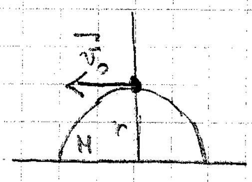
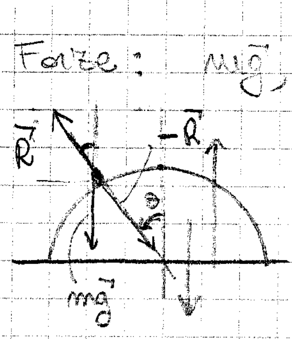
Esercizio della pallina su semisfera mobile

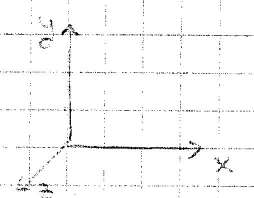


1) A che angolo si stacca?

Conservazione dell'energia si può applicare?

Forze: $m\vec{g}$, $M\vec{g}$, $\vec{R}_z$, $\vec{R}$, $-\vec{R}$

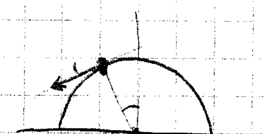




$m\vec{g}$ e $M\vec{g}$ conservative, le altre non fanno lavoro $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + mgr = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v^2 + mgr\cos\theta \qquad (1)$$

So che $\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega}\times\vec{r}$ $\qquad \vec{\omega} = +\dot{\theta}\,\hat{z}$



Inoltre lungo l'asse $\hat{x}$ ho conservazione della q.d.m. totale (forze esterne sono lungo y) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} MV + m\dot{x} = -mv_0 \\ \dot{x} = V - r\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} = -r\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{aligned} & MV + m\left(+V - \dot{\theta} r\cos\theta\right) = -mv_0 \\ & V = -\frac{m}{m+M}\left(v_0 - r\dot{\theta}\cos\theta\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (1) diventa:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + mgr = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m\left(V^2 + \dot{\theta}^2 r^2 - 2V\dot{\theta} r\cos\theta\right) + mgr\cos\theta$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + m g r = \frac{1}{2} \cancel{(m+M)} \frac{m^2}{(m+M)^{\cancel{2}}} (v_0 - r\dot{\theta}\cos\theta)^2$$

$$+ \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - m r\dot{\theta}\cos\theta \frac{-m}{m+M} (v_0 - r\dot{\theta}\cos\theta) + mgr\cos\theta$$

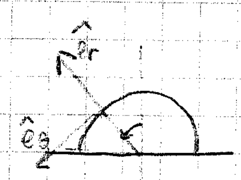
$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2 + \cancel{m} g r = \frac{1}{2} \frac{m^{\cancel{2}}}{M_T} v_0^2 + \cancel{\frac{1}{2} \frac{m^2}{M_T} r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\theta} - \cancel{\frac{m^2}{M_T} v_0 r\dot{\theta}\cos\theta}$$

$$+ \frac{1}{2} \cancel{m} r^2 \dot{\theta}^2 + \cancel{\frac{m^2}{M_T} v_0 r\dot{\theta}\cos\theta} - \cancel{1}^{1/2} \frac{m^{\cancel{2}}}{M_T} r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\theta + \cancel{m} g r \cos\theta$$

$$\frac{1}{2} v_0^2 \left(\frac{M + \cancel{m} - \cancel{m}}{M_T} \right) + g r (1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}^2 \left[\frac{m}{M_T} \cos^2\theta - 1 \right] = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{M}{M_T} v_0^2 + g r (1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}^2 \left[\frac{m}{M_T} \cos^2\theta - 1 \right] = 0 \qquad (2)$$

Condizione perché si stacchi: $R = 0 \Rightarrow$



$\hat{e}_r$

$$m a_r = R - m g \cos\theta \qquad \in R \text{ semisfera}$$

$$a_r = -\omega^2 r = -r \dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \quad R = 0 \quad \Rightarrow \quad \cancel{m} r \dot{\theta}^2 = \cancel{m} g \cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \frac{M}{M_T} v_0^2 + g r - \cancel{g r \cos\theta} + \frac{1}{2} \frac{m}{M_T} g r \cos^3\theta - \cancel{\frac{1}{2}}^{3/2} r g \cos\theta = 0$$

$$\boxed{\frac{m}{M_T} g r \cos^3\theta - 3 g r \cos\theta + \frac{M}{M_T} v_0^2 + 2 g r = 0} \qquad (3)$$

