Esercizio 3: Si considerino due corpi di massa uguale e pari a 1.70 kg che interagiscono con una forza diretta lungo la congiungente dei due corpi, dipendente dalla distanza relativa r, della forma: 1

$$F(r) = \begin{cases} -k_1 r & \text{se } r < a \\ +k_2/r^2 & \text{altrove} \end{cases} \quad (1)$$

con r misurata in m, $F(r)$ in N, e con $k_1 = 2.80$ N/m, $k_2 = 2.90$ N m^2 e $a = 1.60$ m. Si noti che la forza è repulsiva per distanze uguali o superiori ad a, attrativa per distanze inferiori ad a.

1. Determinare quanto vale l'energia potenziale quando le masse si trovano a una distanza pari ad $a/2$, assumendo che sia nulla per distanze infinite (2,-1)

   U [J] = $\boxed{}$ A $\boxed{-5.38}$ B $\boxed{-1.09}$ C $\boxed{-2.69}$ D $\boxed{0.896}$ E $\boxed{-0.875}$

Supponendo che inizialmente una delle due masse sia ferma nell'origine e l'altra arrivi dall'infinito con velocità pari a 2.80 m/s e parametro d'impatto 1.40 m, determinare:

2. La velocità del centro di massa (1,-1)

   v [m/s] = $\boxed{}$ A $\boxed{0.307}$ B $\boxed{2.65}$ C $\boxed{0.635}$ D $\boxed{3.92}$ E $\boxed{1.40}$

3. Il momento angolare del sistema in un sistema di riferimento in cui il centro di massa è in quiete (1,-1)

   L [kg m^2/s] = $\boxed{}$ A $\boxed{3.33}$ B $\boxed{47.2}$ C $\boxed{3.80}$ D $\boxed{35.2}$ E $\boxed{6.66}$

4. La minima distanza relativa raggiunta dalle due masse nel loro moto successivo (3,-1)

   d [m] = $\boxed{}$ A $\boxed{0.721}$ B $\boxed{0.870}$ C $\boxed{1.90}$ D $\boxed{1.53}$ E $\boxed{0.580}$

5. La velocità che deve avere il corpo incidente tale per cui le masse, con lo stesso paramentro di impatto dato precedentemente, arrivino a "sentire" la parte di forza attrattiva (3,-1)

   v [m/s] = $\boxed{}$ A $\boxed{0.855}$ B $\boxed{4.27}$ C $\boxed{1.65}$ D $\boxed{10.2}$ E $\boxed{3.58}$

1) $\mathcal{U}(r) - \mathcal{U}(r_0) = -\int_{r_0}^{r} F(x)\, dx$

$\Rightarrow \quad r \geq a \qquad \mathcal{U}(r) - \cancel{\mathcal{U}(\infty)} = -\int_{\infty}^{r} \frac{k_2}{x^2}\, dx = \frac{k_2}{r}$

$\Rightarrow \quad \mathcal{U}(a) = \frac{k_2}{a}$

$r < a \qquad \mathcal{U}(r) - \mathcal{U}(a) = -\int_{a}^{r} (-k_1)\, x\, dx$

$= \frac{1}{2} k_1 (r^2 - a^2)$

$\Rightarrow \quad \mathcal{U}(r) = \frac{1}{2} k_1 (r^2 - a^2) + \frac{k_2}{a}$

$\Rightarrow \quad r = \frac{a}{2} \qquad \mathcal{U}\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{3}{8} k_1 a^2 + \frac{k_2}{a}$

2)

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m\vec{v}_0}{2m} = \frac{\vec{v}_0}{2}$$

