essere una particella neutra di spin $1/2$, massa molto piccola e che interagisce pochissimo con la materia, in modo da non essere rivelata dai calorimetri. Questa particella, la cui esistenza venne confermata sperimentalmente in seguito, occupa oggi il centro della scena nella ricerca di frontiera: la sua massa resta tuttora sconosciuta, anche se la scoperta del fenomeno delle oscillazioni dei neutrini da un flavour all'altro indica che essa è diversa da zero. La misura diretta della massa del neutrino avviene proprio attraverso lo studio dello spettro del decadimento beta, come sarà precisato in seguito. Il suo valore ha implicazioni cosmologiche importanti, e potrebbe essere una interessante finestra verso la cosiddetta scala di grande unificazione, in cui tre interazioni fondamentali si unificano. Sono in corso anche esperienze volte a determinare se il neutrino sia l'antiparticella di se stesso (come il fotone o il pione neutro ad esempio) una possibilità prefigurata da Majorana, che comporterebbe una violazione del numero leptonico. Di enorme importanza storica fu anche la scoperta nel 1957 della violazione della simmetria di parità, misurata nei decadimenti beta, che condusse, passando per la cosiddetta teoria $V - A$, a sua volta uno sviluppo della iniziale teoria di Fermi, alla formulazione dell'attuale modello standard delle interazioni elettrodeboli. Inizialmente questi decadimenti apparivano misteriosi: il fatto che i nuclei emettessero elettroni induceva a pensare che questi fossero costituenti nucleari. Abbiamo già visto nel primo

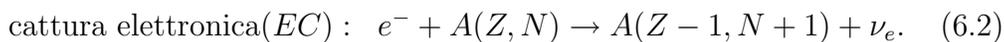
capitolo come questa ipotesi iniziale dovette essere abbandonata di fronte a una serie di argomenti contrari. Questi elettroni vanno piuttosto considerati come creati all'atto stesso del decadimento, analogamente a quanto accade per i fotoni emessi dai decadimenti elettromagnetici. Fu proprio questa analogia a suggerire a Fermi la sua teoria delle interazioni deboli, così chiamate perché le vite medie osservate erano tipicamente molto più grandi rispetto alle transizioni elettromagnetiche. Fermi propose infatti di trattare questa interazione debole come perturbazione, applicando la sua regola d'oro per le probabilità di transizione. Tuttavia, contrariamente al caso elettromagnetico dove l'interazione elementare era conosciuta nel caso classico, l'Hamiltoniana di interazione era sconosciuta. Il punto di vista di Fermi fu quindi di cercare di determinare questa hamiltoniana di interazione a partire dalle regole di selezione dei decadimenti β , postulando soltanto, sul modello elettromagnetico, una interazione “di contatto”, dove cioè elettrone, neutrino e nucleo finale sono creati nello stesso punto dello spazio-tempo.

6.1 Valori- Q delle reazioni

I decadimenti β si distinguono in decadimenti β^- e β^+ ,



In un atomo può avvenire anche il processo di cattura elettronica, assimilabile a un decadimento β inverso,



Si definisce “valore- Q ” la differenza tra l'energia cinetica totale prima e dopo la reazione,

$$Q = T_f - T_i.\tag{6.3}$$

Per i decadimenti beta nucleari il nucleo instabile può essere considerato a riposo nel laboratorio, cosicché $T_i = 0$. La condizione perché un decadimento possa avvenire è ovviamente che

$$Q > 0.\tag{6.4}$$

Dalla conservazione dell'energia abbiamo che

$$m_i = \sum_j m_f(j) + T_f.\tag{6.5}$$

Ricordandoci che le masse nucleari sono espresse in termini delle masse degli atomi neutri (ed includono perciò gli elettroni atomici), abbiamo, trascurando la massa del neutrino e le energie di legame atomiche,

$$\begin{aligned} \beta^- : \quad & Q_{\beta^-} = [M(Z, N) - M(Z + 1, N - 1)] c^2, \\ \beta^+ : \quad & Q_{\beta^+} = [M(Z, N) - M(Z + 1, N - 1)] c^2 - 2m_e c^2, \\ EC : \quad & Q_{EC} = [M(Z, N) - M(Z - 1, N + 1)] c^2 - B_e, \end{aligned} \quad (6.6)$$

dove B_e è l'energia di legame dell'elettrone catturato, dell'ordine dei 10 keV, ed in genere trascurata. L'esempio ${}^7_4\text{Be}_3 \leftrightarrow {}^7_3\text{Li}_4$ è interessante, dal momento che

$$M(Z, N) - M(Z - 1, N + 1) = 0.86 \text{ MeV}/c^2 \implies \beta^+ \text{impossibile}, \quad (6.7)$$

quindi l'unica possibilità è la cattura elettronica. In termini di energia di legame $B(Z, N)$ (ricordiamoci che $B(Z, N)/c^2 = Zm(H) + Nm_n - M(Z, N)$), abbiamo

$$\begin{aligned} Q_{\beta^-} &= B(Z + 1, N - 1) - B(Z, N) + 0.782 \text{ MeV} \\ Q_{\beta^+} &= B(Z - 1, N + 1) - B(Z, N) - 2m_e c^2 - 0.782 \text{ MeV} \\ Q_{EC} &= B(Z - 1, N + 1) - B(Z, N) - B_e - 0.782 \text{ MeV}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

dove $0.782 \text{ MeV}/c^2$ è la differenza di massa tra neutrone e atomo di idrogeno,

$$m_n - m(\text{H}) = 0.782 \text{ MeV}/c^2. \quad (6.9)$$

Per il decadimento β^- del trizio, ${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He}$, la formula corrispondente conduce a

$$Q_{\beta^-} = (7.72 - 8.48 + 0.782) \text{ MeV} \sim 20 \text{ keV}. \quad (6.10)$$

6.2 Teoria di Fermi

Come già detto Fermi parte dall'analogia con le transizioni elettromagnetiche e considera che il decadimento sia il frutto dell'azione di una Hamiltoniana di interazione. Considerando questa interazione come una perturbazione, la probabilità di transizione è data, al primo ordine della teoria delle perturbazioni, dalla regola d'oro,

$$W_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{fi}|^2 \rho(E_f), \quad (6.11)$$

dove si è indicato con H_{fi} l'elemento di matrice tra lo stato iniziale e lo stato finale dell'Hamiltoniana di interazione, e con $\rho(E_f)$ la densità degli stati finali,

$$\rho(E_f) = \frac{dN}{dE_f}. \quad (6.12)$$

In questo caso però l'Hamiltoniana è sconosciuta. L'idea di Fermi (1934) fu di considerare tutte le possibili “interazioni di contatto” tra le quattro particelle che partecipano alla reazione, cioè i nuclei iniziale e finale e i due leptoni creati. Suppone quindi che si tratti di un'interazione a un corpo, cioè viene coinvolto un nucleone per volta del nucleo iniziale e finale (interazione a quattro fermioni). In un formalismo di seconda quantizzazione, gli operatori di campo dei leptoni e dei nucleoni che partecipano alla reazione devono quindi comparire nella densità di Hamiltoniana presi nello stesso punto dello spazio tempo (esattamente come per l'interazione elettromagnetica). Dal momento che i leptoni creati sono relativistici è necessaria la formulazione relativistica della teoria quantistica dei campi. I campi fermionici saranno quindi in generale rappresentati da bispinori di Dirac. Ci sono 5 possibili accoppiamenti di questi quattro campi che rispettano la simmetria di Lorentz e la conservazione del numero barionico e leptonico, che si chiamano accoppiamento scalare, vettoriale, pseudoscalare, assiale e tensoriale. Quindi la teoria di Fermi contiene cinque diverse costanti di accoppiamento, che devono essere determinate dall'esperienza. Fermi non considerava naturalmente la possibilità di violazione della parità. Ammettendo questa possibilità gli accoppiamenti possibili sono 10. La formulazione finale della teoria coinvolge l'accoppiamento vettoriale e assiale, presi in una particolare combinazione (teoria “ $V - A$ ”), e a livello elementare si scrive,

$$\mathcal{H}(x) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{p}(x)\gamma_\mu(1 - \gamma_5)n(x)] [\bar{e}(x)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\nu(x)] + \text{h.c.}, \quad (6.13)$$

dove abbiamo indicato gli operatori di campo con i simboli delle corrispondenti particelle. La stessa forma di interazione descrive l'accoppiamento con il muone e con il leptone τ (e i corrispondenti neutrini), con la stessa costante di accoppiamento G_F (universalità delle interazioni deboli).

Daremo nel seguito, senza soffermarci sul formalismo di Dirac della quantizzazione dei campi di spin 1/2, una trattazione schematizzata di questa interazione debole. La parte dell'Hamiltoniana che coinvolge i campi dell'elettrone e del neutrino, presa tra lo stato finale e lo stato iniziale, produrrà

le funzioni d'onda $\phi_e(\mathbf{r})$ e $\phi_\nu(\mathbf{r})$ dell'elettrone e del neutrino emessi. Se \mathbf{p} è il momento dell'elettrone e \mathbf{q} il momento del neutrino, il numero dn_e o dn_ν di stati di elettrone o di neutrino nell'intervallo $(p, p + dp)$ e $(q, q + dq)$ (senza restrizioni sulla direzione in cui vengono emessi) è,

$$dn_e = \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} V = \frac{p^2 dp V}{2\pi^2 \hbar^3}, \quad (6.14)$$

$$dn_\nu = \frac{4\pi q^2 dq}{h^3} V = \frac{q^2 dq V}{2\pi^2 \hbar^3}, \quad (6.15)$$

immaginando appropriate condizioni al contorno per le particelle libere nel volume totale V . Tuttavia, l'energia del neutrino è vincolata da quella dell'elettrone. Ignorando il rinculo del nucleo possiamo scrivere,

$$E_f = E_e + E_\nu, \quad (6.16)$$

dove E_f è l'energia finale disponibile. Essa è legata all'energia cinetica finale disponibile (valore- Q della reazione) dalla relazione,

$$Q = E_f - m_e c^2, \quad (6.17)$$

ignorando piccoli effetti dovuti alla massa del neutrino. Detta m_ν la massa del neutrino abbiamo,

$$E_\nu dE_\nu = c^2 q dq, \quad (6.18)$$

e

$$q = \frac{1}{c} \sqrt{E_\nu^2 - (m_\nu c^2)^2}. \quad (6.19)$$

Quindi il numero di stati finali di neutrini, fissato lo stato dell'elettrone, è

$$dn_\nu = \frac{(E_f - E_e) \sqrt{(E_f - E_e)^2 - (m_\nu c^2)^2} dE_f V}{2\pi^2 \hbar^3 c^3}, \quad (6.20)$$

e la densità degli stati finali (6.12) diventa

$$\rho(E_f) = \frac{dN}{dE_f} = \frac{(4\pi)^2}{h^6 c^3} V^2 (E_f - E_e) \sqrt{(E_f - E_e)^2 - (m_\nu c^2)^2} p^2 dp. \quad (6.21)$$

Ignorando per il momento gli spin di elettrone e neutrino supponiamo che le corrispondenti funzioni d'onda siano delle onde piane,

$$\phi_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}, \quad \phi_\nu(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar}. \quad (6.22)$$

In realtà l'elettrone risente dell'interazione coulombiana con il nucleo, ed è necessario includere la cosiddetta funzione di Fermi per tenerne conto,

$$F(Z, E_e) = \frac{x}{1 - e^{-x}}, \quad x = \mp 2\pi\alpha Z \frac{c}{v}, \quad (6.23)$$

per il decadimento β^\pm , con v la velocità dell'elettrone. Questa funzione è riportata in Fig. 6.1. Per momenti tipici ~ 1 MeV, il fattore esponenziale

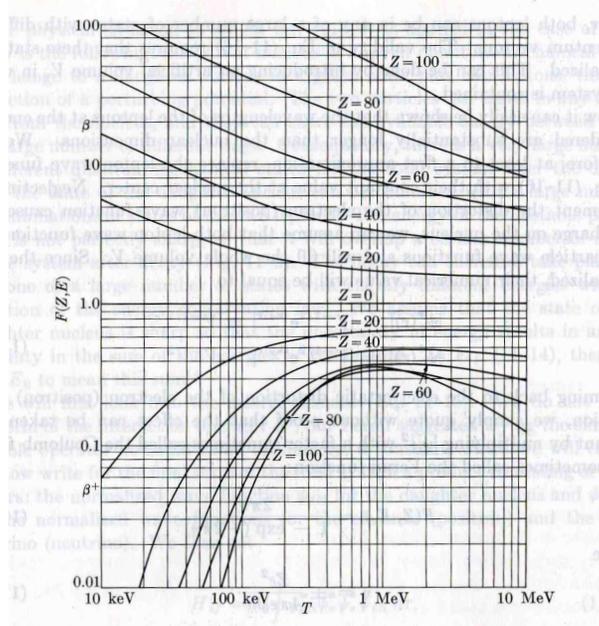


Figura 6.1: Funzione di Fermi $F(Z, E)$ come funzione dell'energia cinetica T dell'elettrone (o del positrone). (Da Ref. [2]).

può essere approssimato a 1, dal momento che r è dell'ordine delle dimensioni del nucleo, e quindi $pr/\hbar \ll 1$,

$$e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \sim e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \sim 1. \quad (6.24)$$

In questa approssimazione la coppia elettrone e neutrino ha momento angolare orbitale nullo. Da notare che i termini che dipendono dal volume totale V nella formula (6.11) per la probabilità di transizione si semplificano, e quindi il risultato finale ne è indipendente. Per quanto riguarda invece il contributo

propriamente nucleare all'elemento di matrice, indicato con M_{fi} , esso sarà dato genericamente da

$$M_{fi} = \int \psi_f^* O_x \psi_i, \quad (6.25)$$

dove O_x è per adesso un generico operatore che agisce sui nuclei. Sappiamo dalla teoria $V - A$ che si tratta di un operatore a un corpo, cioè che coinvolge un nucleone alla volta. In uno sviluppo non relativistico dei gradi di libertà nucleonici, esso contiene due diversi termini, rispettivamente detti di Fermi e di Gamow-Teller,

$$O_x = G_V \sum_{j=1}^A \tau_{\pm}(j) + \sum_{j=1}^A \sigma(j) \tau_{\pm}(j), \quad (6.26)$$

dove τ_{\pm} è l'operatore di salita e discesa dell'isospin, che trasforma un neutrone in un protone e viceversa, e che corrisponde quindi al decadimento β^- e β^+ . L'operatore vettoriale $\sigma(j)$ è l'operatore di spin per il nucleone j -esimo. Ovviamente, perché l'Hamiltoniana sia invariante sotto rotazioni, bisogna che questo operatore sia contratto con un operatore vettoriale formato dalle variabili dinamiche che descrivono la coppia di leptoni. Esso interverrà ad esempio quando i due leptoni formano una coppia di spin 1. La costante di accoppiamento G_V è proprio la costante di Fermi che appare nell'Eq. (6.13), $G_V = G_F$, per ragioni che hanno a che fare con la cosiddetta conservazione della corrente vettoriale, valida nel limite di isospin. Invece la costante G_A viene modificata per il fatto che la corrente assiale non è conservata, come conseguenza della rottura spontanea della simmetria chirale, e dell'apparire dei pioni come corrispondenti bosoni di Goldstone. La teoria riesce a prevedere un legame tra G_V e G_A , ben verificato dall'esperienza, noto come relazione di Goldberger-Treiman,

$$g_A = \frac{G_A}{G_V} = \frac{F_{\pi} g_{\pi NN}}{m_N c^2} \quad (6.27)$$

dove F_{π} è la costante di disintegrazione del pione ($F_{\pi} = 92.4$ MeV), e $g_{\pi NN}$ la costante di accoppiamento pione-nucleone-nucleone. Una discussione di questi fatti a partire dall'Eq. (6.13) richiede prima di tutto la manipolazione dell'equazione di Dirac e poi la appropriata descrizione della rottura spontanea della simmetria chirale nella QCD, cosa che va al di là dell'ambito di queste lezioni. Accontentiamoci perciò dell'Eq. (6.26) come punto di partenza della discussione dei decadimenti beta nucleari. Riassumendo lo stato

della nostra discussione, la probabilità di transizione per transizione beta si scrive quindi

$$dW_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \frac{(4\pi)^2}{h^6 c^3} (E_f - E_e) \sqrt{(E_f - E_e)^2 - (m_\nu c^2)^2} F(Z, E_e) p^2 dp, \quad (6.28)$$

che diventa, nel caso di massa del neutrino nulla,

$$W(p) = \frac{dW_{fi}}{dp} = \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} |M_{fi}|^2 F(Z, E_e) (E_f - E_e)^2 p^2, \quad [m_\nu = 0], \quad (6.29)$$

che dà lo spettro di decadimento beta in funzione del (modulo del) momento dell'elettrone emesso. Allo spettro continuo del decadimento beta si sovrappongono spesso dei picchi molto stretti, che rappresentano elettroni che provengono dalla cosiddetta conversione interna. Il processo alla radice di questo fenomeno è una transizione elettromagnetica, in cui però non si ha emissione di fotoni, ma la ionizzazione di un elettrone nei gusci atomici più interni. L'elettrone viene quindi emesso con una energia ben definita, che risulta appunto in picchi stretti sovrapposti allo spettro beta. Spesso si usa il cosiddetto plot di Kurie, dove si riporta l'andamento di

$$\sqrt{\frac{W(p)}{F(Z, E_e) p^2}}, \quad (6.30)$$

in funzione dell'energia dell'elettrone. Questa funzione è una retta con pendenza negativa (cfr Fig. 6.2), che incontra l'asse delle ascisse nel punto $E_e = E_f$. Gli scarti dall'andamento lineare in prossimità dell'end-point possono essere attribuiti alla massa del neutrino, in quanto in questo caso la curva va a zero per $E_e = E_f - m_\nu c^2$. La misura diretta della massa del neutrino in questo modo è resa difficile dal basso numero di eventi nella zona di spettro che ci interessa. La Fig. 6.3 illustra la difficoltà di questo tipo di misure, dovendo anche correggere la previsione teorica per la risoluzione finita dell'apparato di misura. Dal decadimento



con semivita $\tau_{1/2} \sim 12.3$ anni, e $Q = 18.6$ keV, piccolo abbastanza da avere sensibilità alle piccole masse, i limiti attuali corrispondono a

$$m_\nu < 3 \text{ eV}. \quad (6.32)$$

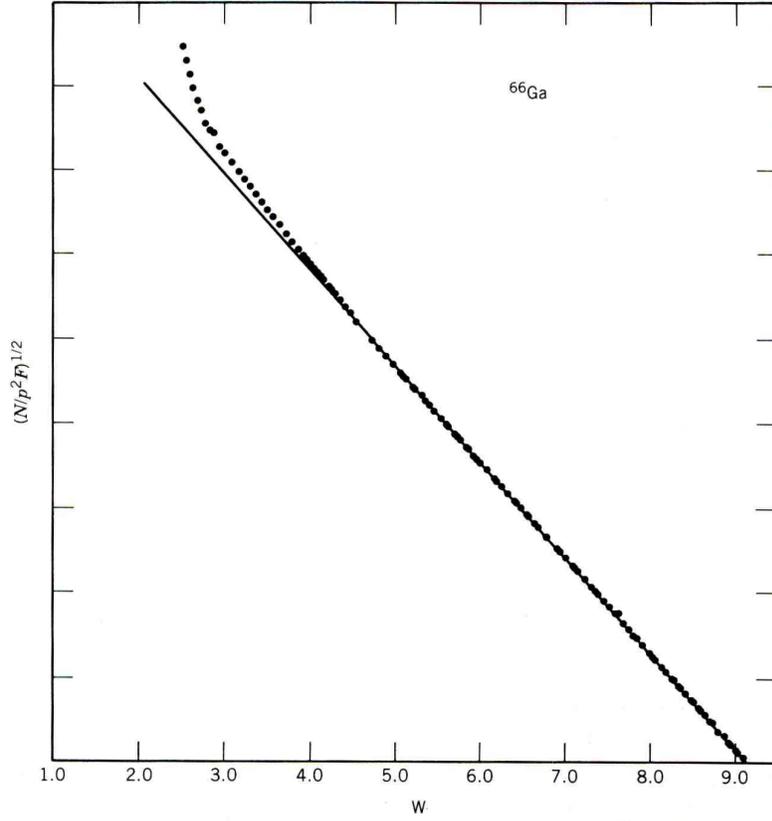


Figura 6.2: Plot di Kurie del decadimento β del Gallio ^{66}Ga in funzione dell'energia totale dell'elettrone in unit  di $m_e c^2$. (Da Ref. [4]).

