

Esercizio 3: Si considerino due corpi di massa uguale e pari a 1.70 kg che interagiscono con una forza diretta lungo la congiungente dei due corpi, dipendente dalla distanza relativa r , della forma: 1

$$F(r) = \begin{cases} -k_1 r & \text{se } r < a \\ +k_2/r^2 & \text{altrove} \end{cases} \quad (1)$$

con r misurata in m, $F(r)$ in N, e con $k_1 = 2.80 \text{ N/m}$, $k_2 = 2.90 \text{ N m}^2$ e $a = 1.60 \text{ m}$. Si noti che la forza è repulsiva per distanze uguali o superiori ad a , attrattiva per distanze inferiori ad a .

1. Determinare quanto vale l'energia potenziale quando le masse si trovano a una distanza pari ad $a/2$, assumendo che sia nulla per distanze infinite (2,-1)

$U [\text{J}] =$ A -5.38 B -1.09 C -2.69 D 0.896 E -0.875

Supponendo che inizialmente una delle due masse sia ferma nell'origine e l'altra arrivi dall'infinito con velocità pari a 2.80 m/s e parametro d'impatto 1.40 m, determinare:

2. La velocità del centro di massa (1,-1)

$v [\text{m/s}] =$ A 0.307 B 2.65 C 0.635 D 3.92 E 1.40

3. Il momento angolare del sistema in un sistema di riferimento in cui il centro di massa è in quiete (1,-1)

$L [\text{kg m}^2/\text{s}] =$ A 3.33 B 47.2 C 3.80 D 35.2 E 6.66

4. La minima distanza relativa raggiunta dalle due masse nel loro moto successivo (3,-1)

$d [\text{m}] =$ A 0.721 B 0.870 C 1.90 D 1.53 E 0.580

5. La velocità che deve avere il corpo incidente tale per cui le masse, con lo stesso parametro di impatto dato precedentemente, arrivino a "sentire" la parte di forza attrattiva (3,-1)

$v [\text{m/s}] =$ A 0.855 B 4.27 C 1.65 D 10.2 E 3.58

$$1) \quad U(r) - U(r_0) = - \int_{r_0}^r F(x) dx$$

$$\Rightarrow r \geq a \quad U(r) - U(a) = - \int_a^r \frac{k_2}{x^2} dx = \frac{k_2}{r}$$

$$\Rightarrow U(a) = \frac{k_2}{a}$$

$$r < a \quad U(r) - U(a) = - \int_a^r (-k_1) x dx = \frac{1}{2} k_1 (r^2 - a^2)$$

$$\Rightarrow U(r) = \frac{1}{2} k_1 (r^2 - a^2) + \frac{k_2}{a}$$

$$\Rightarrow r = \frac{a}{2} \quad U\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{3}{8} k_1 a^2 + \frac{k_2}{a}$$

2)

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m \vec{v}_0}{2m} = \frac{\vec{v}_0}{2}$$

3)

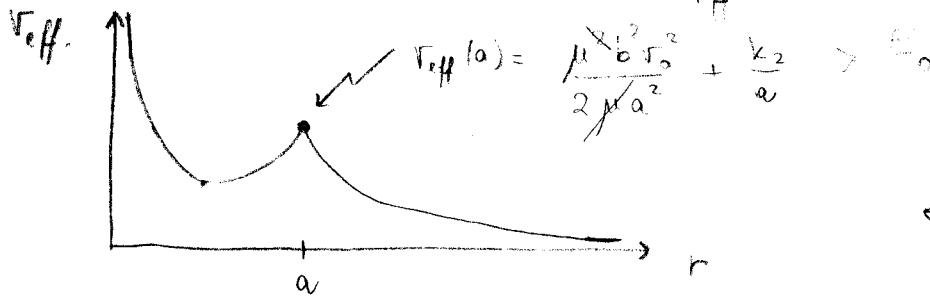
$$\vec{F} = \vec{F}_2 - \vec{F}_1$$

$$\vec{v}_r = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \vec{v}_r = \text{cost} \Rightarrow \text{a } t=0 \quad L = \mu b v_0$$

$\mu = \text{massa ridotta} = \frac{m}{2}$

$$4) \quad E = \frac{1}{2} \mu v_0^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r)}_{V_{eff}(r)} \quad \text{SRCH}$$



$$r > a \quad V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{k_2}{r}$$

$$r < a \quad V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{1}{2} k_1 r^2 - \frac{1}{2} k_1 a^2 + \frac{k_2}{a}$$

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = \frac{L^2}{\mu r^3} + \frac{1}{2} k_1 r = 0$$

$$\frac{L^2}{\mu} = k_1 r^4$$

$$r^2 = \sqrt{\frac{L^2}{\mu k_1}} = \sqrt{\frac{\mu b^2 v_0^2}{\mu k_1}}$$

Supponiamo $\sqrt{\frac{b^2 v_0^2}{k_1}} < a^2$ (verificato dai dati del p.c.)