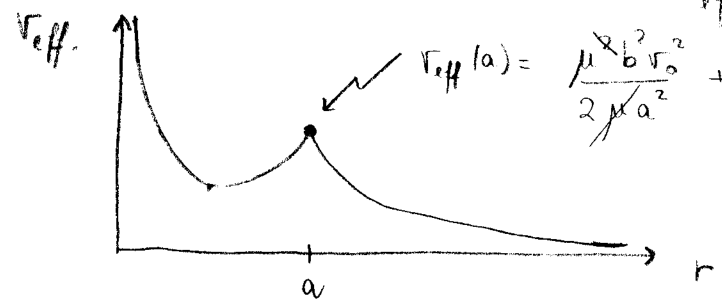
3) $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$\vec{v}_r = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$

$$\vec{L} = \mu\, \vec{r}\times\vec{v}_r = \text{cost} \Rightarrow \quad \text{a } t=0 \quad L = \mu b v_0$$

μ = massa ridotta = $\frac{m}{2}$

4) $$E = \frac{1}{2}\mu v_0^2 = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r)}_{V_{eff}(r)} \qquad \text{SR CM}$$



$$V_{eff}(a) = \frac{\mu^{\cancel{2}} b^2 v_0^2}{2\cancel{\mu} a^2} + \frac{k_2}{a} > E_0$$

figura

$r \geq a \qquad V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{k_2}{r} \qquad \Rightarrow$

$r < a \qquad V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{1}{2}k_1 r^2 - \frac{1}{2}k_1 a^2 + \frac{k_2}{a}$

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = \frac{L^2(-\cancel{2})}{\cancel{2}\mu r^3} + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}k_1 r = 0$$

$$\frac{L^2}{\mu} = k_1 r^4 \qquad r^2 = \sqrt{\frac{L^2}{\mu k_1}} = \sqrt{\frac{\mu^{\cancel{2}} b^2 v_0^2}{\cancel{\mu} k_1}}$$

Supponiamo $\sqrt{\frac{b^2 v_0^2 \mu}{k_1}} < a^2$ (verificato dai dati del pb.)

Supponiamo anche che

$$E_0 < \frac{L^2}{2\mu a^2} + V(0) \quad \text{(pure verificato)}$$

$\Rightarrow \quad E_0 = \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{k_2}{r}$ quindi r_{min} sarà $> a$

$$\Rightarrow \quad 2\mu E_0 r^2 - 2\mu k_2 r - L^2 = 0$$

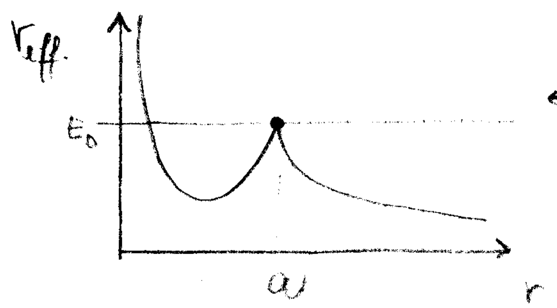
$$r = \frac{\mu k_2 \pm \sqrt{\mu^2 k_2^2 + 2\mu E_0 L^2}}{2\mu E_0}$$

$$r = \frac{\cancel{\mu} k_2}{\cancel{2}\cancel{\mu}\frac{1}{\cancel{2}}\mu v_0^2} + \sqrt{\frac{\cancel{\mu^2} k_2^2}{\cancel{4}\cancel{\mu^2}\frac{1}{\cancel{4}}\mu^2 v_0^4} + \frac{\cancel{2}\cancel{\mu}\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\mu}\cancel{v_0^2}\,\cancel{\mu^2} b^2 \cancel{v_0^2}}{\cancel{4}\cancel{\mu^2}\frac{1}{\cancel{4}}\cancel{\mu^2}\cancel{v_0^4}}}$$

$$= \frac{k_2}{\mu v_0^2} + \sqrt{\frac{k_2^2}{\mu^2 v_0^4} + b^2}$$

$$= \frac{k_2}{\mu v_0^2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{\mu^2 b^2 v_0^4}{k_2^2}}\right].$$

5.)