La probabilit  di decadimento beta   data dall'integrale della funzione $W(p)$,

$$W_{fi} = \int W(p) dp = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} f(Z, E_f) |M_{fi}|^2, \quad (6.33)$$

dove abbiamo introdotto la funzione adimensionale $f(Z, E_f)$, detta anche integrale di Fermi,

$$\begin{aligned} f(Z, E_f) &= \int F(Z, E_e) \left(\frac{p^2}{m_e c^2} \right)^2 \left(\frac{E_f - E_e}{m_e c^2} \right)^2 \frac{dp}{m_e c^2} \\ &= \frac{1}{m_e^5 c^7} \int F(Z, E_e) p^2 (E_f - E_e)^2 dp. \end{aligned} \quad (6.34)$$

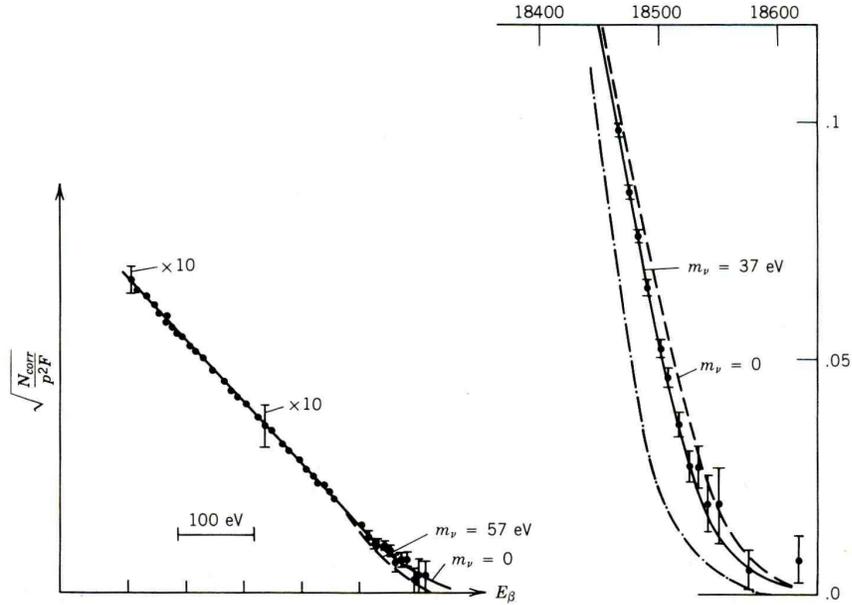


Figura 6.3: Esempi di determinazione della massa del neutrino a partire dallo spettro del decadimento β del Trizio, ${}^3\text{H}$. (Da Ref. [4]).

Questo integrale è calcolato numericamente e tabulato, ed è riportato in Fig. 6.4. La semivita nel decadimento beta è quindi data da

$$\tau_{1/2} = \frac{\log 2}{W_{fi}} = \frac{2\pi^3 \hbar^7}{m_e^5 c^4} \frac{1}{f(Z, E_f)} \frac{\log 2}{|M_{fi}|^2}. \quad (6.35)$$

Invece della semivita, ci si riferisce spesso alla cosiddetta semivita comparativa, anche detta “ ft ”, data dal prodotto della semivita per l’integrale di Fermi,

$$ft \equiv f(Z, E_f) \tau_{1/2} = \frac{2\pi^3 \hbar^7}{m_e^5 c^4} \frac{\log 2}{|M_{fi}|^2}, \quad (6.36)$$

direttamente legato al modulo quadro dell’elemento di matrice nucleare. Il valore ft può variare di diversi ordini di grandezza, da 10^3 s a 10^{20} s. In generale ci si riferisce a $\log_{10} ft$, con ft espresso in secondi.

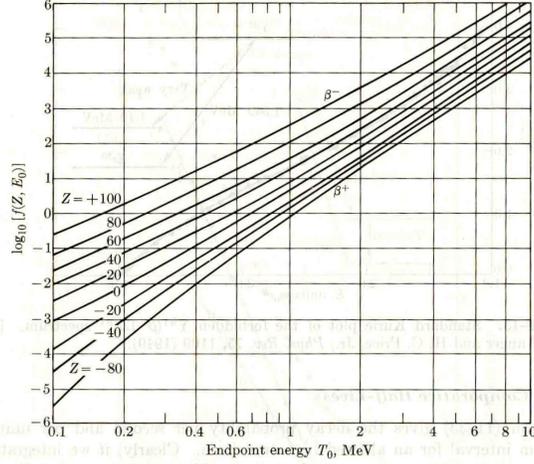


Figura 6.4: Integrale di Fermi $f(Z, E_0)$ in funzione dell'energia cinetica massima disponibile dell'elettrone (o positrone). (Da Ref. [2]).

6.3 Decadimenti permessi e vietati

I decadimenti con ft minore, $\log_{10} ft \sim 3 - 4$, sono noti come decadimenti “superpermessi”, che rientrano nella categoria dei decadimenti “permessi”, identificati come quelli per cui l'approssimazione (6.24) è valida. Se le regole di selezione impediscono queste transizioni, è allora necessario considerare gli ordini superiori dello sviluppo,

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2\lambda+1)} i^{\lambda} j_{\lambda}(kr) Y_{\lambda 0}(\theta, 0), \quad (6.37)$$

che vengono chiamati, in ordine di multipolarità, decadimenti 1°-vietati, 2°-vietati, eccetera. Nel caso dei decadimenti permessi, il caso speciale dei decadimenti superpermessi è quello in cui i numeri quantici J^P sono $0^+ \rightarrow 0^+$. In questo caso le transizioni sono puramente di tipo-Fermi, cioè solo il primo termine dell'Eq. (6.26) può contribuire: infatti il secondo termine si trasforma come un vettore per rotazioni, ed ha elemento di matrice nullo tra stati di singoletto. L'operatore di Fermi, sommato su tutti i nucleoni, diventa l'operatore di salita o discesa di isospin totale,

$$\sum_{j=1}^A \tau_{\pm}(j) = T_{\pm}, \quad (6.38)$$

che ha elementi di matrice tra stati di isospin totale definito pari a

$$\begin{aligned} & \langle J_f M_f T_f T_{3f} | T_{\pm} | J_i M_i T_i T_{3i} \rangle \\ & = \sqrt{T_i(T_i + 1) - T_{3i}(T_{3i} \pm 1)} \delta_{J_f J_i} \delta_{M_f M_i} \delta_{T_f T_i} \delta_{T_{3f}(T_{3i} \pm 1)} \end{aligned} \quad (6.39)$$

pari ad esempio a $\sqrt{2}$ nel caso di nuclei con $T = 1$. In altre parole, le transizioni di Fermi avvengono tra nuclei che appartengono allo stesso multipletto di isospin, in cui l'unica differenza tra nucleo iniziale e finale è la sostituzione di un neutrone con un protone (o viceversa). È chiaro che in questo caso l'elemento di matrice sarà il più grande possibile, perché la parte spaziale della funzione d'onda rimane la stessa. Per tutte le transizioni superpermesse il valore di ft è abbastanza costante, come illustrato nella tabella. È possibile

Decadimento	$ft(s)$
$^{10}\text{C} \rightarrow ^{10}\text{B}$	3100 ± 31
$^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N}$	3092 ± 4
$^{18}\text{Ne} \rightarrow ^{18}\text{F}$	3084 ± 76
$^{22}\text{Mg} \rightarrow ^{22}\text{Ne}$	3014 ± 78

da questi dati ricavare il valore della costante di accoppiamento di Fermi G_V ,

$$\frac{G_V}{(\hbar c)^3} = 1.1493 \cdot 10^{-11} \text{MeV}^{-2} \sim \frac{10^{-5}}{m_N^2}, \quad (6.40)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo estratto una quantità dimensionale rilevante al problema, in modo da avere un numero puro, da confrontare ad esempio con la costante di struttura fina α : le interazioni responsabili dei decadimenti beta sono molto più deboli di quelle elettromagnetiche, e per questo vengono chiamate appunto "interazioni deboli". Da un esame dell'operatore delle transizioni di Fermi possiamo stabilire le corrispondenti regole di selezione:

$$\begin{aligned} J_f &= J_i & (\Delta J &= 0) \\ T_f &= T_i & (\Delta T = 0, \text{ ma } T_i = 0 \rightarrow T_f = 0 \text{ vietate}) \\ T_{3f} &= T_{3i} \pm 1 & (\Delta T_3 = 1) \\ \Delta\pi &= 0 & (\text{parità immutata}). \end{aligned} \quad (6.41)$$

Le transizioni di Gamow-Teller corrispondono al caso in cui gli spin di elettrone e neutrino si combinano a formare un momento angolare 1, che si

accoppia con l'operatore $\sigma(j)$ di spin dei singoli nucleoni. Come già detto le transizioni permesse sono in generale quelle per cui l'approssimazione di onde piane (6.24) è valida. In questo caso non vi è nessun contributo al momento angolare orbitale da parte della coppia di leptoni, ma vi può sempre essere un contributo al momento angolare di spin. Le regole di selezione per le transizioni di Gamow-Teller sono

$$\begin{aligned}
 \Delta J &= 0, 1 && (\text{ma } J_i = 0 \rightarrow J_f = 0 \text{ vietate}) \\
 \Delta T &= 0, 1 && (\text{ma } T_i = 0 \rightarrow T_f = 0 \text{ vietate}) \\
 T_{3f} &= T_{3i} \pm 1 && (\Delta T_3 = 1) \\
 \Delta \pi &= 0 && (\text{parità immutata}).
 \end{aligned}
 \tag{6.42}$$

Il modulo quadro dell'elemento di matrice riceve in generale contributi da entrambi gli operatori. Si usa scrivere

$$|M_{fi}|^2 = G_V^2 \{ \langle F \rangle^2 + g_A^2 \langle GT \rangle^2 \}.
 \tag{6.43}$$

Ad esempio la transizione $^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N}^*$ è $0^+ \rightarrow 0^+$ e quindi puramente di tipo Fermi, mentre la transizione $^6\text{He} \rightarrow ^6\text{Li}$ è $0^+ \rightarrow 1^+$, quindi puramente di tipo Gamow-Teller. Nel decadimento beta del neutrone, $1/2^+ \rightarrow 1/2^+$ entrambi gli operatori possono contribuire.

Nei decadimenti vietati la coppia di leptoni contribuisce al momento angolare orbitale. Le regole di selezione nel caso dei decadimenti 1°-vietati sono $\Delta J = 0, 1, 2$ con cambiamento di parità, per i 2°-vietati sono $\Delta J = 0, 1, 2, 3$ senza cambiamento di parità, eccetera. Come già detto, per le energie dell'elettrone in gioco, le multipolarità successive sono fortemente sfavorite. Gli ordini di grandezza delle semivite comparative dei diversi tipi di transizione sono riassunti nella tabella seguente.

Tipo di decadimento	$\log_{10} ft$
Superpermesso	2.9-3.7
Permesso	4.4-6.0
1°-vietato	6-10
2°-vietato	10-13
3°-vietato	> 15

Capitolo 7

Decadimenti alfa

7.1 Bilancio energetico

Alla radice dell'importanza dei decadimenti alfa vi è la proprietà di saturazione delle forze nucleari, per cui il nucleo di He è una configurazione particolarmente stabile di 4 nucleoni. Sappiamo già dalla curva dell'energia di legame per nucleone, B/A in funzione di A , che questa curva ha un massimo per $A \sim 50$ e poi decresce lentamente, senza mai annullarsi. L'energia di separazione dell'ultimo nucleone in un nucleo fluttua rapidamente con A , ma in media decresce, e diventa più piccola di 7 MeV a partire da $A \sim 150$. Quando questo succede, sarà energeticamente favorita la situazione in cui 4 nucleoni si legano per formare una particella α , che ha energia di legame pari a 28.3 MeV. Deduciamo da questo argomento che il decadimento α non è energeticamente possibile fino a $A \sim 150$, come anche illustrato nella Fig. 7.1. La possibilità del decadimento α , dal punto di vista puramente energetico, è determinata dalla condizione che il valore- Q sia positivo. Il valore- Q dei decadimenti α rappresenta, analogamente a quanto avviene per i decadimenti β , l'energia cinetica disponibile dei prodotti di decadimento. Essendo il numero di protoni e neutroni separatamente conservato nei decadimenti $(Z, A) \rightarrow (Z - 2, A - 4) + \alpha$, il bilancio energetico è più facile. In termini dell'energia di legame,

$$Q = B(^4\text{He}) + B(Z - 2, A - 4) - B(Z, A). \quad (7.1)$$

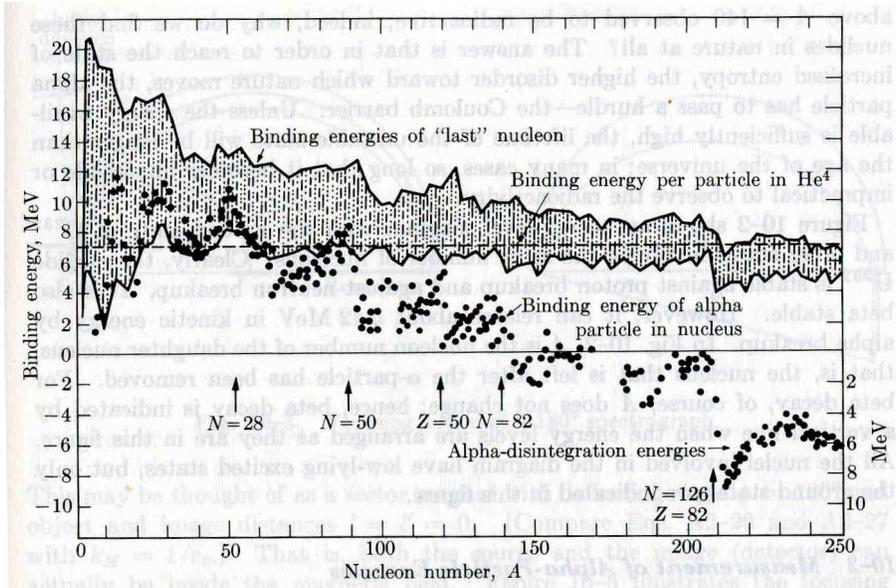


Figura 7.1: La banda rappresenta l'intervallo di variazione dell'energia di legame dell'“ultimo” nucleone. I punti l'energia di legame dell'“ultima” particella α nei nuclei β -stabili. (Da Ref. [2]).

