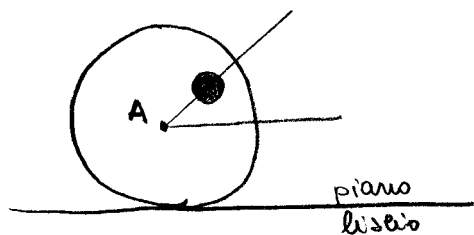


## Esercizio del cilindro bucato

1



lunghezza  $L$ , raggio  $R$ , densità  $\rho$

Buco di raggio  $a$  a distanza  $\frac{R}{2}$  dal centro  $[a < \frac{R}{2}]$

1) dove è il CM:

Considero un cilindro somma di due cilindri: quello dato + quello "mancaante", con lo stesso materiale.

$r_{CM|tot} = 0 \leftarrow$  il CM di questo cilindro è in  $A$  (mie origine)

$$\Rightarrow r_{CM|tot} = 0 = m r_{CM} + m_{buco} r_{CM,buco}$$

$$m = \pi (R^2 - a^2) L \rho$$

$$m_{buco} = \pi a^2 L \rho \quad \Rightarrow$$

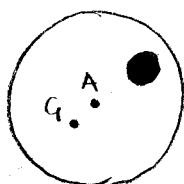
$$r_{CM,buco} = R/2$$

$$r_{CM} = - \frac{\cancel{a^2} \cancel{\rho}}{\cancel{\pi (R^2 - a^2)} \cancel{\rho}}$$

$$\frac{R}{2} = - \frac{a^2}{R^2 - a^2} \frac{R}{2}$$

$\downarrow$   
 $d$

$\Rightarrow$



2) Quant'è  $I_A$ :  $I_A = I_G + m d^2$

Per trovare  $I_A$ :

$$I_{tot} = I_A + I_{A|buco} = I_A + \frac{1}{2} m_{buco} a^2 + m_{buco} \frac{R^2}{4}$$
$$= \frac{1}{2} m_{tot} R^2$$

$$\frac{1}{2} (m + m_{buco}) R^2 = I_A + \frac{1}{2} m_{buco} a^2 + m_{buco} \frac{R^2}{4}$$

$$\frac{1}{2} m v R^2 + \frac{1}{4} m_{\text{buclo}} R^2 - \frac{1}{2} m_{\text{buclo}} a^2 = I_A$$

$$I_A = \frac{1}{2} \pi L \rho (R^2 - a^2) R^2 + \frac{1}{4} \pi L \rho R^2 a^2 - \frac{1}{2} \pi L \rho a^4$$

$$= \frac{1}{4} \pi L \rho \left[ 2R^4 - \cancel{a^2 R^2} + \cancel{R^2 a^2} - 2a^4 \right]$$

$$= \frac{1}{4} \pi L \rho \left[ 2R^4 - a^2 R^2 - 2a^4 \right]$$

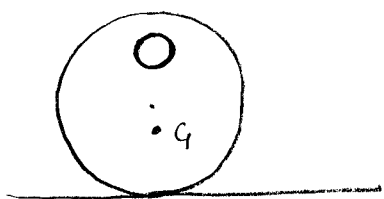
$$I_G = I_A - \pi L \rho \cancel{(R^2 - a^2)} \frac{R^2}{4} \frac{a^4}{(R^2 - a^2)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \pi L \rho \left( 2R^4 - a^2 R^2 - 2a^4 - \frac{a^4 R^2}{R^2 - a^2} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \pi L \rho \frac{1}{R^2 - a^2} \left( 2R^6 - 2R^4 a^2 + \cancel{a^4 R^2} - a^2 R^4 - 2a^4 R^2 + 2a^6 - \cancel{a^4 R^2} \right)$$

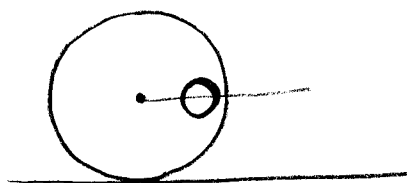
$$= \frac{1}{4} \pi L \rho \frac{1}{R^2 - a^2} \left( 2R^6 + 2a^6 - 3a^2 R^4 - 2a^4 R^2 \right)$$

4) Qual è la posizione di equilibrio stabile?



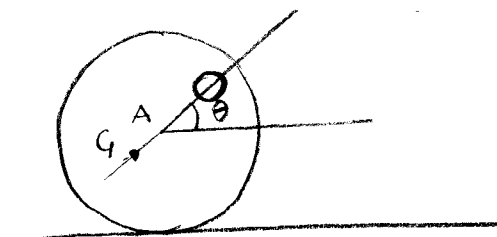
$G$  è il più basso possibile!

5) Adesso supponiamo a  $t=0$



e poi lascio libero

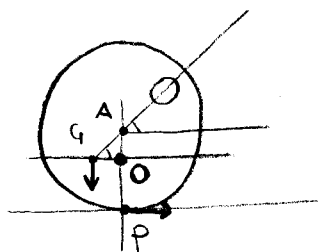
Ad un certo  $\theta$



Qual è il centro istantaneo di rotazione?