voglio $\Rightarrow$

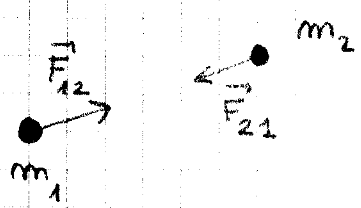
$$\frac{1}{2}\mu v_0^2 = V_{eff}(a) = \frac{1}{2}\mu\frac{b^2 v_0^2}{a^2} + \frac{k_2}{a}$$

$$\frac{1}{2}\mu\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) v_0^2 = \frac{k_2}{a}$$

$$v_0^2 = \frac{2k_2}{\mu a}\,\frac{a^2}{a^2 - b^2} = \frac{2k_2 a}{\mu(a^2 - b^2)}.$$

Esercizio sul moto in campo gravitazionale

Leggi di Keplero



$$\vec F_{12} = - \vec F_{21}$$

$$|\vec F_{12}| = |\vec F_{21}| = F(r) = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \equiv \frac{K}{r^2}$$

$$K \doteq G m_1 m_2$$

Eq. del moto:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec r}_1 = -\vec F_{21} \\ m_2 \ddot{\vec r}_2 = \vec F_{21} \end{cases}$$

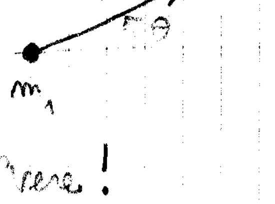
Si possono riscrivere anche come:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec r}_1 + m_2 \ddot{\vec r}_2 = 0 \\ \ddot{\vec r}_2 - \ddot{\vec r}_1 = \vec F_{21} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\, \ddot{\vec r}_{CM} = 0 \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec r} = \vec F_{21} \quad ; \quad \vec r = \vec r_2 - \vec r_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ C.M. va di moto rettilineo uniforme $\Rightarrow$ mi metto nel SR CM. $\Rightarrow$

$$\boxed{\mu \ddot{\vec r} = - \frac{k}{r^2} \hat r}$$



equazione non banale da risolvere!

Procediamo per altra via: costanti del moto sono

1) energia E
2) momento angolare $\vec L_{CM}$ (sono in SRCM)

1) $E = \frac{1}{2}\mu v^2 + U(r)$

$$U(r) - \underbrace{U(\infty)}_{=0} = -\int_{\infty}^{r} \left(-\frac{k}{x^2}\right) dx = -\frac{k}{r}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r}$$

2) $\vec{L}_{CM} = \mu\, \vec{r} \times \vec{v}$

■ $\vec{L} = m_1\, \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\, \vec{r}_2 \times \vec{v}_2$

$$\begin{cases} m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = m_t \vec{r}_{CM} \\ m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_t \vec{v}_{CM} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r} \\ \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_{CM} - \frac{m_2}{m_t}\vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_{CM} + \frac{m_1}{m_t}\vec{r} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{v}_{CM} - \frac{m_2}{m_t}\vec{v} \\ \vec{v}_2 = \vec{v}_{CM} + \frac{m_1}{m_t}\vec{v} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = m_1\left[\vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} - \cancel{\frac{m_2}{m_t}\vec{r}_{CM} \times \vec{v}} - \cancel{\frac{m_2}{m_t}\vec{r} \times \vec{v}_{CM}} + \frac{m_2^2}{m_t^2}\vec{r} \times \vec{v}\right]$$

$$+ m_2\left[\vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} + \cancel{\frac{m_1}{m_t}\vec{r}_{CM} \times \vec{v}} + \cancel{\frac{m_1}{m_t}\vec{r} \times \vec{v}_{CM}} + \frac{m_1^2}{m_t^2}\vec{r} \times \vec{v}\right]$$

$$= (m_1 + m_2)\, \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} + \frac{m_1 m_2}{m_t^{\cancel{2}}}\cancel{(m_2 + m_1)}\, \vec{r} \times \vec{v}$$

$$= M_{tot}\, \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} + \mu\, \vec{r} \times \vec{v} \qquad ■$$