Sapendo che $B(^4\text{He}) = 28.3 \text{ MeV}$, otteniamo, sviluppando la formula semiempirica di massa (2.10) per grandi valori di Z ed A ($A, Z \gg 1$),

$$\begin{aligned}
 Q = & 28.3 \text{ MeV} - 4a_V - \frac{8}{3}a_SA^{-1/3} - 4a_CZA^{-1/3} \left(1 - \frac{Z}{3A}\right) \\
 & + 4a_I \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2 + 3a_PA^{-7/4}.
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Questa formula rende conto dell'andamento di massima. Il valore Q nei decadimenti α ($X \rightarrow X' + \alpha$) è direttamente legato all'energia cinetica E_α della particella α emessa: dalla conservazione della quantità di moto e dell'energia abbiamo,

$$E_\alpha = \frac{Q}{1 + \frac{m_\alpha}{m_{X'}}} \sim Q \left(1 - \frac{4}{A}\right). \tag{7.3}$$

Il fatto che per i valori grandi di A il decadimento α sia energeticamente possibile non vuol dire che tutti i nuclei con $A > 150$ siano α -instabili: il decadimento α deve contrastare la barriera di Coulomb, cioè la repulsione Coulombiana tra particella α e nucleo. Per comprendere questo fatto

emettitore α	E_α (MeV)	$\tau_{1/2}$
^{206}Po	5.22	8.8 giorni
^{208}Po	5.11	2.9 anni
^{210}Po	5.31	138 giorni
^{212}Po	8.78	$0.3 \mu\text{s}$
^{214}Po	7.68	$164 \mu\text{s}$
^{216}Po	6.78	0.15 s
^{230}U	5.89	20.8 giorni
^{232}U	5.32	72 anni
^{234}U	4.77	$2.47 \cdot 10^5$ anni
^{236}U	4.49	$2.39 \cdot 10^7$ anni
^{238}U	4.20	$4.51 \cdot 10^9$ anni

Tabella 7.1: Energia delle particelle α e semivite corrispondenti in alcuni esempi di decadimenti α .

possiamo pensare all'andamento dell'energia potenziale della particella α in funzione della sua distanza dal nucleo. Poiché le interazioni nucleari sono a corto raggio, fuori dal nucleo vi è solo il potenziale Coulombiano, che si annulla a distanza infinita e cresce con l'avvicinarsi al nucleo come $1/r$. All'interno del nucleo l'interazione Coulombiana è sovrastata dall'interazione forte, e possiamo supporre che il nucleo costituisca in effetti una buca di potenziale per la particella α . Quindi, anche immaginando una particella α "precostruita" nel nucleo con energia positiva, tale cioè che il decadimento sia energeticamente possibile ($Q > 0$), questa energia può risultare minore della barriera Coulombiana e di conseguenza il decadimento classicamente vietato. L'altezza della barriera Coulombiana stimata in questo modo è

$$E_C = \frac{2Ze^2}{r_0 A^{1/3}} \sim 35 \text{ MeV}. \quad (7.4)$$

Classicamente una particella α preesistente nel nucleo deve avere un'energia superiore a E_C per poter abbandonare il nucleo. In realtà le energie tipiche delle particelle α non raggiungono mai questi valori, cfr. Tabella 7.1. Questo suggerisce che il decadimento avvenga per effetto tunnel attraverso la barriera Coulombiana: la funzione d'onda dentro la barriera non si annulla esattamente, e c'è una probabilità non nulla di trovare la particella al di là della barriera.

7.2 La legge di Geiger-Nuttall

La probabilità W di decadimento α segue la relazione empirica,

$$\log_{10} W = C - \frac{D}{\sqrt{E_\alpha}}, \quad (7.5)$$

con costanti poco dipendenti da Z e pressoché indipendenti da N . Riportando $\log_{10} W$ in funzione della variabile $Z/\sqrt{E_\alpha}$ tutti i decadimenti α osservati si allineano bene su una retta, come illustrato nella Fig. 7.2. Questa relazio-

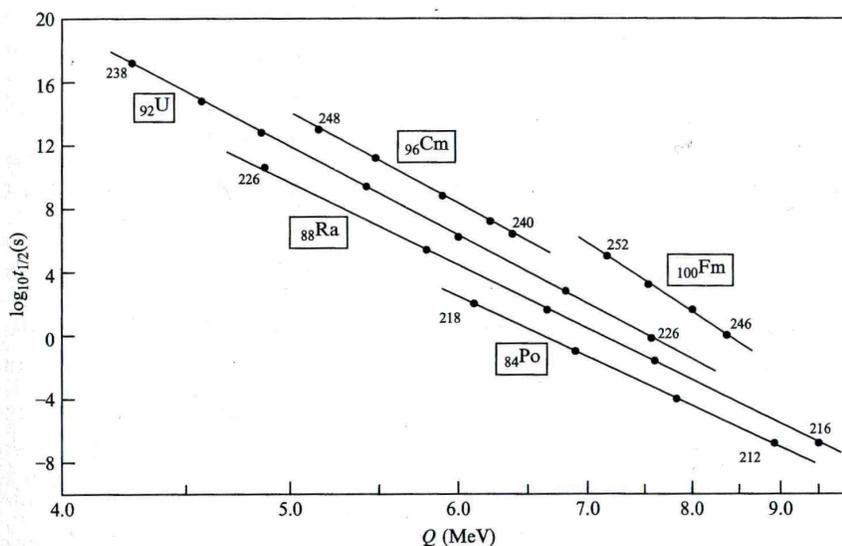


Figura 7.2: Logaritmo della semivita (in secondi) per decadimenti α , cioè l'inverso della probabilità di transizione α per unità di tempo, per diverse sequenze di isotopi, riportati in funzione di Q , che è legato linearmente all'energia della particella α emessa, su una scala lineare in q/\sqrt{Q} . I punti si allineano bene su delle rette, con coefficiente angolare tanto più alto quanto maggiore è il valore di Z . (Da Ref. [6]).

ne può essere spiegata sulla base di un semplice modello. Supponiamo che si possa definire una probabilità p_α di trovare una particella α preconstituita da qualche parte nel nucleo. Detta ν la frequenza con cui questa particella α si trova vicino la superficie nucleare e \mathcal{T} il coefficiente di trasmissione per effetto tunnel attraverso la barriera, la probabilità per unità di tempo di un

decadimento α sarà

$$W = p_\alpha \nu \mathcal{T}. \quad (7.6)$$

La frequenza ν può essere stimata essere,

$$\nu \sim \frac{v}{2R} \sim \frac{\sqrt{2E_\alpha/m_\alpha}}{2R} \sim \frac{\sqrt{E_\alpha(\text{MeV})}}{A^{1/3}} \times 2.8 \cdot 10^{21} \text{s}^{-1}, \quad (7.7)$$

sebbene siano da aspettarsi delle grandi correzioni, dal momento che i nuclei pesanti non hanno una forma sferica, e dal momento che abbiamo anche supposto che l'energia cinetica della particella α “precostruita” sia la stessa della particella α emessa. Risulta che questa semplice stima di ν è circa un ordine di grandezza troppo grande. Per quanto riguarda il coefficiente di trasmissione \mathcal{T} per effetto tunnel attraverso la barriera di potenziale, sfruttiamo la formula

$$\mathcal{T} = \left\{ 1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} (\sinh \kappa b)^2 \right\}^{-1}, \quad (7.8)$$

per il coefficiente di trasmissione di una particella di energia E attraverso una barriera di potenziale quadrata di altezza V_0 e larghezza b , con

$$\kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}. \quad (7.9)$$

In queste espressioni E è l'energia cinetica della particella. Nel nostro caso $V_0 \sim 35$ MeV, $E \sim 4 - 9$ MeV. Nel limite

$$V_0 \gg E, \quad \kappa b \rightarrow \infty, \quad (7.10)$$

abbiamo

$$\mathcal{T} \rightarrow e^{-2\kappa b}. \quad (7.11)$$

In realtà la barriera di potenziale non ha la semplice forma quadrata. Sappiamo che per problemi con simmetria sferica l'equazione d'onda si riduce al caso unidimensionale per la funzione d'onda radiale $u(r)$, includendo però anche la barriera centrifuga,

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left\{ E_\alpha - V(r) - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right\} u(r) = 0, \quad (7.12)$$

dove μ è la massa ridotta di particella α e nucleo. Fuori dal nucleo il potenziale effettivo è quindi

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{2Ze^2}{r} + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2}. \quad (7.13)$$

L'unica differenza col caso semplice esaminato prima è che adesso il potenziale è una funzione di r . Per potenziali abbastanza regolari¹ la soluzione rimane della stessa forma, solo con la sostituzione

$$\kappa b \rightarrow \int_R^{R_1} \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} \sqrt{V_{\text{eff}}(r) - E_\alpha}} dr, \quad (7.14)$$

con l'integrale preso tra i punti di inversione classici, cioè tra il raggio del nucleo R e la distanza R_1 determinata dalla condizione

$$V_{\text{eff}}(R_1) - E_\alpha = 0. \quad (7.15)$$

Nel caso $\ell = 0$ questa distanza è data da

$$R_1 = \frac{2Ze^2}{E_\alpha}. \quad (7.16)$$

In questo caso l'integrale può essere fatto analiticamente e il coefficiente di trasmissione \mathcal{T} è dato da

$$\log \mathcal{T} = -2\kappa b = -\frac{2R_1}{\hbar} \sqrt{2\mu E_\alpha} \left\{ \arccos \sqrt{\frac{R}{R_1}} - \sqrt{\frac{R}{R_1} \left(1 - \frac{R}{R_1}\right)} \right\}. \quad (7.17)$$

Nello stesso limite dell'Eq. (7.10) abbiamo

$$R_1 \gg R, \quad \arccos \sqrt{\frac{R}{R_1}} \rightarrow \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{R}{R_1}}, \quad (7.18)$$

e quindi

$$\log \mathcal{T} = -\frac{2R_1}{\hbar} \sqrt{2\mu E_\alpha} \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R}{R_1}} \right). \quad (7.19)$$

Il termine positivo è

$$\frac{4R_1}{\hbar} \sqrt{2\mu E_\alpha} \sqrt{\frac{R}{R_1}} = \frac{4}{\hbar} \sqrt{2\mu R 2Ze^2} \sim 3.4 \sqrt{ZA^{1/3}}, \quad (7.20)$$

mentre il termine negativo vale

$$-\frac{\pi}{\hbar} \sqrt{2\mu E_\alpha R_1^2} \sim -4.1 \frac{Z}{\sqrt{E_\alpha(\text{MeV})}}, \quad (7.21)$$

¹In realtà nel nostro caso la forma del potenziale immediatamente fuori dal nucleo non è detto che soddisfi questa condizione.

quindi in totale

$$\log \mathcal{T} \sim 3.4\sqrt{ZA^{1/3}} - 4.1\frac{Z}{\sqrt{E_\alpha(\text{MeV})}}. \quad (7.22)$$

La cosa più difficile è stimare ragionevolmente p_α , la probabilità di trovare una particella α preconstituita dentro il nucleo. Cambierà presumibilmente da nucleo a nucleo, ma per una stima di ordini di grandezza si prende $p_\alpha = 0.1$ per tutti i nuclei pesanti α -radioattivi. Mettendo insieme tutti i fattori, abbiamo per la probabilità di decadimento W ,

$$\log_{10} W[\text{s}^{-1}] = 20.4 + \log_{10} \frac{E_\alpha}{A^{1/3}} + 1.5\sqrt{ZA^{1/3}} - 1.8\frac{Z}{\sqrt{E_\alpha(\text{MeV})}}. \quad (7.23)$$

La dipendenza dall'energia viene essenzialmente dall'ultimo termine, in accordo con la legge empirica di Geiger-Nuttall. In più il modello predice una dipendenza di W da Z e in misura minore da A . In effetti risulta che riportando in un grafico $\log_{10} W$ in funzione di E_α per i singoli elementi separatamente, i punti si allineano molto meglio su delle curve parallele le une alle altre, molto vicine ma ben distinte. Le restanti discrepanze possono essere attribuite ad effetti di struttura nucleare, cruciali ad esempio per il parametro p_α . Inoltre abbiamo implicitamente assunto che le particelle α emergono con una sola energia cinetica E_α : in realtà da uno stesso nucleo emittitore si possono avere diversi stati finali del nucleo prodotto, anche stati eccitati, e quindi le energie delle particelle α variano di conseguenza. È comunque soddisfacente spiegare con questo semplice modello vite medie di decadimenti α su un intervallo di quasi 30 ordini di grandezza.

Capitolo 8

Fissione nucleare

Da un esame della curva dell'energia di legame per nucleone, Fig. 2.1, si vede che, ad esempio, se il nucleo di Uranio ^{238}U (per il quale $B/A \sim 7.6$ MeV) si divide in due frammenti uguali con $A = 119$ (dove $B/A \sim 8.5$ MeV) si ha un guadagno di energia, analogamente a quanto avviene per i decadimenti α . Come per i decadimenti α ciò che ostacola questo guadagno di energia è la barriera di Coulomb, che sarà in realtà più alta per la fissione nucleare, visto che sono in gioco un maggior numero di protoni. In effetti si stima che la fissione spontanea diventi competitiva con il decadimento α a partire da $A \sim 250$. Per avere un'idea degli ordini di grandezza coinvolti, prendiamo l'esempio proposto prima, del nucleo di Uranio che fissiona in due nuclei di Palladio, $^{238}\text{U} \rightarrow ^{119}\text{Pd}$. Il guadagno di energia è

$$Q = 2 \times 119(8.5 \text{ MeV}) - 238(7.6 \text{ MeV}) = 214 \text{ MeV}, \quad (8.1)$$

mentre l'altezza della barriera Coulombiana è in questo caso,

$$V_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_1 + R_2} = \frac{\alpha \hbar c (46)^2}{2r_0 A^{1/3}} = 258 \text{ MeV}. \quad (8.2)$$

Quindi le energie in gioco sono molto superiori al caso del decadimento α . Da notare che questi sono solo ordini di grandezza. In particolare, se il rapporto Z/A è ottimale per il nucleo che fissiona non lo sarà più per i nuclei prodotti [vi sarà un eccesso di neutroni, cfr. Eq. (2.16)], quindi il guadagno in energia è minore. Anche il calcolo della barriera andrebbe corretto, perché suppone che la fissione sia simmetrica, cioè con due frammenti uguali, mentre nella maggior parte dei casi ciò non accade. Quello che si può dire è che le due

quantità sono dello stesso ordine di grandezza. Ci saranno dei nuclei che si trovano poco al di sotto della barriera, e questi fissionano spontaneamente, altri nuclei che si trovano molto al di sotto, e non fissionano, e quelli che si troverebbero al di sopra della barriera ovviamente non esistono in natura. Si stima che i nuclei siano instabili per fissione a partire da $A \sim 300$. Oltre che per effetto tunnel la fissione può avvenire assorbendo una quantità di energia tale da fare scavalcare la barriera Coulombiana, ad esempio per assorbimento di un neutrone o di un fotone. Nel processo d'urto si forma uno stato nucleare intermedio (“compound nucleus”) che si trova al di sopra della barriera di Coulomb e quindi fissiona immediatamente. Per alcuni nuclei bastano neutroni termici, per altri servono neutroni più energetici \sim MeV. Questo è il fenomeno della fissione indotta, sfruttato nei reattori nucleari per produrre energia. Si produce infatti una reazione a catena, in quanto tra i prodotti della fissione compaiono spesso dei neutroni (si chiamano neutroni “prompt”, e servono a smaltire l'eccesso di neutroni sopra menzionato) i quali a loro volta inducono altre reazioni di fissione nucleare. Questo processo può avvenire in modo incontrollato, provocando un'esplosione nucleare, o controllato, cercando di regolare il numero di neutroni prodotti.

8.1 Instabilità per deformazioni

Studiamo adesso che cosa avviene nel processo di fissione dal punto di vista del “liquid drop model”. Riferiamoci alla formula semiempirica di massa (2.10). Quando il nucleo comincia a deformarsi a partire dalla forma sferica, ci sarà un guadagno in energia di Coulomb, in quanto i protoni saranno in media più distanti, e un costo in energia di superficie, che aumenterà. Per schematizzare consideriamo lo stadio in cui il nucleo è deformato come un ellissoide di rotazione, in cui l'unico parametro di deformazione, nello sviluppo in multipoli è a_{20} , che avevamo anche chiamato β , e che discriminava con il suo segno la forma di ellissoide prolato e oblato. L'equazione della superficie è in questo caso

$$R(\theta, \phi) = R_0 [1 + \beta Y_{20}(\theta, \phi)], \quad Y_{20}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1). \quad (8.3)$$

Abbiamo quindi un ellissoide con semiassi,

$$a = R_0(1 + \epsilon), \quad b = R_0(1 + \epsilon)^{-1/2}, \quad \text{con } \epsilon = 2\beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}}, \quad (8.4)$$

in modo che il volume resti uguale a quello di partenza ($ab^2 = R_0^3$). Abbiamo già calcolato la variazione dell'energia di Coulomb e dell'energia di superficie per la goccia deformata nel capitolo 2, per coefficienti di deformazione arbitrari. Basterà considerare il caso particolare in cui l'unico parametro di deformazione presente sia β (legato ad ϵ). Le formule utili sono l'Eq. (2.51), che diventa in questo caso

$$E_S(\epsilon) = E_S(0) + \frac{1}{2}R_0^2\sigma 4\beta^2 = 4\pi R_0^2\sigma \left(1 + \frac{2}{5}\epsilon^2\right), \quad (8.5)$$

e l'Eq. (2.57), che diventa,

$$E_C(\epsilon) = E_C(0) = \frac{1}{4\pi} \frac{(Ze)^2 6}{R_0} \beta^2 = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{R_0} \left(1 - \frac{1}{5}\epsilon^2\right). \quad (8.6)$$

Avevamo definito i termini di energia di superficie e di Coulomb nella formula semiempirica di massa,

$$B(Z, A) = a_S A^{2/3} + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} + \dots \quad (8.7)$$

Entrambi i termini diminuiscono l'energia di legame e sono quindi negativi,

$$a_S = -\sigma 4\pi r_0^2 \sim -16.8 \text{MeV}, \quad a_C = -\frac{3e^2}{5r_0} \sim -0.72 \text{MeV}. \quad (8.8)$$

La differenza di energia di legame tra il nucleo deformato e il nucleo sferico è quindi

$$\begin{aligned} \Delta E &= B(\epsilon) - B(0) = a_S A^{2/3} \left(1 + \frac{2}{5}\epsilon^2\right) + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 - \frac{1}{5}\epsilon^2\right) \\ &= \left(\frac{2}{5}a_S A^{2/3} - \frac{1}{5}a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}}\right) \epsilon^2, \end{aligned} \quad (8.9)$$

da cui risulta evidente la competizione tra i due termini. Abbiamo un'instabilità per deformazioni se $\Delta E > 0$, cioè se il nucleo aumenta la sua energia di legame nella situazione deformata,

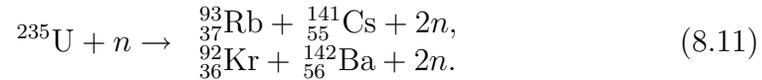
$$\Delta E > 0 \implies \frac{2}{5}a_S A^{2/3} > \frac{1}{5}a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \implies \frac{Z^2}{A} > 2 \frac{|a_S|}{|a_C|} \sim 47. \quad (8.10)$$

In questo caso è favorita la situazione in cui il nucleo è sempre più deformato, e quindi può innescarsi il processo di fissione spontanea. Ovviamente il nostro

calcolo è solo indicativo, in quanto l'espansione per piccoli coefficienti di deformazione che abbiamo usato è adatta a descrivere solo il processo iniziale in cui la deformazione è piccola. Sta di fatto che il parametro Z^2/A sembra essere un indicatore, seppur grossolano, della possibilità per un nucleo di fissionarsi spontaneamente: la vita media per fissione spontanea decresce al crescere di Z^2/A ed estrapolando i dati sperimentali si arriva a vite medie di circa 10^{-20} s (cioè una vita media istantanea sulle scale temporali nucleari) per $Z^2/A \sim 47$. Un nucleo con $Z^2/A = 48$ e $Z/A \sim 0.4$ corrisponde a $A \sim 300$, in accordo con la stima già anticipata del limite di instabilità per fissione spontanea.