Eq. difficile. Più semplice per $M \gg m \Rightarrow$

$$-3 \cancel{g r} \cos\theta + 2 \cancel{g r} + \frac{v_0^2}{g r} = 0$$

$$3 \cos\theta = 2 + \frac{v_0^2}{g r} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \left(\frac{2 g r + v_0^2}{3 g r} \right)$$

2) Quanto deve essere v_0 perché si stacchi subito? 3

Da (3) con $\theta = 0$

$$\underbrace{\frac{m}{M_T} g r - \cancel{2} g r}\; + \frac{M}{M_T} v_0^2 \; \cancel{+ 2 g r} = 0$$

$$\left(\frac{\cancel{m} - \cancel{m} - M}{M_T} \right) g r + \frac{M}{\cancel{M_T}} v_0^2 = 0$$

$$v_0 = \sqrt{g r}$$

3) Trovare le eqn. del moto finché m resta attaccato a M.

a) I eqn. cardinale:

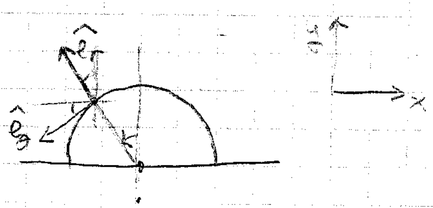
$$\begin{cases} m \ddot{x} = -R \sin\theta \\ m \ddot{y} = R \cos\theta - m g \\ M \ddot{x}_M = + R \sin\theta \\ M \ddot{y}_M = 0 = -M g + R_t - R \cos\theta \end{cases}$$

$$m \ddot{x} + M \ddot{x}_M = 0 \qquad (\text{f. esterne solo} \parallel \hat{x})$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{tr} + \vec{a}'$$

Nota che $\vec{v}' = r \dot{\theta}\, \hat{e}_\theta$

$$\vec{a}' = -r \dot{\theta}^2 \hat{e}_r + r \ddot{\theta}\, \hat{e}_\theta$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \ddot{x}_M + r \dot{\theta}^2 \sin\theta - r \ddot{\theta} \cos\theta \\ \ddot{y} = -r \dot{\theta}^2 \cos\theta - r \ddot{\theta} \sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_H + m r\dot{\theta}^2 \sin\theta - m r\ddot{\theta}\cos\theta = -R\sin\theta \\ \qquad - m r\dot{\theta}^2\cos\theta - m r\ddot{\theta}\sin\theta = R\cos\theta - mg \\ M\ddot{x}_H = R\sin\theta \end{cases}$$

Risolvo

$$+\frac{m}{M}R\sin\theta + m r\dot{\theta}^2\sin\theta - m r\ddot{\theta}\cos\theta = -R\sin\theta$$

$$\cos\theta\left(R\sin\theta\left(1+\frac{m}{M}\right)\right) = \left[-m r\dot{\theta}^2\sin\theta + m r\ddot{\theta}\cos\theta\right]\cos\theta$$

$$-\cancel{m} r\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta + \cancel{m} r\ddot{\theta}\sin^2\theta =$$

$$\sin\theta\left(1+\frac{m}{M}\right)\left(\cancel{m}g - \cancel{m}r\dot{\theta}^2\cos\theta - \cancel{m}r\ddot{\theta}\sin\theta\right)$$

$$r\ddot{\theta}\left(\underbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}_{1} + \sin^2\theta\frac{m}{M}\right)$$

$$+ r\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta\left[\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{m}{M}\right] - g\sin\theta\left(1+\frac{m}{M}\right) = 0$$

$$r\ddot{\theta}\left(\underbrace{1+\frac{m}{M}}_{\frac{m+M}{M}} - \frac{m}{M}\cos^2\theta\right)\frac{M}{m+M} + r\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta\,\frac{m}{\cancel{M}}\,\frac{\cancel{M}}{m+M}$$

$$- g\sin\theta = 0$$

$$r\ddot{\theta}\left(1 - \frac{m}{m+M}\cos^2\theta\right) + r\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta\,\frac{m}{m+M} - g\sin\theta = 0$$