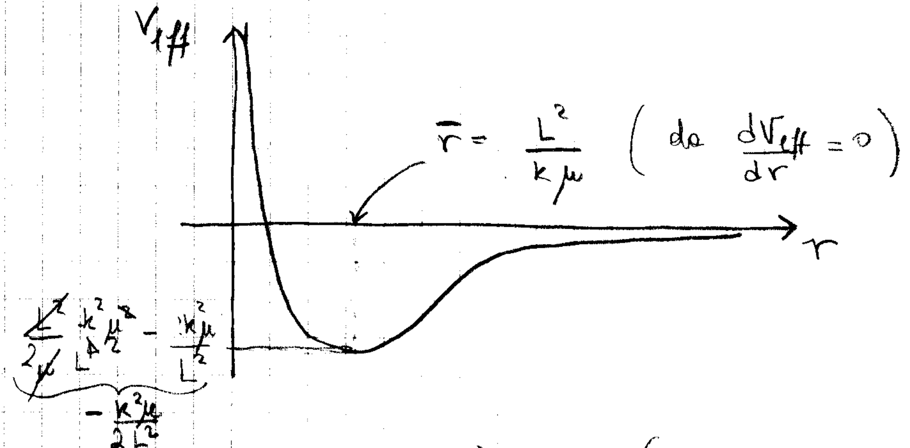
$$\Rightarrow \vec{L}_{CM} = \mu r^2 \dot{\theta}\, \hat{z} \quad (\perp \text{ al foglio})$$

$\vec{L}_{CM}$ si conserva $\Rightarrow$ il moto è piano !!

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}$$

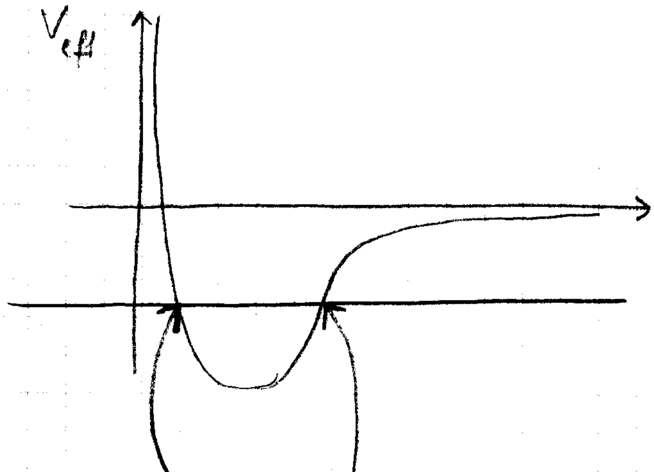
Che traiettoria fa?

Consideriamo $V_{eff}(r) \overset{\text{definisco}}{\equiv} \dfrac{L^2}{2\mu r^2} - \dfrac{k}{r}$



E può essere $\gtreqless 0$ (per esempio a $t=0$ sono a $v_0 = 0$ e $r = r_0 \Rightarrow E = -\frac{k}{r_0}$)

$\boxed{E < 0}$



$E \leftarrow$ vediamo che è un'ellisse

esistono 2 punti in cui $V_{eff}(r) = E \Rightarrow \dot{r} = 0$

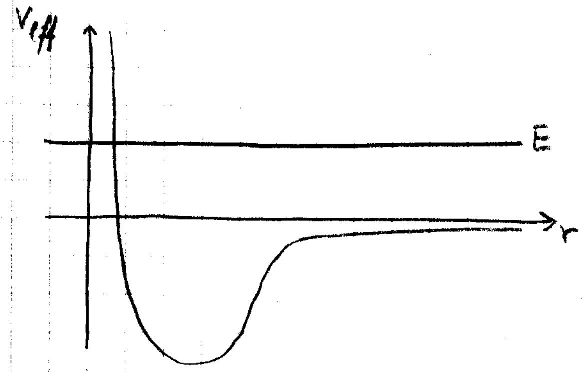
$\Rightarrow$ sono r_{max} e r_{min} $\qquad E = -\frac{1}{2}\mu\frac{k^2}{L^2}$