8.2 Distribuzione di massa

Consideriamo una tipica reazione di fissione indotta, di ^{235}U , di cui due tipici stati finali includono nuclei di Rubidio e Cesio o Krypton e Bario,



I canali di decadimento sono moltissimi. Un grafico della probabilità di decadimento in funzione del numero di massa mostra come già anticipato che i frammenti non sono simmetrici. La distribuzione presenta due gobbe molto pronunciate, cfr. Fig. 8.1. È ovviamente simmetrica rispetto a un asse, perché la somma delle masse dei frammenti deve uguagliare la massa del nucleo che fissiona, a meno dei neutroni “prompt”. In questo caso particolare i picchi della distribuzione di probabilità sono in corrispondenza di $A = 95$ e $A = 140$. Le isobare stabili corrispondenti a questi numeri di massa hanno $Z = 42$ e $Z = 58$. Ma ci sono solo 92 protoni da spartirsi. I frammenti hanno quindi un eccesso di neutroni. Come già detto i neutroni “prompt” smaltiscono una parte di questo eccesso. Il numero medio di neutroni “prompt” è chiamato in genere ν . È caratteristico di ogni processo di fissione. Ad esempio per Uranio e Plutonio,

$$\nu = 2.48(^{233}\text{U}), \quad \nu = 2.42(^{235}\text{U}), \quad \nu = 2.86(^{239}\text{Pu}). \quad (8.12)$$

I restanti neutroni in eccesso sono smaltiti in processi di decadimento β dei prodotti di fissione. Nel nostro esempio la catena di decadimenti β è la

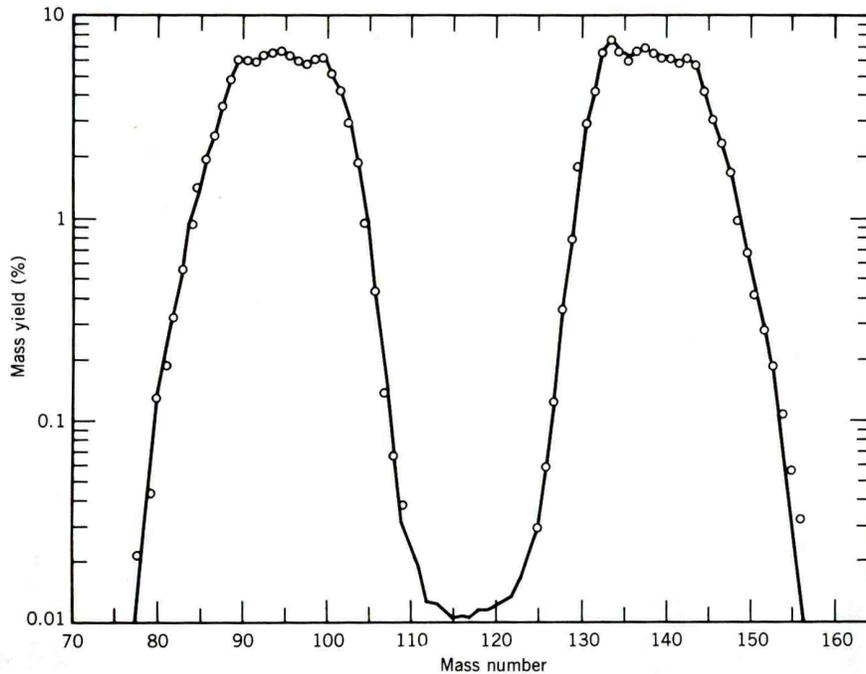
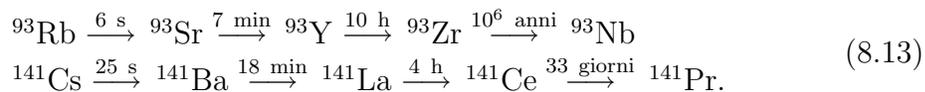


Figura 8.1: Distribuzione di massa dei frammenti di fissione dalla fissione del nucleo ^{235}U . Si può notare la proprietà di simmetria della distribuzione dei frammenti pesanti e leggeri, richiamata nel testo. (Da Ref. [4]).

seguinte,



Quello che succede è che a volte il decadimento β (soprattutto lontano dall'isobara stabile) lascia il nucleo in uno stato altamente eccitato, con energia maggiore dell'energia di separazione del neutrone, che quindi decade immediatamente. Le scale di tempo sono quindi quelle dei decadimenti β , dell'ordine di qualche secondo. Questi neutroni sono cruciali per il controllo delle reazioni a catena, perché possono essere stoppati da un qualche meccanismo di trigger.

Notiamo infine che, nonostante la fissione nucleare sia trattata essenzialmente come un fenomeno collettivo del nucleo, si possono tuttavia individuare degli effetti di singola particella (effetti di shell), in particolare nella

distribuzione di massa dei frammenti di fissione. Come detto la distribuzione è asimmetrica, con un frammento più pesante e un altro più leggero. Con l'aumentare del numero di massa del nucleo che fissiona succede che la gobba dei frammenti leggeri si sposta attorno a valori più grandi del numero di massa, mentre la gobba dei frammenti pesanti rimane pressoché invariata. Il motivo di questo comportamento è che la gobba dei frammenti pesanti include nuclei con shell di neutroni e di protoni completi, in particolare il nucleo doppio magico di Stagno, ${}_{50}^{132}\text{Sn}_{82}$, mentre non sono presenti configurazioni del genere nella gobba dei frammenti leggeri.

8.3 Energia di attivazione

L'energia di attivazione è l'energia necessaria per superare la barriera di Coulomb. Vediamo più in dettaglio come si definisce. Abbiamo visto che per $Z^2/A > 47$ la somma dell'energia di Coulomb e dell'energia superficiale diminuisce all'aumentare della deformazione, e il nucleo quindi si deforma sempre di più fino alla completa fissione. Se invece $Z^2/A < 47$ l'energia aumenta all'aumentare della deformazione, finché i due frammenti non sono completamente separati e l'energia diminuisce all'aumentare della separazione per effetto della repulsione Coulombiana. La differenza tra il massimo dell'energia durante il processo di separazione e l'energia iniziale (a separazione zero) è l'energia di attivazione. L'energia di attivazione al variare di (Z, A) può essere calcolata numericamente nel "liquid drop model" scegliendo delle opportune variabili che descrivano la goccia durante il processo di fissione. La curva dell'energia di attivazione in funzione del numero di massa A per le isobare stabili è mostrata in Fig. 8.2. Essa presenta un massimo attorno a $N = 50$ pari a circa 55 MeV per poi decrescere per A più grandi, fino ad annullarsi, come abbiamo visto, per $A \sim 300$. Per il nucleo ${}^{236}\text{U}$ l'energia di attivazione è pari a 6.2 MeV, che è circa pari all'energia di legame dell'ultimo neutrone: il sistema ${}^{235}\text{U}+n$ forma un "compound" ${}^{236}\text{U}^*$ con energia di eccitazione

$$E_X = m({}^{236}\text{U}^*) - m({}^{236}\text{U}) = m({}^{235}\text{U}) + m_n - m({}^{236}\text{U}) \sim 6.5 \text{ MeV}, \quad (8.14)$$

supponendo che i neutroni siano termici (quindi con energie pari a frazioni di eV). Essendo questa energia maggiore dell'energia di attivazione il nucleo si fissiona. Quindi il nucleo ${}^{235}\text{U}$ può essere fissionato con neutroni termici. Un calcolo simile per il caso ${}^{238}\text{U}+n \rightarrow {}^{239}\text{U}^*$ dà $E_X = 4.8 \text{ MeV}$, ben più

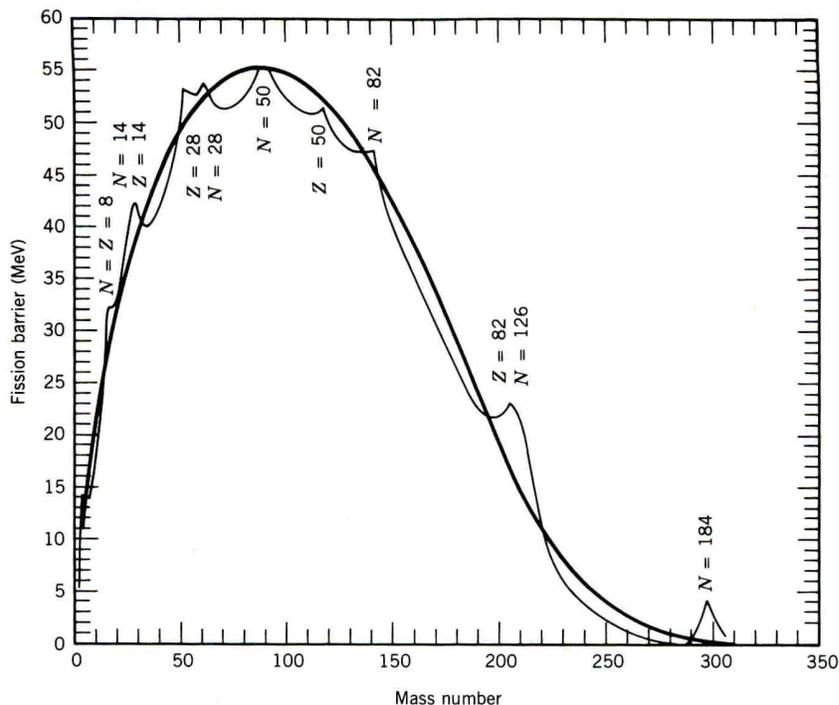


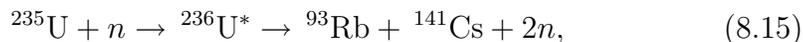
Figura 8.2: Energia di attivazione per la fissione nucleare delle isobare stabili in funzione del numero di massa, calcolata numericamente in base al liquid drop model. È mostrato anche il risultato di un calcolo che tiene conto della struttura in shell. (Da Ref. [4]).

piccola dell'energia di attivazione calcolata per il nucleo ^{239}U , pari a circa 6.6 MeV. Quindi per fissionare il nucleo ^{238}U non bastano neutroni termici, ma servono neutroni con energia dell'ordine dei MeV. La principale differenza tra le due situazioni è attribuibile all'energia di eccitazione E_X , pari nel primo caso a 6.5 MeV e nel secondo caso a 4.8 MeV. La responsabile di questa differenza è l'energia di pairing: il termine di pairing influenza le energie di legame dei nuclei con numero di massa pari; per i nuclei pari-pari aumenta l'energia di legame, per i nuclei dispari-dispari la diminuisce della stessa quantità δ . Se consideriamo il primo caso, ^{235}U non è influenzato dal termine di pairing, e così quindi anche il "compound" $^{236}\text{U}^*$. Lo stato fondamentale del nucleo ^{236}U invece è influenzato dal pairing, e la sua energia sarà diminuita della quantità δ . La differenza di energia tra i due stati, che è l'energia di eccitazione E_X è quindi aumentata dal termine di pairing della

quantità δ . Nel secondo caso invece si parte dal nucleo ^{238}U , che è influenzato dal pairing, con energia diminuita della quantità δ . Così sarà quindi anche per il compound $^{239}\text{U}^*$, mentre lo stato fondamentale del nucleo ^{239}U non è influenzato dal pairing. La differenza di energia tra questi due stati è quindi questa volta diminuita della quantità δ . Ecco spiegata la differenza in energia di eccitazione tra i due casi: a causa del pairing ogni nucleo N -dispari conduce a una configurazione più stabile catturando un neutrone, quindi avrà un'energia di eccitazione più grande e fissiona più facilmente con neutroni termici. Per i nuclei con N -pari vale invece il discorso opposto. Questo è confermato dalla tabella che mostra la sezione d'urto per fissione indotta da neutroni termici di diversi nuclei.

nucleo	$\sigma(b)$
$^{231}_{92}\text{U}$	300 ± 300
$^{234}_{92}\text{U}$	< 0.005
$^{235}_{92}\text{U}$	584 ± 1
$^{238}_{92}\text{U}$	$2.7 \cdot 10^{-6}$
$^{234}_{93}\text{Np}$	1000 ± 400
$^{236}_{93}\text{Np}$	3000 ± 600
$^{237}_{93}\text{Np}$	0.020 ± 0.005

Consideriamo ancora la reazione



che ha un valore $Q = 181$ MeV. Altri stati finali possibili danno circa lo stesso risultato, ed è ragionevole prendere come ordine di grandezza $Q = 200$ MeV. La repulsione Coulombiana trasforma questa energia disponibile in energia cinetica dei frammenti. La distribuzione dell'energia dei frammenti mostra ancora due gobbe, cfr. Fig. 8.3, una centrata attorno a 61.4 MeV e l'altra attorno a 93.1 MeV. Ignorando i neutroni "prompt", imponendo la conservazione della quantità di moto dei due frammenti otteniamo per il rapporto delle energie cinetiche $T_{1,2}$ dei due frammenti, di massa $m_{1,2}$, $T_1/T_2 = m_2/m_1$, in buon accordo con i numeri trovati dalla distribuzione delle masse dei due frammenti. La maggior parte dell'energia di fissione appare come energia cinetica dei frammenti. La restante energia è trasportata dai neutroni "prompt" (si ha $\nu \sim 2.5$ e ogni neutrone "prompt" è emesso con una energia media di 2 MeV, cfr. Fig. 8.4), o dai fotoni "prompt" (circa 8 MeV).

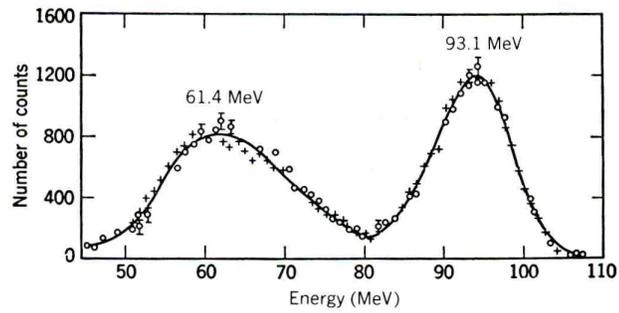


Figura 8.3: Distribuzione in energia dei frammenti della fissione di ^{235}U . (Da Ref. [4]).

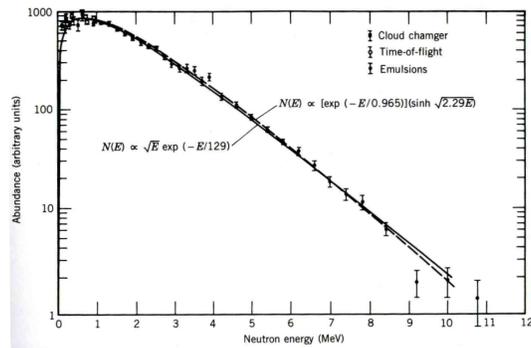


Figura 8.4: Spettro di energia dei neutroni emessi nella fissione di ^{235}U . (Da Ref. [4]).

Altre forme di emissione di energia sono rappresentate dai decadimenti β (circa 19 MeV) e dai decadimenti γ (circa 7 MeV) dei frammenti radioattivi.

Capitolo 9

Interazione radiazione-materia

Quando un fascio di particelle principalmente cariche attraversa la materia, eccita o ionizza gli atomi che la compongono. L'interazione tra le particelle del fascio e gli atomi del materiale è dovuta alla forza Coulombiana, mentre le collisioni con i nuclei sono pressoché trascurabili. Si presentano queste possibilità: *i*) se la distanza di minimo approccio è grande rispetto alle distanze atomiche, allora l'atomo si comporta come sistema unico al passaggio del fascio. Il risultato è l'eccitazione o la ionizzazione dell'atomo. Queste collisioni si chiamano *morbide*. *ii*) Se la distanza di minimo avvicinamento è dell'ordine delle distanze atomiche, allora avviene un urto tra la particella carica incidente e un elettrone dell'atomo. Il risultato è l'emissione di un elettrone atomico con energie che possono risultare elevate. Queste si chiamano *collisioni dure*. *iii*) Quando l'energia del fascio incidente è abbastanza grande, la distanza di minimo avvicinamento è minore delle distanze atomiche e quindi c'è una deviazione della particella incidente dovuta al campo elettrico del nucleo. Ci sono forti accelerazioni e quindi processi di radiazione (bremstrahlung).