$\dot{\theta}^2$ si ottiene dall'Eq. (2)

b) dall' Eq. (2) : $E = \text{cost}$ $\Rightarrow$ $\frac{dE}{dt} = 0$

$$+g\cancel{r}\sin\theta\,\dot{\theta} + \frac{1}{\cancel{2}}r^{\cancel{2}}\,\cancel{2}\dot{\theta}\,\ddot{\theta}\left[\frac{m}{m+M}\cos^2\theta - 1\right]$$

$$+\frac{1}{\cancel{2}}r^{\cancel{2}}\,\dot{\theta}^2\left[-\frac{m}{m+M}\,\cancel{2}\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}\right] = 0$$

$$r\ddot{\theta}\left[1-\frac{m}{m+M}\cos^2\theta\right]+r\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta\,\frac{m}{M+m}-g\sin\theta=0$$

Assai più veloce che con a) !!

$$r\dot{\theta}^2=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\,\frac{M}{M_T}\,\frac{v_0^2}{r}+\frac{2g}{r}(1-\cos\theta)}{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{r}\left(\frac{m}{M_T}\cos^2\theta-1\right)}$$

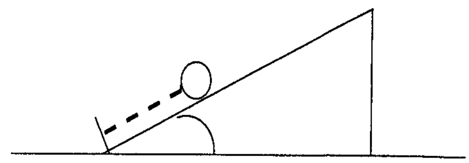
$$\Rightarrow\quad r\ddot{\theta}\left[1-\frac{m}{m+M}\cos^2\theta\right]+\frac{m}{m+M}\sin\theta\cos\theta\;\frac{\frac{M}{M+m}\frac{v_0^2}{r}+\frac{2g}{r}(1-\cos\theta)}{\left(\frac{m}{m+M}\cos^2\theta-1\right)}$$

$$-g\sin\theta=0$$

Compito A1 07/07/04

1

Esercizio 2: Si consideri il sistema in figura: un cuneo di massa pari a 3.70 kg è appoggiato su un piano orizzontale liscio. Sul cuneo è attaccata una molla (mostrata in figura dalla linea tratteggiata) e alla molla è appoggiata una pallina di massa 0.910 kg. Si trascurino le forze di attrito tra la pallina e il cuneo. La molla ha costante elastica pari a 1800 N/m e lunghezza a riposo pari a 0.700 m. L'angolo di inclinazione del cuneo è di 0.640 Rad e l'ipotenusa del cuneo è di 1.90 m. Determinare:

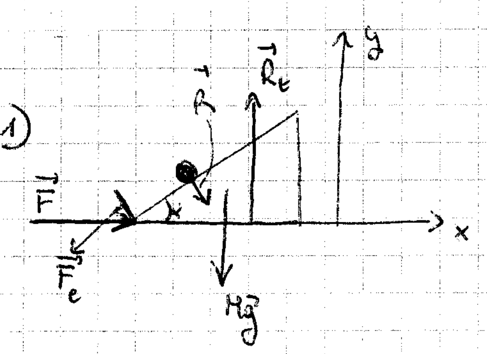


1. il modulo della forza esterna F che si deve applicare al cuneo per mantenerlo fermo, quando la lunghezza della molla è pari a 0.270 m (5,-1)
   $|F|$ [N] = $\boxed{616}$ A $\boxed{1160}$ B $\boxed{238}$ C $\boxed{292}$ D $\boxed{616}$ E $\boxed{397}$
2. la minima lunghezza della molla affinché la pallina raggiunga la sommità del cuneo, in assenza della forza F (5,-1)
   l_{min} [m] = $\boxed{0.612}$ A $\boxed{0.160}$ B $\boxed{0.177}$ C $\boxed{0.115}$ D $\boxed{0.303}$ E $\boxed{0.612}$

Si rilascia il sistema cuneo+pallina da fermo, con la molla completamente compressa. Determinare:

3. il modulo della velocità del cuneo dopo che la pallina si è staccata dal cuneo stesso (5,-1)
   $|v_c|$ [m/s] = $\boxed{5.21}$ A $\boxed{5.21}$ B $\boxed{21.7}$ C $\boxed{1.23}$ D $\boxed{2.75}$ E $\boxed{9.79}$

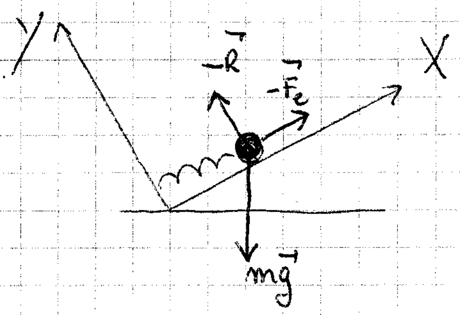
1)