$G$  si può muovere solo in verticale (forze esterne sono verticali)

$\Rightarrow$



$\vec{v}_P$  può essere solo orizzontale  
(Perché se  $\vec{v}_P$  verticale, il disco non sarebbe rigido!)

$\Rightarrow O \equiv$  centro istantaneo di rot.

$$\Rightarrow \frac{v_A}{v_G} = \frac{OA \dot{\theta}}{OG \dot{\theta}} = \frac{d \sin \theta}{d \cos \theta} = \tan \theta$$

$\dot{\theta}?$

$$\frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 - m g d \sin \theta = 0$$

$$I_O = I_G + m d^2 \cos^2 \theta \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2mgd \sin \theta}{I_G + md^2 \cos^2 \theta}}$$

$$v_G = d \cos \theta \dot{\theta} = d \cos \theta \sqrt{\frac{2mgd \sin \theta}{I_G + md^2 \cos^2 \theta}}$$

$\ddot{\theta}?$

Dall'energia:  $\frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m d^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 - mgd \sin \theta = 0$

$$I_G \dot{\theta} \ddot{\theta} + \frac{1}{2} m d^2 \cancel{\cos \theta \sin \theta} (-\dot{\theta}) \dot{\theta}^2$$

$$+ \frac{1}{2} m d^2 \cos^2 \theta \cancel{\dot{\theta} \ddot{\theta}} - mgd \cos \theta \dot{\theta} = 0$$

$$[I_G + m d^2 \cos^2 \theta] \ddot{\theta} = mgd \cos \theta + m d^2 \cos \theta \sin \theta \dot{\theta}^2$$

$$\ddot{\theta} = \frac{mgd \cos \theta + m d^2 \cos \theta \sin \theta \dot{\theta}^2}{I_G}$$

Dal mom. angolare

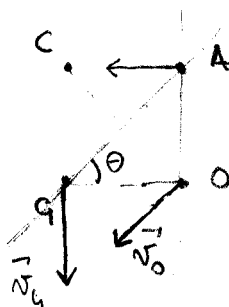
$$\hat{L}_z I_G \ddot{\theta} = \vec{H}_0 + \vec{v}_0 \times \vec{Q}$$

$$\vec{Q} = m \vec{v}_G$$

$$\vec{v}_0 = ?$$

Moto di O:

AQ è fisso  $\Rightarrow$

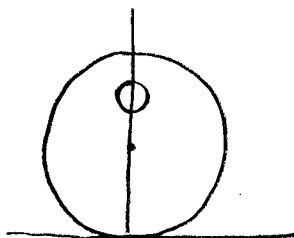


$$v_0 = d \dot{\theta}$$

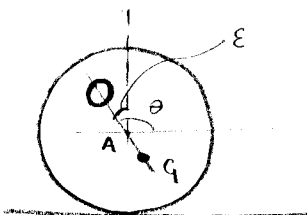
$$\Rightarrow |\vec{v}_0 \times \vec{P}| = m d \dot{\theta} d \cos \theta \dot{\theta} \sin \theta$$

$\Rightarrow$  si ritrova la soluzione di sopra.

6) Abbiamo detto che l'equilibrio è dato da



Supponiamo di spostare il cilindro "di poco" dalla posizione di equilibrio



$$\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$$

$$\ddot{\theta} = \frac{mgd \cos \theta + m d^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta}{I_0}$$

$$= \frac{mgd \cos \theta + m d^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta}{I_G + m d^2 \cos^2 \theta}$$

$$\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon} = \frac{-mgd \sin \varepsilon + m d^2 \dot{\varepsilon}^2 \cos \varepsilon (-\sin \varepsilon)}{I_G + m d^2 \sin^2 \varepsilon}$$

$$\ddot{\varepsilon} = - \frac{mgd \sin \varepsilon}{I_G} = - \frac{mgd}{I_G} \varepsilon$$

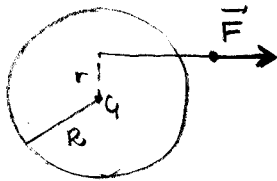
$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I_G}{mgd}}$$

periodo delle piccole oscillazioni

# Esercizio dello "yoyo"

Fis - II - 60/31e

1



Piano orizzontale liscio  $\equiv$  non c'è la gravità!

$$\begin{cases} F = m a_G \\ I_G \ddot{\theta} = F r \end{cases}$$

traslazione c.m. + rotazione intorno a G

$$I_G = I_{cilindro} + I_{filo} \rightarrow \text{teorema} = \frac{1}{2} m R^2$$

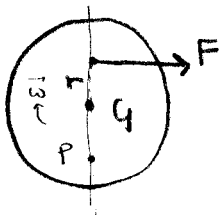
Le due eqn. sono disaccoppiate  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} a_G = \frac{F}{m} \\ \ddot{\theta} = \frac{F r}{I_G} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  se tutto partiva da fermo

$$\begin{cases} v_G = \frac{F}{m} t \\ \dot{\theta} = \frac{F r}{I_G} t \end{cases}$$

Qual è il centro istantaneo di rotazione?