9.1 Analisi cinematica del processo d'urto (collisioni dure)

Consideriamo una particella carica di massa M e quantità di moto \mathbf{p} che urta un elettrone inizialmente in quiete. L'energia E' con la quale emerge l'elettrone è legata all'energia iniziale E ($E = \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2} + m_e c^2$) e all'angolo θ tra la traiettoria finale dell'elettrone e la direzione di propagazione della

particella carica dalla seguente relazione

$$E' = \frac{m_e c^2 (E^2 + p^2 c^2 \cos^2 \theta)}{E^2 - p^2 c^2 \cos^2 \theta}. \quad (9.1)$$

Quindi l'energia cinetica massima trasferita all'elettrone è

$$T'_{\max} = 2m_e \frac{p^2}{M^2 + m_e^2 + 2m_e \sqrt{M^2 + p^2/c^2}} \quad (9.2)$$

in corrispondenza di $\theta = 0$, e si ha sempre

$$0 \leq T' \leq T'_{\max}. \quad (9.3)$$

Per le particelle pesanti $M \gg m_e$ distinguiamo due casi.

- Per alte energie,

$$\frac{p}{c} \gg \frac{M^2}{m_e} \implies T'_{\max} = pc \simeq T, \quad (9.4)$$

cioè la particella pesante si ferma in una collisione frontale.

- Per basse energie,

$$\frac{p}{c} \ll \frac{M^2}{m_e} \implies T'_{\max} = 4 \frac{m_e}{M} T, \quad (9.5)$$

che è il risultato classico non relativistico.

Da notare che la scala M^2/m_e può essere molto grande: è pari a 2 TeV per i protoni, e 20 GeV per i pioni.

Nel caso che la particella sia un positrone, abbiamo

$$M = m_e \implies T'_{\max} = T, \quad (9.6)$$

mentre se si tratta di un elettrone, come è il caso ad esempio per gli elettroni prodotti da una collisione precedente (chiamati “raggi δ ”), il principio di Pauli richiede

$$\text{elettrone su elettrone} \implies T'_{\max} = T/2, \quad (9.7)$$

in quanto elettrone incidente e elettrone urtato sono indistinguibili, e si stabilisce che l'elettrone urtato sia quello che emerge con energia minore.

9.2 Potere frenante per le particelle cariche pesanti

Consideriamo quindi una particella di carica ze e massa M che urta un elettrone di un atomo, supposto libero e inizialmente in quiete. Supponiamo anche che la traiettoria della particella sia rettilinea, cioè che l'impulso trasferito sia molto più piccolo dell'impulso totale e che l'elettrone non si muova durante l'urto. Detto b il parametro d'impatto dell'urto, e θ l'angolo che istante per istante vi è tra la traiettoria della particella e il vettore posizione dell'elettrone rispetto alla particella, l'impulso totale trasferito all'elettrone è diretto perpendicolarmente alla traiettoria della particella nel piano individuato da questa traiettoria e la posizione dell'elettrone, ed ha per modulo, se v è il modulo della velocità della particella,

$$\Delta P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^2}{b^2} \sin^3 \theta dt = \int_0^\pi \frac{ze^2}{bv} \sin \theta d\theta = 2 \frac{ze^2}{bv}, \quad (9.8)$$

e quindi l'energia cinetica trasferita all'elettrone è

$$T_e(b) = \frac{(\Delta P)^2}{2m_e} = 2 \frac{z^2 e^4}{b^2 v^2 m_e}. \quad (9.9)$$

Più gli urti sono "stretti" (piccolo parametro di impatto) più è alta l'energia trasferita. Poiché come abbiamo visto esiste un T'_{\max} ne segue che deve esistere un b_{\min} , al di sotto del quale la nostra schematizzazione non ha ovviamente più senso. Dall'espressione (9.2), trascurando termini $O(m_e/M)^2$, e nel limite $\gamma \ll M/m_e$, abbiamo,

$$T'_{\max} = 2m_e \gamma^2 v^2 \implies b_{\min} = \frac{ze}{m\gamma v^2}. \quad (9.10)$$

Nell'altro limite estremo di grandi b il nostro calcolo non si applica a causa del legame degli elettroni atomici: abbiamo supposto che essi fossero liberi, ma in realtà non lo sono. Se il tempo dell'urto è piccolo rispetto ai periodi tipici del moto orbitale degli elettroni allora possiamo considerare l'elettrone libero, altrimenti durante l'urto l'elettrone compie diverse orbite e possiamo supporre che assorba e ceda energia adiabaticamente durante il passaggio della particella. Bisogna quindi confrontare la durata media dell'urto Δt con l'inverso della frequenza tipica ω dell'elettrone nell'atomo, e imporre

$\Delta t \ll 1/\omega$. Il tempo caratteristico dell'urto è

$$\Delta t \simeq \frac{b}{\gamma v}. \quad (9.11)$$

Della presenza del fattore di dilatazione temporale γ ci si può convincere considerando l'andamento del campo prodotto dalla carica in moto rettilineo in un punto a distanza b dalla traiettoria: il campo dipende dalla distanza della carica dal punto, che vale, con opportuna scelta dell'origine dei tempi, $r' = \sqrt{b^2 + (vt')^2}$, dove t' è il tempo misurato nel sistema di riferimento della carica in moto (anche b è il parametro d'impatto misurato nello stesso riferimento, ma sappiamo che le distanze trasverse sono invarianti). Esso è legato al tempo misurato nel sistema di riferimento dell'elettrone dalla relazione $t' = \gamma t$, e quindi si vede che la scala temporale del fenomeno è governata da $b/\gamma v$. Quindi il massimo parametro d'impatto b_{\max} oltre il quale non si ha più un efficace trasferimento di energia all'elettrone è determinato da

$$\Delta t \simeq \frac{b}{\gamma v} \ll 1/\omega \quad \Longrightarrow \quad b_{\max} = \frac{\gamma v}{\omega}. \quad (9.12)$$

La nostra formula (9.9) descrive l'energia trasferita per $b_{\min} < b < b_{\max}$.

Una particella veloce che attraversa un volume pieno di materia vede elettroni a varie distanze dalla sua traiettoria. Se ci sono N atomi per unità di volume, ognuno con Z elettroni, il numero $dn(b)$ di elettroni con parametro d'urto compreso tra b e $b + db$ è

$$dn(b) = NZ2\pi b db dx, \quad (9.13)$$

dove x è la distanza di avanzamento dentro il materiale. Quindi la perdita di energia dT della particella lungo il suo cammino, anche chiamata "potenza di frenata" (stopping power), sarà

$$\frac{dT}{dx} = -2\pi NZ \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} T_e(b) b db = -4\pi NZ \frac{z^2 e^4}{m_e v^2} \log \frac{\gamma^2 m_e v^3}{ze^2 \omega}, \quad (9.14)$$

che è l'espressione classica di Bohr. L'incertezza sui limiti di integrazione entra in gioco solo logicamente e quindi ha poca influenza.

La potenza di frenata è legata alla cosiddetta "sezione d'urto di frenata", σ , dalla relazione

$$-\frac{dT}{dx} = N\sigma. \quad (9.15)$$

L'espressione (9.14) è corretta per le particelle relativamente lente, ma per le particelle più veloci diventano importanti gli effetti quantistici. Possiamo individuare due motivi per i quali la nostra modellizzazione può risultare inadeguata: *i*) il fatto che i trasferimenti di energia sono discreti e *ii*) il principio di indeterminazione. In effetti, se calcoliamo il trasferimento di energia in corrispondenza del nostro b_{\max} , lo possiamo esprimere come

$$\Delta E(b_{\max}) = \frac{1}{\gamma^2} z^2 \left(\frac{v_0}{v} \right)^4 \hbar \omega \left(\frac{\hbar \omega}{I_H} \right), \quad (9.16)$$

con

$$v_0 = \alpha c, \quad I_H = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = 13.6 \text{ eV}. \quad (9.17)$$

Vediamo quindi che se $v \gg v_0$ l'energia trasferita dovrebbe essere molto più piccola di I_H , il che è impossibile dal punto di vista quantistico. Tuttavia questo non vuol dire che il b_{\max} sia minore: possiamo recuperare il risultato classico in senso statistico. È vero che in ogni urto viene sempre ceduta una quantità minima di energia, ma se consideriamo un grande numero di urti, nella maggior parte di essi non viene ceduta nessuna energia, e in alcuni si ha una eccitazione, in modo che in media la quantità di energia ceduta sia più piccola del quanto elementare. Un limite più serio del modello classico adottato viene invece dal principio di indeterminazione, in base al quale non esiste una traiettoria ben definita di una particella. Il meglio che possiamo fare è produrre un pacchetto localizzato nello spazio con una certa dimensione. Se il pacchetto viaggia con impulso p l'indeterminazione longitudinale (cioè la "lunghezza" del pacchetto) sarà

$$\Delta x \simeq \hbar/p. \quad (9.18)$$

Per valori del parametro d'impatto più piccoli di questa lunghezza il trasferimento di energie non è più così efficace. Quindi il valore (9.18) assume il ruolo di b_{\min} . Nell'urto di due particelle entrambe vanno considerate come pacchetti d'onda. Il vincolo più stringente è quello posto dall'indeterminazione della particella più leggera (cioè l'elettrone), che avrà una dispersione spaziale più grande. Quindi il minimo parametro d'impatto "quantistico", $b_{\min}^{(q)}$ è dato da

$$b_{\min}^{(q)} \simeq \frac{\hbar}{m_e \gamma v}. \quad (9.19)$$

In ogni situazione bisogna scegliere il più grande tra i valori (9.10) e (9.19). Si definisce il rapporto tra i due valori, classico e quantistico,

$$\eta = \frac{ze^2}{\hbar v}, \quad (9.20)$$

cosicché si può scrivere

$$\frac{b_{\max}}{b_{\min}} = \frac{b_{\max}}{\eta b_{\min}^{(q)}}, \quad (9.21)$$

intendendo che se $\eta < 1$ è il caso in cui le correzioni quantistiche sono importanti, e quindi si prende nella formula $\eta = 1$. La formula della perdita di energia a cui arriviamo è quasi uguale alla formula di Bethe-Bloch, basata sulla meccanica quantistica,

$$\frac{dT}{dx} = -4\pi NZ \frac{z^2 e^4}{m_e v^2} \left[\log \frac{2\gamma^2 m_e v^2}{I} - \frac{v^2}{c^2} \right]. \quad (9.22)$$

In questa formula I rappresenta una media del potenziale di ionizzazione (corrispondente a $\hbar\omega$ nel nostro calcolo), difficilmente calcolabile e che quindi viene in genere considerato come un parametro aggiustabile. Per materiali con piccoli Z è indipendente da T , l'energia della particella incidente, purché $T \gg I$. Per materiali con alto Z dipende leggermente dall'energia, perché solo le particelle con energia più alta possono eccitare gli elettroni interni. Nella tabella si riportano i valori di I corrispondenti a particelle incidenti di bassa energia ($T < 100$ MeV) misurati per diversi materiali, solidi e gassosi, e anche la quantità I/Z , che risulta essere abbastanza costante per $Z > 13$. Questa circostanza si usa per estrapolare i valori di I per altri materiali. In Fig. 9.1 è riportato l'andamento del potere frenante per i protoni in diversi materiali.

Come si vede dalla formula, la potenza di frenata non dipende dalla massa della particella incidente, ma solo dalla sua velocità e dalla sua carica. Quindi se si misura la sezione d'urto di frenata in un certo materiale per i protoni per esempio, si può ricavare la stessa quantità per qualsiasi altra particella carica con la stessa velocità moltiplicando per z^2 la sezione d'urto di frenata per i protoni. Notiamo comunque che la formula di Bethe-Bloch è chiaramente irrealistica per velocità molto piccole (per le quali il logaritmo diventerebbe negativo). A piccole velocità insorgono fenomeni di scambio di carica tra la particella incidente e gli atomi del materiale, che ne riducono la carica effettiva.

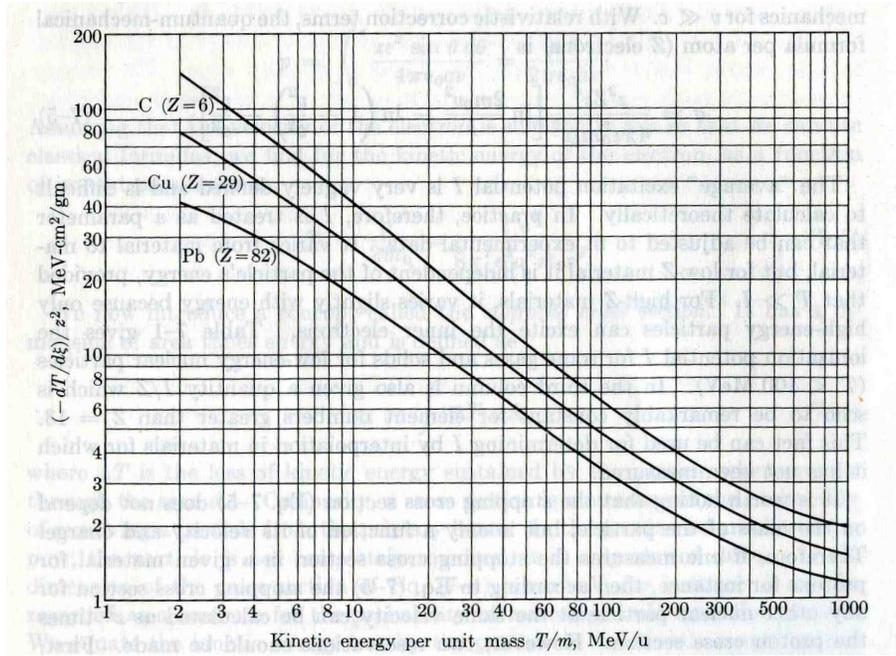


Figura 9.1: Potere frenante per i protoni in Carbonio, Rame e Piombo. (Da Ref. [2]).

La distanza percorsa da una particella carica in un dato materiale prima di fermarsi, detta “range” e indicata con R è data da

$$R = \int_T^0 dx = \int_T^0 \frac{-dT}{(-dT/dx)}. \quad (9.23)$$

In generale l’integrale non si può calcolare, perché a basse velocità la formula di Bethe-Bloch non è più applicabile, ma si può comunque riferire il range di una particella di una data energia a quello della stessa particella con una certa energia di riferimento,

$$R_2 = R_1 + \int_{T_2}^{T_1} \frac{-dT}{(-dT/dx)}, \quad (9.24)$$

purché l’energia T_1 di riferimento sia abbastanza alta perché la formula di Bethe-Bloch sia applicabile.

Dal punto di vista pratico è più conveniente misurare la distanza x percorsa dentro il materiale in termini di massa per cm². Si usa la variabile ξ ,

materiale	Z	$I(\text{eV})$	$I/Z(\text{eV})$
H ₂	1	19	19
He	2	44	22
Be	4	64	16
Aria	7.2	94	13.1
Al	13	166	12.7
Ar	18	230	12.8
Cu	29	371	12.8
Ag	47	586	12.5
Xe	54	660	12.2
Au	79	1017	12.8
Pb	82	1070	13.1

legata a x da $\xi = \rho x$. La potenza di frenata, in termini di questa variabile diventa,

$$\frac{dT}{d\xi} = -4\pi N_0 \frac{Z}{A} \frac{z^2 e^4}{m_e v^2} \left[\log \frac{2\gamma^2 m_e v^2}{I} - \frac{v^2}{c^2} \right], \quad (9.25)$$

dove N_0 è il numero di Avogadro e A il numero di massa del materiale assorbente. In questo modo vediamo che la potenza di frenata è una funzione quasi universale, che dipende solo da v e da z , in quanto per i diversi materiali il rapporto Z/A è circa costante, e resta solo la dipendenza logaritmica dal tipo di materiale attraverso I . È quindi possibile scrivere delle leggi di scala, che legano le proprietà di una particella di energia T_1 , carica z_1 e massa M_1 alle corrispondenti quantità riferite a una particella 2. Ad esempio,

$$\frac{dT}{dx}(T_2) = \frac{z_2^2}{z_1^2} \frac{dT}{dx}(T_2 \frac{M_1}{M_2}), \quad R_2(T_2) = \frac{M_2}{M_1} \frac{z_1^2}{z_2^2} R_1(T_2 \frac{M_1}{M_2}). \quad (9.26)$$

A piccole energie domina il termine $1/v^2$, la potenza di frenata diminuisce con l'aumentare dell'energia. A grandi energie v^2 diventa praticamente c^2 e la potenza di frenata aumenta con l'aumentare dell'energia grazie alla crescita del fattore γ dentro il logaritmo. Il minimo della potenza di frenata si ha per $\beta \sim 0.96$, in corrispondenza di questo valore si parla di particelle minimamente ionizzanti. La crescita logaritmica per energie crescenti è ridotta dal cosiddetto effetto di densità: il campo elettrico trasverso nel riferimento dell'elettrone acquista un fattore γ , quindi contribuiscono alla perdita di energia anche elettroni a distanza più grande (da qui la crescita logaritmica)

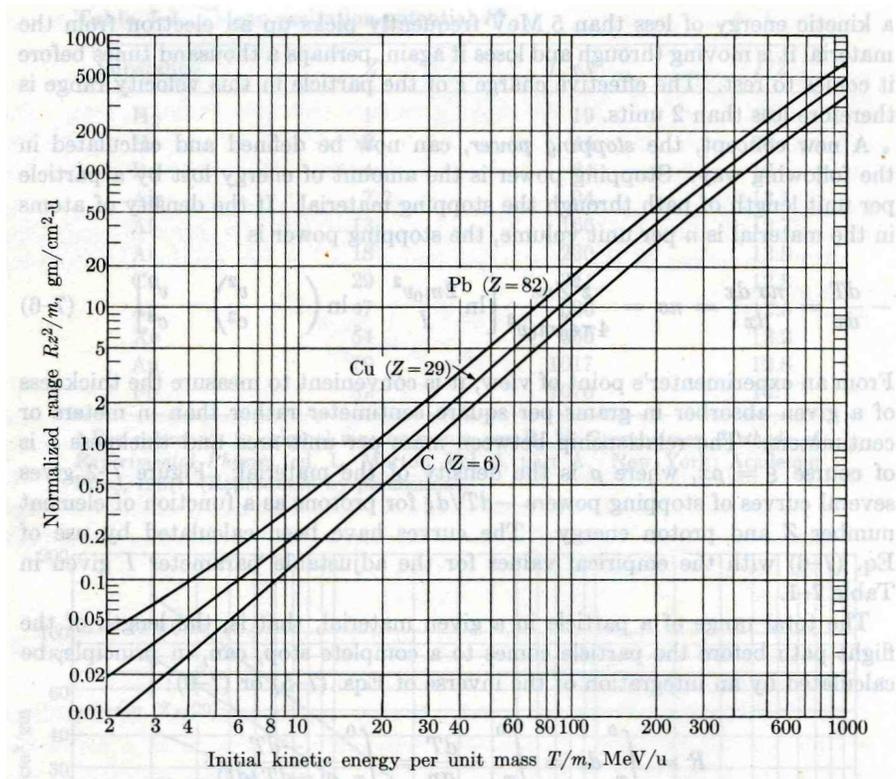


Figura 9.2: Range dei protoni nel Carbonio, Rame e Piombo, misurato in massa per cm^2 , come funzione dell'energia cinetica iniziale. (Da Ref. [2]).

ma a queste grandi distanze gli elettroni saranno schermati dagli atomi del mezzo.