$\Rightarrow$ traiettoria chiusa

In particolare per $E = V_{eff}(\bar{r})$ $\dot{r} = 0$ sempre

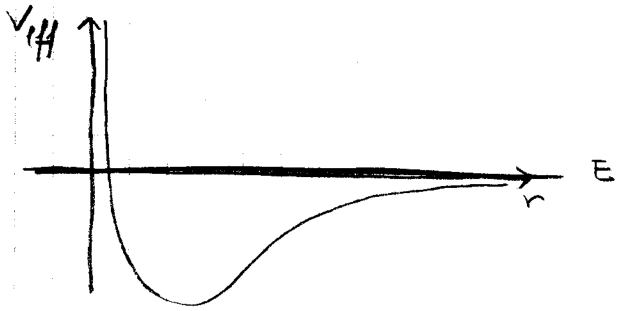
$\Rightarrow$ traiettoria circolare

$\boxed{E > 0}$



∃ una distanza minima, ma la traiettoria è aperta.
Vedremo che si tratta di un'iperbole

$\boxed{E = 0}$



La traiettoria è aperta e $\dot{r} = 0$ all'infinito ($E = 0$ e $V(r) = 0$ per $r = \infty$). Vedremo che si tratta di una parabola.

Risolviamo adesso per bene:

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}$$

$L = \mu r^2 \dot{\theta}$

$$= \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}\cancel{\mu}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \frac{L^2}{\mu^{\cancel{2}} r^4} + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2E\mu}{L^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2\mu k}{L^2}\frac{1}{r}$$

Introduco $u(\theta) = \dfrac{1}{r(\theta)} \Rightarrow \dfrac{du}{d\theta} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{dr}{d\theta} \Rightarrow$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2E\mu}{L^2} - u(\theta)^2 + \frac{2\mu k}{L^2} u(\theta)$$

$$A = \frac{2E\mu}{L^2} \quad ; \quad B = \frac{2\mu k}{L^2}$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = A + Bu - u^2$$

Soluzione: $\quad u(\theta) = \frac{B}{2} - \sqrt{A + \frac{B^2}{4}}\cos\theta$

■ Verifica: $\quad \frac{du}{d\theta} = \left(A + \frac{B^2}{4}\right)^{1/2}\sin\theta \Rightarrow$

$$\left(A + \frac{B^2}{4}\right)\sin^2\theta = A + \frac{B^2}{2} - \cancel{B\sqrt{A+\frac{B^2}{4}}\cos\theta}$$

$$- \frac{B^2}{4} - \left(A + \frac{B^2}{4}\right)\cos^2\theta + \cancel{B\sqrt{A+\frac{B^2}{4}}}\cos\theta$$

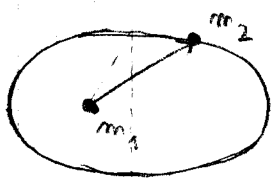
$$= \left(A + \frac{B^2}{4}\right)(1 - \cos^2\theta) \quad ■$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r(\theta) = \dfrac{1}{\frac{B}{2} - \sqrt{A + \frac{B^2}{4}}\cos\theta} = \dfrac{l}{1 - e\cos\theta} \\[2ex] l = \dfrac{2}{B} = \dfrac{L^2}{\mu k} \\[2ex] e = \dfrac{2}{B}\sqrt{A + \frac{B^2}{4}} = \sqrt{1 + \dfrac{4A}{B^2}} = \sqrt{1 + \dfrac{\cancel{8}^{2} E \cancel{\mu} L^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{L^2}\,\cancel{4}\mu^{\cancel{2}} k^2}} \\[2ex] \quad = \sqrt{1 + \dfrac{2EL^2}{\mu k^2}} \, . \end{cases}$$

$\boxed{e=0}$ $\quad 1+\frac{2EL^2}{\mu k^2}=0 \qquad E=-\frac{1}{2}\frac{\mu k^2}{L^2} \qquad r=\ell=\text{cost}$