Cuneo:

$$M\vec{a}_c = 0 = \vec{F} + \vec{F}_e + M\vec{g} + \vec{R} + \vec{R}_t$$

lungo x $\quad F - F_e \cos\alpha + R\sin\alpha = 0$



Pallina

$$m\vec{a}_p = -\vec{R} - \vec{F}_e + m\vec{g}$$

lungo Y $\quad a_p = 0 \Rightarrow \quad R = mg\cos\alpha$

Si sa che $\quad F_e = k(l_o - \tilde{l}) \Rightarrow$

$$F = F_e\cos\alpha - R\sin\alpha = k(l_o - \tilde{l})\cos\alpha - mg\cos\alpha\sin\alpha$$

2) Conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}k(l_m - l_o)^2 + mg\,l_m\sin\alpha + \frac{1}{2}(M+m)v_o^2 =$$

$$\frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}mv_m^2 + mg\,l\sin\alpha$$

$$\begin{cases} v_{m_x} = v'_{m_x} + v_M \\ v_{m_y} = v'_{m_y} \end{cases}$$

Conservazione della quantità di moto lungo x :

$$M v_M + m v_{m,x} = (M+m)\, v_M' + v_{m,x}'\, m = (M+m)\, v_0$$

La pallina raggiunge la sommità del cuneo con $v_{m,x}' = v_{m,y}' = 0$

$$\Rightarrow \quad v_M = v_0 = v_m \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} k (l_m - l_0)^2 + mg\, l_m \sin\alpha - mg\, l \sin\alpha = 0$$

$$\frac{1}{2} k\, l_m^2 - k l_0 l_m + \frac{1}{2} k l_0^2 + mg\, l_m \sin\alpha - mg\, l \sin\alpha = 0$$

$$k l_m^2 - 2 (k l_0 - mg \sin\alpha)\, l_m + k l_0 - 2 mg\, l \sin\alpha = 0$$

$$l_m = \frac{(k l_0 - mg \sin\alpha) \pm \sqrt{(k l_0 - mg\sin\alpha)^2 - k^2 l_0^2 + 2 k mg\, l \sin\alpha}}{k}$$

$$= \frac{k l_0 - mg \sin\alpha}{k} \pm \frac{1}{k} \left(\cancel{k^2 l_0^2} - 2 mg k l_0 \sin\alpha + m^2 g^2 \sin^2\alpha - \cancel{k^2 l_0^2} + 2 mgkl \sin\alpha \right)^{1/2}$$

$$= l_0 - \frac{mg \sin\alpha}{k} \pm \frac{1}{k} \sqrt{m^2 g^2 \sin^2\alpha + 2k\, mg \sin\alpha\, (l - l_0)}$$

soluzione non fisica $(l_m > l_0 !)$

$$= l_0 - \frac{mg\sin\alpha}{k} \left(1 \cancel{-} + \sqrt{1 + \frac{2k(l-l_0)}{mg \sin\alpha}} \right)$$

3) $$\frac{1}{2} k l_0^2 = \frac{1}{2} M v_M^2 + \frac{1}{2} m v_m^2 + mg\, l \sin\alpha$$

$$\begin{cases} M v_M + m v_{m,x} = (M+m)\, v_M + m v_{m,x}' = 0 \\ v_{m,y} = v_{m,y}' = v_{m,x}' \operatorname{tg}\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad v_{m,x}' = -\frac{M+m}{m} v_M \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_{m,x} = -\dfrac{M}{m} v_M \\ v_{m,y} = -\dfrac{M+m}{m} v_M \operatorname{tg}\alpha \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} k l_0^2 = \frac{1}{2} M v_M^2 + \frac{1}{2} \cancel{m} \left(\frac{M^2}{m^{\cancel{2}}} v_M^2 + \frac{(M+m)^2}{m^2} v_M^2 \, tg^2\alpha \right) + mg\, l \sin\alpha$$

$$\frac{1}{2} k l_0^2 - mg\, l \sin\alpha = \frac{1}{2} M v_M^2 \left(1 + \frac{M}{m} + \frac{(m+M)^2}{m M} tg^2\alpha \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{M}{m} (m+M) v_M^2 \left(1 + \frac{m+M}{M} tg^2\alpha \right)$$

$$\Rightarrow \quad v_M = \sqrt{\frac{m}{m+M} \; \frac{k l_0^2 - 2\, mg\, l \sin\alpha}{M + (m+M)\, tg^2\alpha}}$$