Come già detto, per basse energie la Bethe-Bloch non è più valida e subentrano fenomeni complicati come lo scambio di cariche e la cattura di elettroni. Per energie decrescenti la potenza di frenata raggiunge un massimo e poi va a zero. La cosiddetta curva di Bragg, che riporta la densità di ionizzazione in funzione della distanza percorsa dalla particella carica presenta dunque un picco (picco di Bragg) in prossimità della fine della traccia (l'energia diminuisce con l'aumentare della distanza percorsa) e poi va rapidamente a zero. Questa caratteristica è sfruttata nella terapia adronica, quando si vuole depositare energia in una regione ben delimitata.

9.3 Potere frenante per gli elettroni

Quando il fascio incidente è composto da elettroni bisogna considerare che essi sono molto più leggeri, subiscono molte più deviazioni e entrano in gioco effetti quantistici di scambio. In questo caso la formula di Bethe-Bloch viene leggermente modificata,

$$-\left(\frac{dT}{dx}\right)_c = \frac{2\pi e^4 Z}{m_e v^2} \left[\log \frac{m_e v^2 T}{2I^2(1-\beta^2)} - (2\sqrt{1-\beta^2} - 1 + \beta^2) \log 2 + 1 - \beta^2 + \frac{1}{8}(1 - \sqrt{1-\beta^2})^2 \right]. \quad (9.27)$$

Per energie uguali a quelle di una particella più massiva l'elettrone ha una velocità molto più grande, ed è relativistico. A queste velocità entrano in gioco forti accelerazioni e diventa importante il processo di perdita di energia per radiazione (bremstrahlung). Per energie $T \gg m_e c^2$ è applicabile la formula di Bethe-Heitler

$$-\left(\frac{dT}{dx}\right)_r = \frac{4Ze^6 NT(Z+1.3) [\log(183Z^{-1/3}) + 1/8]}{\hbar m_e^2 c^5}. \quad (9.28)$$

Una caratteristica importante è il fatto che la potenza di frenata è proporzionale all'energia cinetica T . Di conseguenza, nel regime in cui dominano le perdite per radiazione, l'elettrone perde energia esponenzialmente man mano che avanza nel materiale. In termini della variabile di profondità ξ si ha

$$T = T_0 e^{-\xi/\xi_0}, \quad (9.29)$$

con la lunghezza di radiazione ξ_0 data da (M_A è il peso atomico $\sim A$),

$$\xi_0 = \frac{716M_A}{Z(Z+1.3)[\log(183Z^{-1/3}) + 1/8]} \text{g/cm}^2, \quad (9.30)$$

che rappresenta lo spessore di materiale necessario per ridurre l'energia dell'elettrone del fattore $1/e$. Nella tabella vengono riportate le lunghezze di radiazione per diverse sostanze, insieme alla cosiddetta energia critica T_c , definita come l'energia alla quale le perdite per radiazione eguagliano le perdite per collisione.

La curva della potenza di frenata in funzione dell'energia per gli elettroni presenta quindi un minimo oltre il quale la perdita di energia ricresce linearmente, invece che logaritmicamente. Questo è illustrato per alcuni materiali nella Fig. 9.3.

materiale	Z	M_A	ξ_0 (g/cm ²)	T_c (MeV)
Idrogeno	1	1	58	340
Helio	2	4	85	220
Carbonio	6	12	42.5	103
Azoto	7	14	38	87
Ossigeno	8	16	34.2	77
Alluminio	13	27	23.9	47
Argon	18	39.9	19.4	34.5
Ferro	26	55.8	13.8	24
Rame	29	63.6	12.8	21.5
Piombo	82	207.2	5.8	6.9
Aria			36.5	83
Acqua		35.9	93	

9.4 Interazione dei fotoni

I fotoni possono essere diffusi (processi di scattering elastico o anelastico) o assorbiti. Possono interagire con gli atomi del mezzo (scattering di Rayleigh, effetto fotoelettrico), con gli elettroni (effetto Compton) o con il campo del nucleo (produzione di coppie).

A basse energie domina l'interazione con l'intero atomo. Possiamo avere lo scattering di Rayleigh, in cui il fotone incidente su un atomo ne viene assorbito e riemesso con uguale energia ma diversa ampiezza e direzione, con sezione d'urto proporzionale a Z^2 , o l'effetto fotoelettrico, in cui il fotone è assorbito da un atomo del mezzo, che emette un elettrone, con energia $T_e = h\nu - |B_e|$, B_e essendo l'energia di legame dell'elettrone nell'atomo. Semplici considerazioni di conservazione di energia-impulso impongono che questo processo avvenga non su un elettrone libero ma legato in un atomo. L'interazione avviene maggiormente con gli elettroni interni, circa l'80% col guscio K e 15% col guscio L . Dopo l'emissione dell'elettrone il suo vuoto è riempito da elettroni esterni. A questo processo dunque segue l'emissione di un fotone di fluorescenza, o di elettroni Auger. Per basse energie ($h\nu < 0.1$ MeV) la dipendenza della sezione d'urto da Z e l'energia è approssimativamente data da

$$\sigma \sim \frac{Z^4}{(h\nu)^3}, \quad (9.31)$$

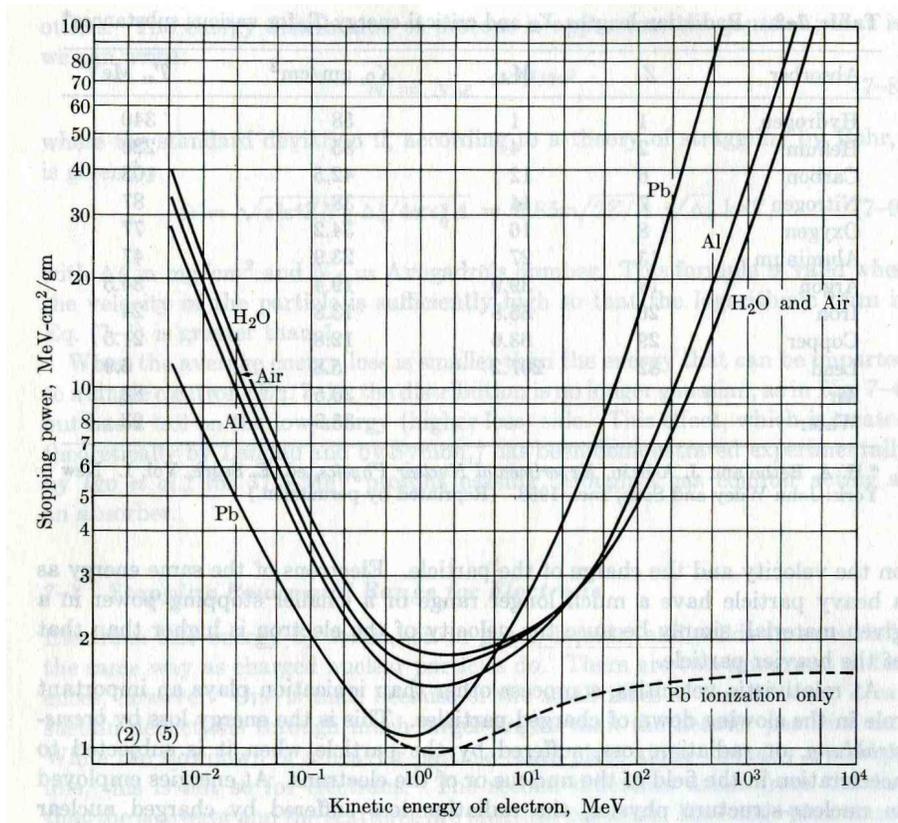


Figura 9.3: Potenza di frenata per gli elettroni nell'aria, acqua, Alluminio e Piombo. Per il Piombo è mostrato anche il singolo contributo della ionizzazione per collisioni. (Da Ref. [2]).

ma si osservano dei picchi in corrispondenza dell'apertura dei canali che coinvolgono gli elettroni dei gusci K , L , M , ecc. Le energie dei diversi gusci elettronici sono date dalla legge di Moseley,

$$E_n = 13.6 \text{ eV} \frac{(Z - \sigma)^2}{n^2}, \quad (9.32)$$

dove σ è una costante che tiene conto dello schermaggio elettronico e vale circa 3 per $n = 1$ (guscio K), circa 5 per $n = 2$ (guscio L), eccetera. Ad esempio, per il Piombo la legge di Moseley prevede che l'energia del guscio K vale circa 85 keV (quando il valore sperimentale è 88 keV), quella del guscio L vale circa 20 keV (valore sperimentale ~ 15 keV), eccetera. Per energie

superiori alla soglia degli elettroni K la sezione d'urto è data dalla formula di Hall,

$$\sigma_{\text{ph K}} = \frac{32\pi\sqrt{2}Z^5}{3(137)^4} \left(\frac{m_e c^2}{h\nu} \right)^{7/2}, \quad (9.33)$$

valida per energie comunque molto più piccole dell'energia di riposo dell'elettrone. Ad energie più alte la dipendenza in energia è meno pronunciata, e l'esponente diminuisce fino a 1 ad energie molto grandi.

Nell'effetto Compton invece l'interazione avviene con gli elettroni esterni, che possono essere considerati come quasi liberi ($|B_e| \ll h\nu$). Il fotone non è assorbito ma viene diffuso. Da semplici considerazioni cinematiche la variazione di energia del fotone (uguale all'energia cinetica finale dell'elettrone) è legata all'angolo di diffusione dalla relazione

$$c\Delta k = k \frac{\alpha(1 - \cos\theta)}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)}, \quad \text{con } \alpha = \frac{k}{m_e c}, \quad (9.34)$$

dove k è l'impulso iniziale del fotone. Per $\theta = 0$ si ha trasferimento di energia nullo e l'impulso finale del fotone è invariato, $k' = k$; per $\theta = \pi/2$ si ha $k' = k/(1 + \alpha)$; per $\theta = \pi$ si ha il trasferimento di energia massimo, $c\Delta k = 2\alpha k/(1 + 2\alpha)$ e $k' = k/(1 + 2\alpha)$. Questo valore viene chiamato "spalla Compton". La sezione d'urto per la diffusione Compton è stata calcolata da Klein e Nishina,

$$\sigma_c = \pi \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \left\{ \left[1 - \frac{2(\varepsilon + 1)}{\varepsilon^2} \right] \log(2\varepsilon + 1) + \frac{1}{2} + \frac{4}{\varepsilon} - \frac{1}{2(2\varepsilon + 1)^2} \right\}, \quad (9.35)$$

con $\varepsilon = h\nu/(m_e c^2)$. La sezione d'urto totale per atomo è $Z\sigma_c$.

L'ultimo dei tre processi importanti di assorbimento di fotoni è la produzione di coppie elettrone positrone $\gamma \rightarrow e^+e^-$. Questo processo deve avvenire con la partecipazione di una particella del mezzo, poiché altrimenti non ci sarebbe conservazione di momento ed energia, come è evidente mettendosi nel sistema di riferimento del centro di massa dell'elettrone e del positrone emessi. È invece possibile in presenza di una particella (elettrone o nucleo). Detto p il momento del fotone incidente ($E_\gamma = cp$), M la massa della particella, possiamo determinare l'energia di soglia, cioè l'energia minima per produrre la reazione. In corrispondenza di questa energia minima le tre particelle uscenti si muovono insieme con impulso totale p . Imponendo la conservazione dell'energia abbiamo

$$E = E_\gamma + Mc^2 = \sqrt{(M^*c^2)^2 + c^2p^2}. \quad (9.36)$$

Nel caso in cui partecipi un elettrone, $M = m_e$ e $M^* = 3m_e$, quindi l'energia di soglia è $E_\gamma^{\text{soglia}} = 4m_e c^2 \sim 2.04$ MeV. Nel caso invece in cui partecipi l'intero nucleo, di massa molto maggiore di quella dell'elettrone $E_\gamma^{\text{soglia}} = 2m_e c^2 \sim 1.02$ MeV. La sezione d'urto per la produzione nel campo dell'elettrone è proporzionale a Z , mentre per il nucleo è proporzionale a Z^2 , che costituisce quindi il contributo principale a questo processo. A energie intermedie $2m_e c^2 < h\nu < 137m_e c^2 Z^{-1/3}$, la sezione d'urto per produzione di coppie nel campo del nucleo è

$$\frac{Z^2 e^4}{137m_e^2 c^4} \left(\frac{28}{9} \log \frac{2h\nu}{m_e c^2} - \frac{218}{27} \right), \quad (9.37)$$

mentre per energie più grandi tende a una costante.

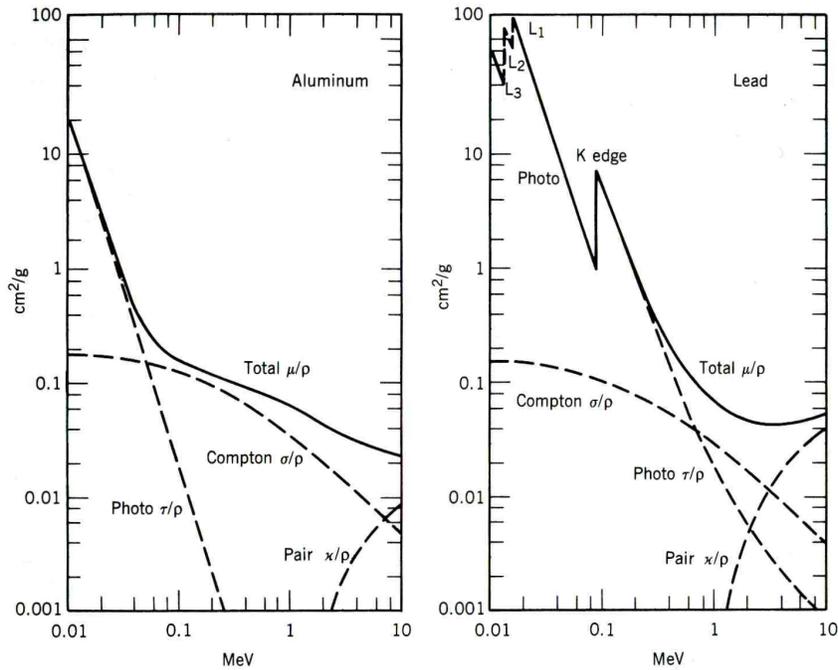


Figura 9.4: Coefficiente di assorbimento di massa corrispondente dovuto all'effetto fotoelettrico, Compton, e produzione di coppie in Alluminio e Piombo. (Da Ref. [4]).

Quando un fascio di fotoni attraversa un materiale il numero di fotoni

segue quindi un andamento esponenziale,

$$N(x) = N_0 e^{-\mu x}, \quad (9.38)$$

dove μ prende il nome di coefficiente di attenuazione lineare, ed è dato da

$$\mu = n(\sigma_{\text{ph}} + \sigma_{\text{R}} + \sigma_{\text{Compton}} + \sigma_{\text{coppie}}), \quad (9.39)$$

dove n è la densità di atomi presenti nel materiale. Se si misura lo spessore con la variabile ξ , (massa per unità di superficie), si ha allora

$$N(\xi) = N_0 e^{-\mu_m \xi}, \quad (9.40)$$

con il coefficiente di assorbimento di massa μ_m dato da

$$\mu_m = \frac{\mu}{\rho} = \frac{N_A \sigma}{M_A}. \quad (9.41)$$

Il contributi dei diversi processi all'attenuazione dei fotoni è illustrato in Fig. 9.4. Si definisce analogamente anche il coefficiente di trasferimento di energia cinetica μ_K e il coefficiente di trasferimento di energia μ_{en} . Questi coefficienti sono riconosciuti dall'ICRU (International Commission of Radiological Units) e per ogni elemento sono stati calcolati in funzione dell'energia, tabulati e pubblicati.

Capitolo 10

Interazione dei neutroni con la materia

I neutroni possono essere emessi in diversi modi tramite reazioni nucleari. A seconda dell'energia con la quale vengono emessi si classificano come *i*) neutroni termici, di energia $E \sim 0.025$ eV, *ii*) neutroni epitermici, di energia dell'ordine di $E \sim$ eV, *iii*) neutroni lenti, di energia dell'ordine di $E \sim$ keV, e *iv*) neutroni veloci di energie $E \sim 100$ keV–10 MeV.

Tipiche reazioni per produzione di neutroni sono:

- sorgente α -Be,



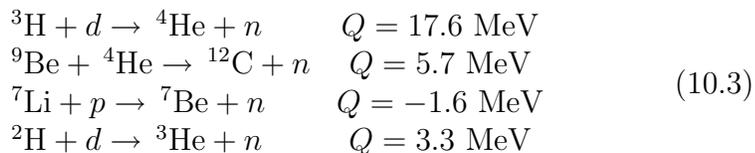
con $Q = 5.7$ MeV. Le particelle α vengono prodotte da una sorgente radioattiva posta vicina al campione di Berillio;

- fotoproduzione,



con il fotone prodotto dal decadimento del Sodio ${}^{29}\text{Na}$ ($E_\gamma = 2.76$ MeV), il neutrone viene emesso con energia $E \sim 0.8$ MeV;

- fissione spontanea;
- reazioni nucleari, come



- reattori nucleari: all'interno dei reattori c'è un flusso di neutroni con picchi intorno a 1-2 MeV (ma possono arrivare anche a 5-7 MeV). Si può estrarre da lì un fascio di neutroni per produrre reazioni, radioisotopi, ecc.