Supponiamo anche che

$$E_0 < \frac{L^2}{2\mu a^2} + V(a) \quad (\text{pure verificato})$$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{k_2}{r} \quad \text{per } r_{min} \text{ vale } > a$$

\Rightarrow

$$2\mu E_0 r^2 - 2\mu k_2 r - L^2 = 0$$

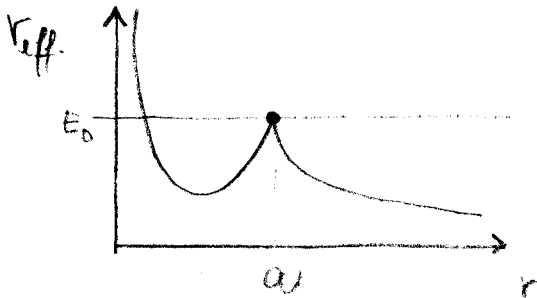
$$r = \frac{\mu k_2 \pm \sqrt{\mu^2 k_2^2 + 2\mu E_0 L^2}}{2\mu E_0}$$

$$r = \frac{\cancel{\mu} k_2}{\cancel{2\mu} \cancel{\frac{1}{2}} \mu v_0^2} + \sqrt{\frac{\mu^2 k_2^2}{\cancel{4\mu^2} \cancel{\frac{1}{4}} \mu^2 v_0^4} + \frac{\cancel{2\mu} \cancel{\frac{1}{2}} \mu v_0^2 \cancel{L^2} v_0^2}{\cancel{4\mu^2} \cancel{\frac{1}{4}} \mu^2 v_0^4}}$$

$$= \frac{k_2}{\mu v_0^2} + \sqrt{\frac{k_2^2}{\mu^2 v_0^4} + b^2}$$

$$= \frac{k_2}{\mu v_0^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\mu^2 b^2 v_0^4}{k_2^2}} \right]$$

5.)

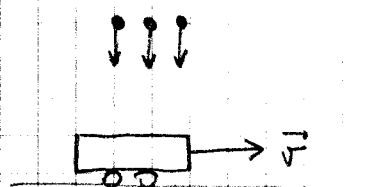


voglio

$$\frac{1}{2} \mu v_0^2 = V_{\text{eff}}(a) = \frac{1}{2} \mu \frac{b^2 v_0^2}{a^2} + \frac{k_2}{a}$$

$$\frac{1}{2} \mu \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) v_0^2 = \frac{k_2}{a}$$

$$v_0^2 = \frac{2k_2}{\mu a} \frac{a^2}{a^2 - b^2} = \frac{2k_2 a}{\mu(a^2 - b^2)}$$



$$m_0 \quad \vec{v}_0$$

$\vec{u}_0 \equiv$ velocità delle gocce d'acqua

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{F} dt = d(m\vec{v}) = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) \\ = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - [m\vec{v} + dm\vec{u}]$$

$$\vec{F} dt = \cancel{m\vec{v}} + m d\vec{v} + dm\vec{v} + \underbrace{dm d\vec{v}}_{\text{trascurato}} - \cancel{m\vec{v}} - dm\vec{u}$$

$$= m d\vec{v} + dm(\vec{v} - \vec{u})$$

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} - \vec{u}) \frac{dm}{dt}$$

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{v}_{rel} \quad \vec{v}_{rel} = \vec{v} \text{ di } dm \text{ relativa a } m$$

$$\boxed{\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_{rel} \frac{dm}{dt}}$$

Se carrello perde acqua:

$$\vec{F} dt = (m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - m\vec{v} + dm\vec{u} \\ = m d\vec{v} - dm\vec{v} + dm\vec{u}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}_{rel} \frac{dm}{dt}$$

$dm > 0$ ma può essere

$\Rightarrow F_{est}$ sono forze e Reazioni (non c'è attrito) \Rightarrow

$$m \frac{dv_x}{dt} - \frac{dm}{dt} v_{rel,x} = 0$$

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{v}_{rel} \Rightarrow v_{rel,x} = -v_x \Rightarrow$$

$$m \frac{dv_x}{dt} = -v_x \frac{dm}{dt}$$

$$\frac{dv_x}{v_x} = - \frac{dm}{m} \Rightarrow \int_{v_0}^{v_f} \frac{dv}{v} = - \int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m}$$

$$\ln\left(\frac{v_f}{v_0}\right) = \ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right)$$

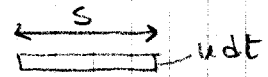
$$v_f = v_0 \quad \frac{m_0}{m_f}$$

$$v(t) = v_0 \frac{m_0}{m(t)}$$

$$dm = \rho S u dt$$

$$\Downarrow$$

$$m(t) = m_0 + \rho S u t$$



$$\Rightarrow$$

$$v(t) = v_0 \frac{m_0}{m_0 + \rho S u t}$$