$\Rightarrow$ circonferenza di raggio $\frac{L^2}{\mu k}$

$\boxed{0<e<1}$



ellisse. Ho

$$r_{max}=\frac{\ell}{1-e}$$

$$r_{min}=\frac{\ell}{1+e}$$

$\Rightarrow$ semiasse max $=\frac{r_{max}+r_{min}}{2}=\frac{\ell(1+\cancel{e})+\ell(1-\cancel{e})}{2(1-e^2)}$

$\parallel$

a

$$=\frac{\ell}{1-e^2}$$

(Relazione tra semiasse max e min dell'ellisse è $b=a\sqrt{1-e^2}$)

Altro modo di vederlo:

$$r=\frac{\ell}{1+e\cos\theta} \qquad \begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{array} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2+y^2}-ex=\ell$$

$$x^2+y^2=\ell^2+e^2x^2+2\ell e x$$

$$x^2(1-e^2)+2\ell e x+\frac{\ell^2e^2}{(1-e^2)}-\frac{\ell^2e^2}{1-e^2}+y^2=\ell^2$$

$$\left[x(1-e^2)^{1/2}+\frac{\ell e}{(1-e^2)^{1/2}}\right]^2+y^2=\ell^2\left(1+\frac{e^2}{1-e^2}\right)$$

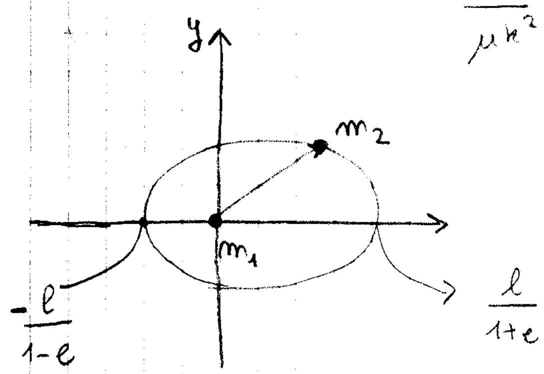
$$(1-e^2)\left[x+\frac{\ell e}{1-e^2}\right]^2+y^2=\frac{\ell^2}{1-e^2}$$

$$X=x+\frac{\ell e}{1-e^2} \qquad \frac{X^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{con}$$

$$\begin{cases} a^2 = \dfrac{\ell^2}{(1-e^2)^2} \\ b^2 = \dfrac{\ell^2}{1-e^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\ell}{1-e^2} \\ b = \dfrac{\ell}{\sqrt{1-e^2}} \end{cases} \qquad b = a\sqrt{1-e^2}$$

$$0 < e < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2} < 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{EL^2}{\mu k^2} < 0 \qquad E < 0$$



$\boxed{e > 1}$ $$\begin{cases} r \to \infty \\ \cos\theta = \dfrac{1}{e} \end{cases} \Rightarrow \text{iperbole}$$

Ma vediamola meglio:

$$\sqrt{x^2+y^2} - ex = \ell$$

$$x^2(1-e^2) + 2\ell e x + \frac{\ell^2 e^2}{(1-e^2)} - \frac{\ell^2 e^2}{(1-e^2)} + y^2 = \ell^2$$

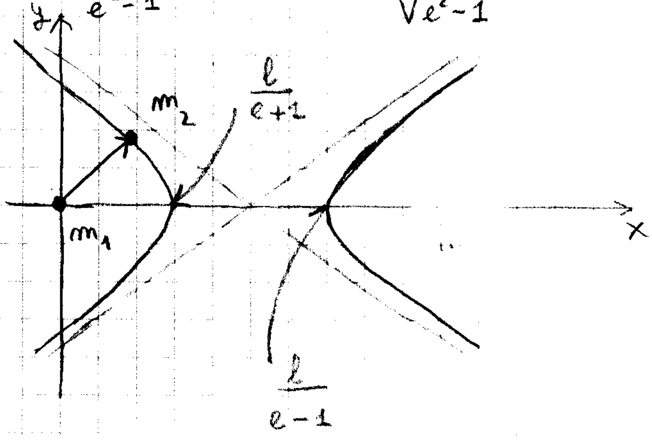
Nota che $1 - e^2 < 0 \Rightarrow$

$$x^2(e^2-1) - 2\ell e x + \frac{\ell^2 e^2}{e^2-1} - \frac{\ell^2 e^2}{e^2-1} - y^2 = -\ell^2$$

$$(e^2-1)\left[x - \frac{\ell e}{e^2-1}\right]^2 - y^2 = -\ell^2\left(1 - \frac{e^2}{e^2-1}\right) = +\frac{\ell^2}{e^2-1}$$

$$X = x - \frac{\ell e}{e^2-1} \qquad \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con}$$