10.1 Moderazione di neutroni

Quando un fascio di neutroni attraversa un materiale, perde energia per processi elastici o anelastici. Per neutroni veloci l'evento di scattering è più probabile. Per neutroni termici prevale invece la cattura. La relazione per la diminuzione di intensità di neutroni monoenergetici è

$$I = I_0 e^{-\sigma_{\text{tot}} n x}, \quad (10.4)$$

dove σ_{tot} è la sezione d'urto totale. Il problema è che i neutroni dopo i processi di scattering vengono diffusi con energie diverse, e quindi la formula è inapplicabile. Dopo un urto con un nucleo (di massa A volte quella del neutrone) l'energia E' con la quale un neutrone di energia iniziale E emerge è

$$\frac{E'}{E} = \frac{A^2 + 1 + 2A \cos \theta}{(A + 1)^2}, \quad (10.5)$$

dove θ è l'angolo di diffusione misurato nel sistema di riferimento del centro di massa. Questa energia è minima (ed è quindi massima l'energia trasferita al nucleo) quando $\theta = \pi$,

$$\left. \frac{E'}{E} \right|_{\min} = \left(\frac{A - 1}{A + 1} \right)^2. \quad (10.6)$$

Ad esempio, per $A = 1$ (idrogeno), il neutrone si ferma e trasferisce tutta la sua energia al protone. A basse energie (minori di ~ 10 MeV) lo scattering è per lo più in onda S , e quindi isotropo. Quindi, partendo da una certa energia E , la distribuzione in energia dopo un urto sarà uniforme da E fino all'energia minima E'_{\min} . Dopo urti successivi quindi la distribuzione di energia si distorce, diminuendo sempre l'energia media. Dopo parecchi urti i neutroni saranno completamente termalizzati. Questo processo è illustrato in Fig. 10.1.

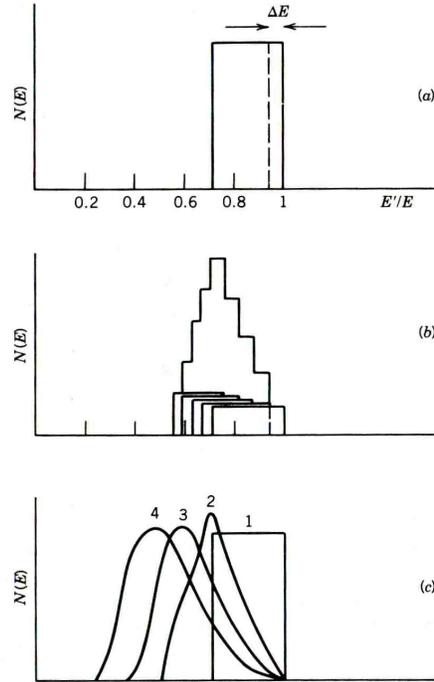


Figura 10.1: (a) Un neutrone monoenergetico di energia E produce, dopo un singolo urto in onda S da ^{12}C , una distribuzione piatta di energia, fino all'energia minima. (b) Dividendo la distribuzione risultante in cinque componenti quasi monoenergetiche, si produrranno, dopo un secondo urto, cinque diverse distribuzioni piatte. Il grafico (c) mostra il risultato di un calcolo esatto della distribuzione di energia dopo 1, 2, 3 e 4 urti. (Da Ref. [4]).

Conviene introdurre il parametro ξ , detto “letargia”: è il valor medio di $\log E'/E$ dopo una collisione,

$$\xi = \frac{\int \log \frac{E'}{E} d\Omega}{\int d\Omega} = \frac{\int \log \left[\frac{(A+1)^2}{A^2+1+2A \cos \theta} \right] d\Omega}{\int d\Omega} = 1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \log \frac{A-1}{A+1}. \quad (10.7)$$

Questo parametro non dipende dall'energia, e quindi dopo n urti si avrà

$$\langle \log E'_n \rangle = \log E - n\xi. \quad (10.8)$$

Si può quindi calcolare il numero di urti necessario per la termalizzazione (a partire per esempio da $E = 2$ MeV) per diversi “moderatori”, come riassunto

nucleo	ξ	n
^1H	1.00	18
^2H	0.725	25
^4He	0.425	43
^{12}C	0.158	110
^{238}U	0.0084	2200

nella tabella. Un buon moderatore deve essere leggero (ricco in idrogeno), ma anche possibilmente solido, in modo da aumentare la densità e quindi il numero di urti. Alla fine del processo la distribuzione dell'energia dei neutroni sarà Maxwelliana, corrispondente alla temperatura ambiente.

10.2 Diffusione dei neutroni

Analizziamo ora la dinamica delle collisioni dei neutroni con i nuclei. Supponiamo che un fascio monocromatico di neutroni viaggi lungo l'asse z e urti un nucleo. L'onda incidente è un'onda piana, che descrive uno stato libero, dal momento che i neutroni non risentono di interazioni a lungo raggio. Come al solito, in problemi con simmetria sferica, è conveniente sviluppare l'onda piana in onde sferiche,

$$\psi_{\text{inc}} = Ae^{ikz} = A \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} (2\ell + 1) j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos \theta). \quad (10.9)$$

A grande distanza dal centro diffusore ($kr \gg 1$) possiamo usare lo sviluppo asintotico delle Bessel,

$$j_{\ell}(kr) \sim \frac{\sin\left(kr - \ell\frac{\pi}{2}\right)}{kr}, \quad (10.10)$$

e quindi l'onda incidente diventa

$$\psi_{\text{inc}} = \frac{-iA}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[e^{i(kr - \ell\pi/2)} - e^{-i(kr - \ell\pi/2)} \right] P_{\ell}(\cos \theta). \quad (10.11)$$

La corrispondente corrente di probabilità

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m} \left[\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right] \quad (10.12)$$

ha modulo

$$|j_{\text{inc}}| = \frac{\hbar k}{m} |A|^2. \quad (10.13)$$

In coordinate sferiche dunque l'onda incidente ha una componente entrante e una uscente. Per effetto dell'interazione la componente uscente sarà modificata, e conterrà una componente diffusa dal centro di scattering,

$$\psi = -i \frac{A}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\eta_{\ell} e^{i(kr - \ell\pi/2)} - e^{-i(kr - \ell\pi/2)} \right] P_{\ell}(\cos \theta), \quad (10.14)$$

dove η_{ℓ} è in genere un numero complesso di modulo inferiore o uguale all'unità. Quest'onda è la sovrapposizione di un'onda incidente e di un'onda diffusa,

$$\psi = \psi_{\text{inc}} + \psi_{\text{sc}}, \quad (10.15)$$

con l'onda diffusa data quindi da

$$\psi_{\text{sc}} = -i \frac{A}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} (\eta_{\ell} - 1) e^{i(kr - \ell\pi/2)} P_{\ell}(\cos \theta), \quad (10.16)$$

e la corrispondente corrente di probabilità pari in modulo a

$$j_{\text{sc}} = \frac{\hbar}{4mkr^2} |A|^2 \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (\eta_{\ell} - 1) e^{i(kr - \ell\pi/2)} P_{\ell}(\cos \theta) \right|^2. \quad (10.17)$$

La sezione d'urto differenziale è data da

$$d\sigma = \frac{j_{\text{sc}}}{j_{\text{inc}}} r^2 d\Omega, \quad (10.18)$$

ed usando la relazione di ortogonalità dei polinomi di Legendre, integrando su tutto l'angolo solido otteniamo per la sezione d'urto di scattering totale

$$\sigma_{\text{sc}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) |\eta_{\ell} - 1|^2. \quad (10.19)$$

Nel caso di scattering elastico, $|\eta_{\ell}| = 1$ e si scrive convenzionalmente $\eta_{\ell} = e^{2i\delta_{\ell}}$, dove δ_{ℓ} si chiama lo sfasamento corrispondente all'onda parziale ℓ . La sezione d'urto elastica è quindi

$$\sigma_{\text{el}} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \sin^2 \delta_{\ell}. \quad (10.20)$$

Nel caso di scattering anelastico, in cui delle particelle “spariscono”, si ha $|\eta_\ell| < 1$. Il flusso di particelle che spariscono è dato dalla differenza tra l'onda entrante e l'onda uscente nell'Eq. (10.14),

$$|j_{\text{in}}| - |j_{\text{out}}| = \frac{\hbar}{4mkr^2} |A|^2 \left\{ \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) P_\ell(\cos \theta) \right|^2 - \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} \eta_\ell (2\ell + 1) P_\ell(\cos \theta) \right|^2 \right\}. \quad (10.21)$$

Questo flusso definisce la cosiddetta sezione d'urto di reazione,

$$\sigma_r = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) (1 - |\eta_\ell|^2), \quad (10.22)$$

in modo che la sezione d'urto totale, di scattering e di reazione, risulta

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{sc}} + \sigma_r = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (1 - \text{Re}\eta_\ell). \quad (10.23)$$

La quantità complessa η_ℓ si chiama ampiezza parziale di scattering e contiene tutta l'informazione. Dipende ovviamente dall'energia e dal potenziale di interazione e si determina risolvendo l'equazione di Schroedinger. Ad esempio, nel caso di scattering (elastico) $n - p$, schematizzando il potenziale come una buca quadrata di altezza V_0 e raggio R , e limitandoci al caso $\ell = 0$, l'equazione di Schroedinger scritta per la funzione $u(r) = \psi/r$ è

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} u(r) + V u(r) = E u(r), \quad (10.24)$$

con μ la massa ridotta, che ha per soluzioni combinazioni di seni e coseni, con vettori d'onda, rispettivamente all'interno e all'esterno della buca,

$$k_1 = \sqrt{\frac{2\mu(E + V_0)}{\hbar^2}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}. \quad (10.25)$$

Esprimendo la funzione d'onda all'esterno della buca in termini dello sfasamento δ , in accordo con le definizioni date in precedenza,

$$u(r) = C \sin(k_2 r + \delta), \quad (10.26)$$

la condizione di continuità della funzione d'onda e della sua derivata fornisce la condizione

$$k_2 \cot(k_2 R + \delta) = k_1 \cot k_1 R, \quad (10.27)$$

che dà implicitamente la fase di scattering δ in funzione dei parametri del potenziale, cioè V_0 e R . Con un po' di trigonometria, detto $\alpha = -k_1 \cot k_1 R$, si arriva alla sezione d'urto elastica

$$\sigma_{\text{el}} = \frac{4\pi}{k_2^2} \frac{\left(\cos k_1 R + \frac{\alpha}{k_2} \sin k_2 R\right)^2}{1 + \frac{\alpha^2}{k_2^2}}. \quad (10.28)$$

Con $V_0 \sim 35$ MeV, $R \sim 2$ fm, $E \sim 10$ keV, otteniamo $k_1 \sim 0.92$ fm $^{-1}$, $k_2 \sim 0.016$ fm $^{-1}$, $\alpha \sim 0.25$ fm $^{-1}$, quindi si ha in pratica $k_2 R \ll 1$ e $k_2 \ll \alpha$, e si può scrivere

$$\sigma_{\text{el}} \sim \frac{4\pi}{\alpha^2} (1 + \alpha R)^2 \sim 4.4\text{b}, \quad (10.29)$$

indipendente dall'energia. Il fatto che la sezione d'urto $n-p$ sia indipendente dall'energia (per basse energie), è corretto sperimentalmente, come si vede dalla Fig. 10.2. Invece il valore della sezione d'urto trovato è circa 4 volte

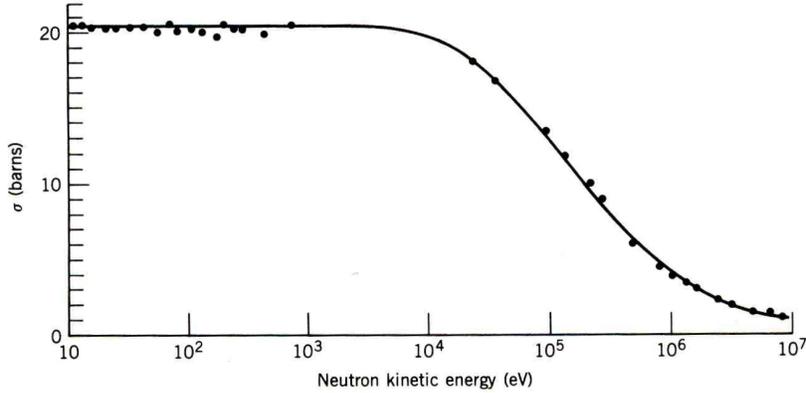


Figura 10.2: Sezione d'urto neutrone-protone a bassa energia. (Da Ref. [4]).

più piccolo di quello misurato. Il fatto è che neutrone e protone possono interagire in stati di singoletto o di tripletto di spin totale. Poiché i parametri fenomenologici della buca di potenziale sono stati ispirati dall'analisi del deutone, quella trovata è la sezione d'urto per stati di tripletto di spin. La sezione d'urto per gli stati di singoletto di spin è molto più grande, circa 67.8 b. Quindi la sezione d'urto non polarizzata, che è la media statistica delle sezioni d'urto di singoletto e di tripletto, sarà

$$\sigma_{\text{el}} = \frac{1}{4}\sigma_{\text{el}}^{(0)} + \frac{3}{4}\sigma_{\text{el}}^{(1)} \sim 20\text{b}, \quad (10.30)$$

in più ragionevole accordo con l'esperienza. Questa analisi dimostra che le forze nucleari sono molto dipendenti dallo spin.

10.3 Cattura di neutroni - modello ottico

Nel caso dello scattering su nucleo ci possono anche essere reazioni di cattura del neutrone. Ritornando alla funzione d'onda in onda S , $u_0 = \psi_0/r$,

$$u_0 = \frac{A}{k} \left(e^{-ikr} - \eta_0 e^{ikr} \right), \quad (10.31)$$

introduciamo la derivata logaritmica,

$$f_0 = \left(\frac{r}{u_0} \frac{du_0}{dr} \right)_{r=R}. \quad (10.32)$$

Dalle condizioni di continuità della funzione d'onda otteniamo per l'ampiezza di diffusione

$$\eta_0 = \frac{f_0 + ikR}{f_0 - ikR} e^{-2ikR}. \quad (10.33)$$

Se supponiamo un assorbimento totale, cioè che immediatamente all'interno del nucleo $u_0 \sim e^{-iKr}$ senza nessuna onda uscente, otteniamo

$$f_0 = -iKR \implies \eta_0 = \frac{K - k}{K + k} e^{-2ikR}, \quad (10.34)$$

e dal momento che

$$K = \sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}} \gg k, \quad (10.35)$$

otteniamo per la sezione d'urto di reazione,

$$\sigma_r = \frac{\pi}{k^2} \left(1 - |\eta_0|^2 \right) \sim \frac{4\pi}{kK}, \quad (10.36)$$

cioè la sezione d'urto di reazione è proporzionale a $1/v$, e quindi questo processo domina alle basse energie.

In realtà l'approssimazione usata che dentro il nucleo non ci sia onda uscente è troppo drastica. Si usa invece rendere conto degli effetti di assorbimento introducendo un potenziale complesso $V = -(V_0 + iW)$, con V_0 e W numeri reali, in quello che viene chiamato modello ottico del nucleo.

Consideriamo per semplicità il caso unidimensionale, in cui l'equazione di Schroedinger è

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0 + iW)\psi = 0. \quad (10.37)$$

Questa equazione ammette soluzioni di onde piane,

$$\psi = e^{\pm iK_c x}, \quad (10.38)$$

con il numero d'onda complesso K_c dato da

$$K_c = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E + V_0 + iW)} = K + i\kappa. \quad (10.39)$$

Se W è piccolo rispetto a $E + V_0$ si può espandere la radice quadrata e trovare

$$K \simeq \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E + V_0)}, \quad \kappa \simeq \frac{WK}{2(E + V_0)}. \quad (10.40)$$

Sostituendo nella funzione d'onda si ha

$$\psi = e^{iKx} e^{-\kappa x}, \quad (10.41)$$

che rappresenta un'onda evanescente, per la quale $|\psi|^2$ decade esponenzialmente con un cammino libero medio L dato da

$$L = \frac{1}{2\kappa} = \frac{E + V_0}{WK}. \quad (10.42)$$

Dei numeri ragionevoli potrebbero essere $E = 10$ MeV, $V_0 = 40$ MeV e $W = 10$ MeV, per i quali $K = 1.55 \text{ fm}^{-1}$ e $L = 3.23 \text{ xzfm}$, per cui il neutrone praticamente sparisce nel nucleo. In realtà nel modello ottico si sceglie un potenziale realistico di Woods-Saxon per V_0 , mentre per la parte immaginaria si suppone che solo i nucleoni “di valenza”, vicini alla superficie del nucleo, giochino un ruolo per la cattura, e si sceglie una funzione piccata sulla superficie. I calcoli sono spesso molto complessi, ma danno una descrizione molto buona delle sezioni d'urto alle varie energie (cfr. Fig. 10.3. Le sezioni d'urto totali vanno come $1/v$ a bassa energia e poi diminuiscono. Si osservano delle strutture, che rappresentano delle risonanze, dove la sezione d'urto totale raggiunge un massimo. Con riferimento all'Eq. (10.23) questo succede quando $\eta_\ell = -1$, cioè in corrispondenza di un'energia E_R tale che

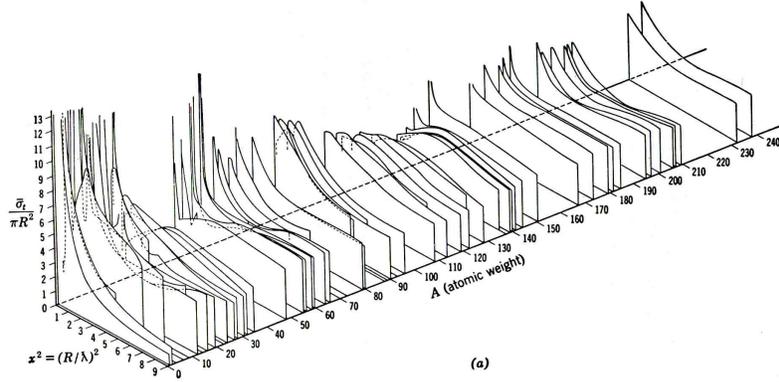


Figura 10.3: Sezione d'urto totale, in unità di πR^2 , per neutroni di varie energie (x^2 è un parametro adimensionale di energia). (Da Ref. [4]).

$\delta_\ell(E_R) = \pi/2$. Sviluppando attorno a questo valore (conviene sviluppare $\cot \delta(E)$, invece che $\delta(E)$ direttamente) otteniamo

$$\cot \delta_\ell(E) = (E - E_R) \left(\frac{\partial \cot \delta_\ell}{\partial E} \right)_{E=E_R} + O(E - E_R)^3, \quad (10.43)$$

e quindi, definendo la larghezza Γ ,

$$\Gamma = 2 \left(\frac{\partial \delta_\ell}{\partial E} \right)_{E=E_R}^{-1}, \quad (10.44)$$

in prossimità di $E = E_R$ avremo, per la sezione d'urto di scattering,

$$\sigma_{\text{sc}} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma^2}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}, \quad (10.45)$$

che è la ben nota formula di Breit-Wigner.

Capitolo 11

Fusione termonucleare

Quando nuclei leggeri si fondono per formarne uno più pesante si libera energia se $A < 56$. L'energia liberata è pari a circa 1 MeV per nucleone (in alcuni casi anche molto di più), che è comparabile con quanto si ottiene con la fissione. I vantaggi rispetto a quest'ultima consistono nel fatto che i nuclei leggeri sono molto più comuni e si producono meno scorie radioattive (eventuali prodotti radioattivi decadono rapidamente). La difficoltà è che bisogna vincere la repulsione Coulombiana, che agisce come una barriera. Nelle stelle questa energia è data dall'energia cinetica di agitazione termica, prodotta a sua volta dal collasso gravitazionale. È un meccanismo che necessita di grandi scale. Sulla Terra dobbiamo produrre energie di agitazione termica dell'ordine delle decine di keV, pari a circa 10^8K . Infatti la barriera è pari

$$\frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_1 + R_2} \sim 0.4\text{MeV}, \quad (11.1)$$

ma possiamo sempre sperare nell'effetto tunnel.

11.1 Reazioni termonucleari

Per minimizzare la repulsione di Coulomb conviene usare protoni, deuterio e trizio, che hanno $Z = 1$, o He che ha $Z = 2$. Le reazioni utili per produrre energia sono

1. $p + d \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$, con $Q = 5.49\text{ MeV}$
2. $d + d \rightarrow {}^4\text{He} + \gamma$, con $Q = 23.85\text{ MeV}$

3. $d + d \rightarrow {}^3\text{He} + n$, con $Q = 3.27$ MeV
4. $d + d \rightarrow t + p$, con $Q = 4.03$ MeV
5. $d + t \rightarrow {}^4\text{He} + n$, con $Q = 17.59$ MeV
6. $d + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + p$, con $Q = 18.35$ MeV

La reazione 1) ha piccola sezione d'urto e non è vantaggiosa perché l'energia finale è trasportata da un fotone, molto penetrante, e che quindi lascerebbe la zona della reazione. Quindi sarebbe necessaria una sorgente esterna per mantenere in vita la reazione. Lo stesso vale per la reazione 2). Le reazioni 3) e 4) sono chiamate reazioni D-D. Poiché parte dell'energia è trasportata da particelle cariche, la reazione si mantiene per un certo tempo. La reazione 5) si chiama D-T, con barriera di Coulomb analoga alle reazioni D-D, ma la sezione d'urto è maggiore. L'energia liberata è molto maggiore perché tra i prodotti finali c'è la particella α . Lo svantaggio della reazione D-T è che il trizio è radioattivo. Quindi deve essere prodotto in un reattore a fusione, e inoltre si produce un neutrone, che causa una certa radioattività nel reattore. Anche la reazione 6) presenta dei vantaggi: ha un grande valore- Q , non ci sono neutroni finali, e il combustibile non è radioattivo. Tuttavia richiede una maggiore energia, perché la barriera di Coulomb è più alta.

Alle temperature necessarie per attivare le reazioni gli atomi sono dissociati. Abbiamo un gas di elettroni e ioni in equilibrio termico, che è chiamato "plasma". La distribuzione delle velocità è Maxwelliana

$$f(v) \propto v^2 dv e^{-\frac{1}{2}mv^2/kT}. \quad (11.2)$$

Per due gas con densità n_1 e n_2 particelle per unità di volume, la probabilità di reazione di una particella di tipo 1 di reagire con una qualunque di tipo 2 per unità di distanza è data da $n_2\sigma$. La distanza percorsa nell'unità di tempo è v , quindi il rate R di reazione è dato da

$$R = n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle. \quad (11.3)$$

La sezione d'urto ovviamente dipende dall'energia, cioè dalle velocità, quindi dovremo prendere la sua media statistica,

$$\langle \sigma v \rangle = \int f(v) \sigma(v) v dv \quad (11.4)$$

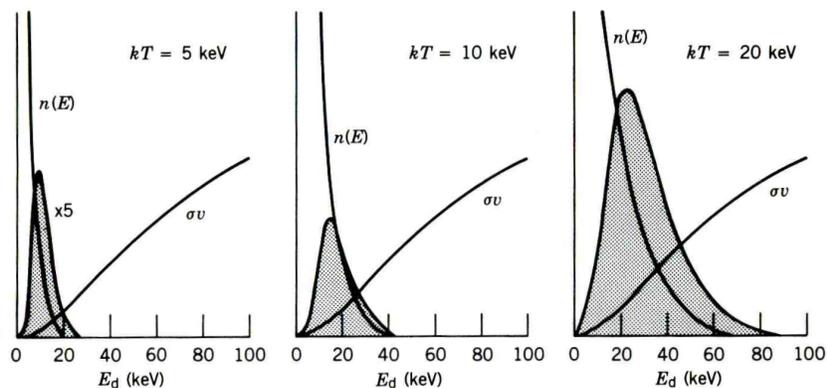


Figura 11.1: Risultato dell'overlap di σv con una distribuzione di Maxwell-Boltzmann a temperature kT corrispondenti a 5, 10 e 20 keV. La curva $n(E)$ rappresenta la distribuzione di Maxwell-Boltzmann, proporzionale a $\sqrt{E} \exp(-E/kT)$, tende a zero a basse energie del deutone E_d , ma questo non è mostrato nel grafico. L'area ombreggiata è l'overlap, che cresce all'aumentare di kT . (Da Ref. [4]).

Tutto quindi dipende dall'overlap tra la distribuzione di Maxwell e il prodotto σv , come illustrato in Fig. 11.1. Questo overlap aumenta con l'aumentare della temperatura, ed avrà un picco in corrispondenza di una certa velocità media v_m . Per esempio (cfr. Fig. 11.2), nella reazione D-T il picco è attorno ai 60 keV, dopodiché $\langle \sigma v \rangle$ diminuisce di nuovo, mentre per le reazioni D-D il picco è per energie più alte, cosa sfavorevole in un reattore, dove le temperature raggiunte sono di 20-30 keV.

11.2 Criterio di Lawson e meccanismi di confinamento

La perdita di energia di cui si deve tener conto è la bremsstrahlung, dovuta all'accelerazione delle particelle cariche, anche se questo non è un criterio stretto, dato che alla fin fine si tratta sempre di energia prodotta. Si preferisce avere la perdita per bremsstrahlung inferiore alla potenza prodotta. Poiché la perdita per bremsstrahlung per particelle non relativistiche va come $Z^2 v \sim Z^2 \sqrt{T}$, mentre la potenza prodotta è $\propto \langle \sigma v \rangle Q$, questo criterio setta dei limiti

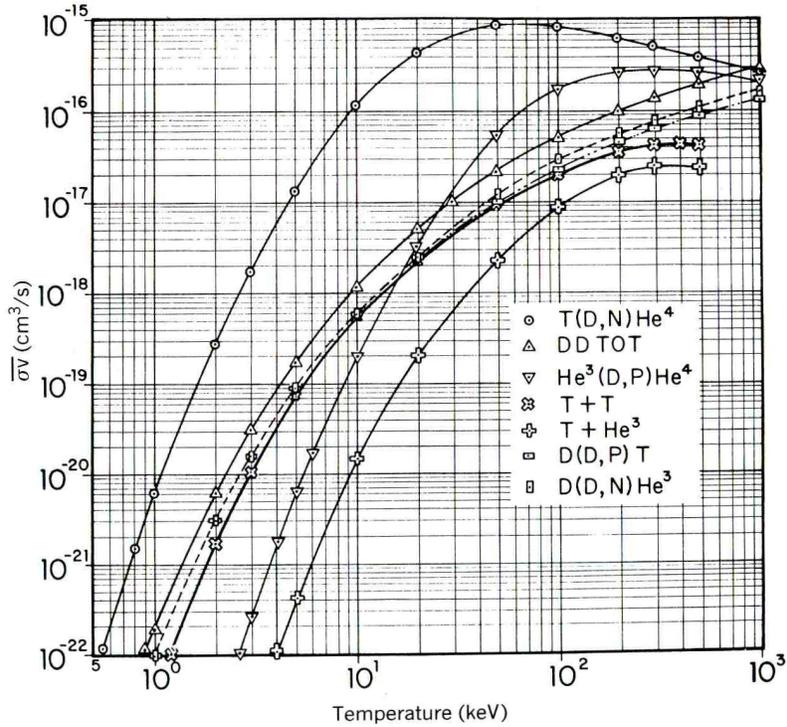


Figura 11.2: Valori medi di σv (mediati su distribuzioni di Maxwell-Boltzmann) per diverse reazioni di fusione nucleare. (Da Ref. [4]).

inferiori per la temperatura T . Ad esempio, assumendo una densità di ioni di $10^{21}/\text{m}^3$, si deve avere $kT > 4$ keV per le reazioni D-T, e $kT > 40$ keV per le reazioni D-D, cfr. Fig. 11.3.

Il criterio più importante per il funzionamento del reattore è però il criterio di Lawson: bisogna essere al di là del cosiddetto punto di “break-even” (o punto di ignizione), quando cioè la potenza generata è superiore a quella necessaria per mantenere le temperature. Nella reazione D-T ad esempio sono prodotte α e n e i neutroni scappano, portando via dell’energia. Quindi ci serve una sorgente di energia esterna per riscaldare il plasma. L’energia prodotta dalla fusione è

$$E_f = n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle Q \tau, \quad (11.5)$$

dove τ è il tempo in cui si riesce a confinare il plasma. Assumendo che le particelle di tipo 1 e di tipo 2 siano diverse (come è il caso nelle reazioni

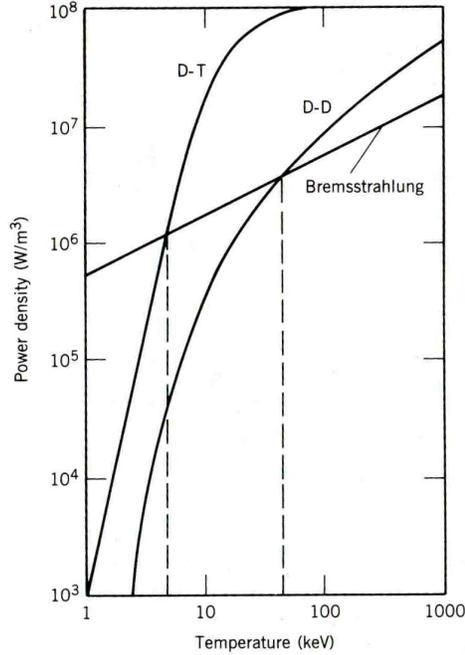


Figura 11.3: Confronto tra perdite per bremsstrahlung e potenza prodotta nelle reazioni di fusione D-D e D-T, assumendo una densità di ioni di $10^{21}/\text{m}^3$. Al di là delle linee tratteggiate verticali la potenza prodotta nella fusione supera le perdite per bremsstrahlung. (Da Ref. [4]).

D-T), e di densità uguale $n_1 = n_2 = n/2$, dove n è la densità del plasma, il criterio di Lawson richiede che questa energia sia superiore a quella necessaria a scaldare il plasma $E_p = 3nkT$ (considerando ioni e elettroni). Quindi deve essere

$$E_f > E_p \implies n\tau > \frac{12kT}{\langle\sigma v\rangle Q}. \quad (11.6)$$

Per esempio, in un reattore D-T che opera a 20 keV, $\langle\sigma v\rangle \simeq 5 \times 10^{-22} \text{ m}^3/\text{s}$ e quindi il criterio di Lawson impone che $n\tau > 3 \times 10^{19} \text{ s}/\text{m}^3$. Per una densità $n \simeq 10^{20}/\text{m}^3$ questo significa che il tempo di confinamento deve essere $\tau > 0.3 \text{ s}$.

Si utilizzano due meccanismi di confinamento del plasma: il confinamento magnetico (MCF) e il confinamento inerziale (ICF). Nei reattori a confinamento magnetico le traiettorie delle particelle cariche si avvolgono attorno

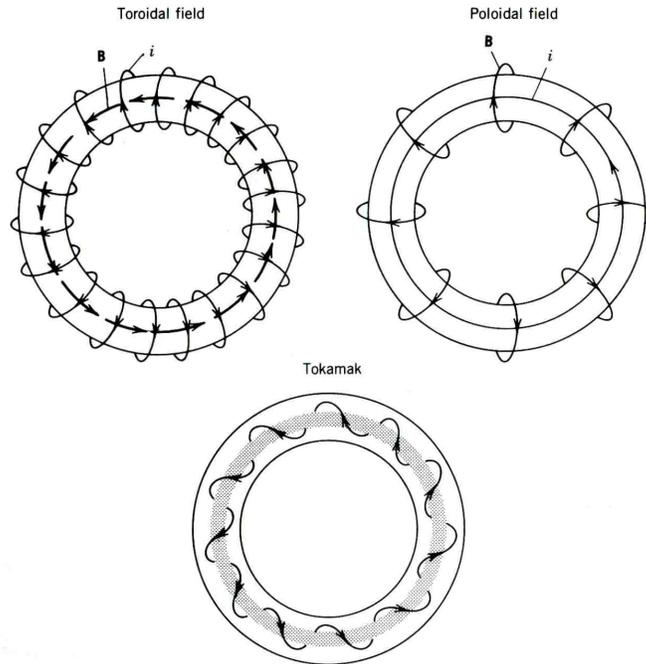


Figura 11.4: Schema della configurazione tokamak di confinamento magnetico. Le linee di campo risultanti dalla sovrapposizione del campo toroidale e poloidale formano un'elica attorno a cui gli ioni si muovono in orbite chiuse. (Da Ref. [4]).

alle linee del campo. Si utilizzano dei solenoidi chiusi a forma di toroide. Oltre al campo di induzione magnetica toroidale si genera un campo poloidale, facendo passare una corrente attorno all'asse del toroide (spesso attraverso il plasma stesso, che in questo modo si riscalda anche). Lo scopo di questo campo poloidale è di evitare che le particelle derivino verso il bordo del toroide. Il campo risultante è diretto lungo delle eliche attorno all'asse del toroide. Questa configurazione è chiamata "tokamak", cfr. Fig. 11.4. Per riscaldare il plasma, oltre alle scariche che servono anche a creare il campo poloidale, si usano delle sorgenti di radiofrequenze, o microonde. Un'altra possibilità è di accelerare idrogeno e deuterio fino a 100 keV e neutralizzare le cariche con reazioni di scambio di carica. Questi atomi neutri non subiscono l'azione del campo magnetico, ma in seguito agli urti subiscono altre reazioni di scambio di carica e restano confinate nel campo magnetico, tra-

sferendo energia al plasma. Con l'iniezione di fascio neutro si sono prodotte temperature $T \sim 30$ keV. Nei reattori a confinamento inerziale un impulso di energia è diretto contemporaneamente da diverse direzioni su un bersaglio di materiale fusionabile (una miscela di D-T congelata). L'energia è liberata con tale potenza che il materiale si scalda e viene violentemente espulso dalla superficie. Di conseguenza il materiale interno viene ancora più compresso, e raggiunge la temperatura alla quale può avvenire la fusione. L'intero processo viene ripetuto, e si ha una serie di micro reazioni termonucleari. La ricerca nel campo è molto attiva, e altri meccanismi di confinamento più complicati sono stati elaborati. Al momento però nessuno ha ancora costruito un reattore a fusione che producesse più energia di quanta ne consumasse.

Bibliografia

- [1] A. DeShalit and H. Feshbach, “Theoretical nuclear physics”, Wiley, 1974.
- [2] H.A. Enge, “Introduction to nuclear physics”, Addison-Wesley, 1970.
- [3] J.D. Jackson, “Classical electrodynamics”, Wiley, 1975.
- [4] K.S. Krane, “Introductory nuclear physics”, John Wiley & Sons, 1988.
- [5] W.R. Leo, “Techniques for nuclear and particle physics experiments: a how-to approach”, Springer-Verlag, 1994.
- [6] J.S. Lilley, “Nuclear physics: principles and applications”, John Wiley & Sons, 2001.
- [7] A. Messiah, “Quantum mechanics”, Dover, 1999.
- [8] M.A. Preston and R.K. Bhaduri, “Structure of the nucleus”, Addison-Wesley, 1975.
- [9] P. Ring and P. Schuck, “The nuclear many-body problem”, Springer-Verlag 1980.
- [10] S.S.M. Wong, “Introductory nuclear physics”, John Wiley & Sons, 1998.