$a = \frac{l}{e^2-1}$, $b = \frac{l}{\sqrt{e^2-1}}$ $\longrightarrow$ Iperbole

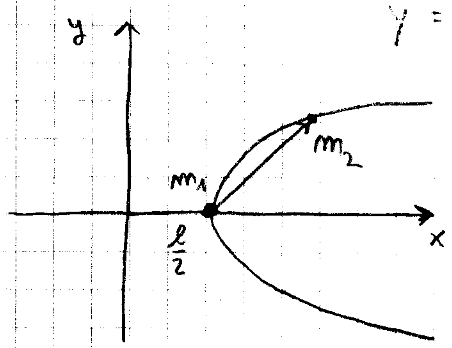


$$y = 0 \Rightarrow x^2 = a^2$$
$$X = \pm a$$
$$x - \frac{le}{e^2-1} = \pm \frac{l}{e^2-1}$$
$$(e^2-1)\,x = \pm l + le$$
$$x = \begin{cases} \frac{l}{e-1} \\ \frac{l}{e+1} \end{cases}$$

$$e > 1 \Rightarrow 1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2} > 1 \qquad E > 0$$

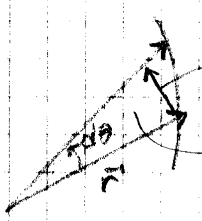
$\boxed{e = 1}$ $\quad r = \frac{l}{1-\cos\theta} \Rightarrow \theta = 0 \quad r \to \infty$ parabola

Di nuovo:
$$\sqrt{x^2+y^2} - x = l$$
$$\cancel{x^2} + y^2 = l^2 + \cancel{x^2} - 2lx$$
$$y^2 = l^2 - 2lx = l\,\underbrace{(l-2x)}_{X} \qquad y^2 = lX$$



$$e = 1 \Rightarrow 1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2} = 1 \Rightarrow E = 0$$

Ultima cosa da notare: supponiamo $E<0$ ($\Rightarrow$ orbite chiuse)



$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta \Rightarrow \dot{S} \equiv \text{velocità areolare} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{cost}}{\underset{\parallel}{L}} = \mu r^2 \dot{\theta} = 2\mu \dot{S} \Rightarrow \dot{S} \text{ è costante}$$

$$\dot{S} = \frac{S}{T} \overset{\text{ellisse}}{=} \frac{\pi a b}{T} \Rightarrow T = \frac{2\mu\pi a b}{L} = \frac{2\mu\pi a\, a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{k\mu l}} = \frac{2\mu\pi a^2 \cancel{\sqrt{1-e^2}}}{\sqrt{k\mu\, a\,(1-e^2)}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}}\, a^{3/2}$$

Supponi $m_1 \gg m_2 \Rightarrow \mu = m_2$ ← caso delle leggi di Keplero

1) Pianeti si muovono su un'orbita ellittica di cui il sole occupa uno dei fuochi [E cost. del moto < 0]

2) La velocità areolare è costante [L è cost. del moto]

3) $T \propto a^{3/2}$ [Conseguenza delle precedenti]

Infine

$$a = \frac{l}{1-e^2} = \frac{\cancel{L}^2}{\mu \cancel{k}} \, \frac{1}{\cancel{1} - \cancel{1} - \frac{2E\cancel{L^2}}{\cancel{\mu} k^2}} = \frac{k}{2|E|}$$

$\Rightarrow$ a dipende solo da E !!