P è sulle rette  $\perp$  a  $\vec{F}$ , pochi deve essere sulla retta  $\perp$  a  $\vec{v}_G$ ! Chiamo  $PQ = a$

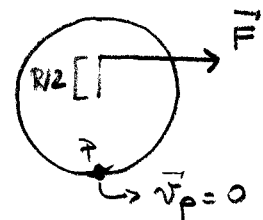
$$\vec{v}_P = 0 = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\Rightarrow \frac{F}{m} - \frac{F r}{I_G} a = 0$$

$$a = \frac{I_G}{m r} = \frac{1}{2} \frac{R^2}{r}$$

$\Rightarrow$  Per avere P sulla sup. del cilindro

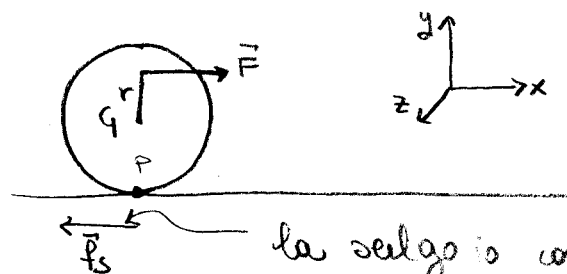
$$a = R = \frac{R^2}{2r} \Rightarrow r = \frac{R}{2} \Rightarrow$$



In questa condizione è da notare che se appoggio il disco su un piano liscio,  $\vec{v}_P = 0$  ugualmente  $\Rightarrow$  con stessa piano niente cambia!

$\Rightarrow$  la forza di attrito non c'è!  $f_s = 0$

Studiamo adesso il caso generale

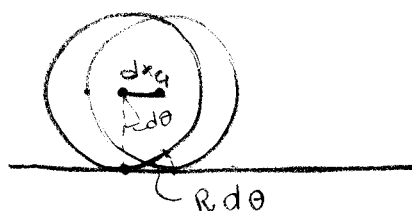


la scelta è così, non so che verso ha!

Eq. cardinali:

$$\begin{cases} F - f_s = m a_G \\ -Fr - f_s R = -I_G \ddot{\theta} \end{cases}$$

so che  $a_G = R \ddot{\theta}$  In fatti  
 $I_G = \frac{1}{2} m R^2$



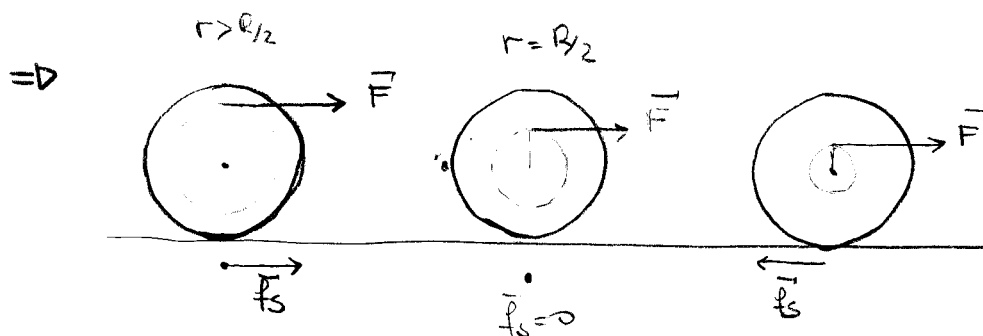
$$\Rightarrow \begin{cases} m R \ddot{\theta} = F - f_s \\ \frac{1}{2} m R^2 \ddot{\theta} = Fr + f_s R \end{cases}$$

$$\Rightarrow Fr + f_s R = F \frac{R}{2} - f_s \frac{R}{2}$$

$$\frac{3}{2} f_s R = F \left( \frac{R}{2} - r \right) \Rightarrow \text{se } r = \frac{R}{2} \quad f_s = 0$$

$$\text{se } r > \frac{R}{2} \quad f_s < 0$$

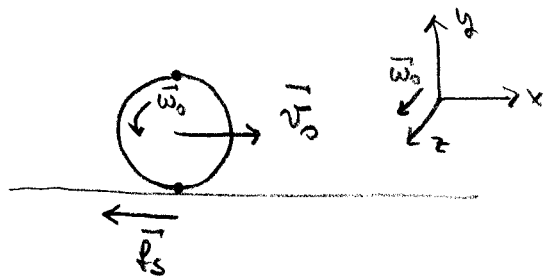
$$\text{se } r < \frac{R}{2} \quad f_s > 0$$



$$\Rightarrow f_s = \frac{2}{3} F \left( \frac{1}{2} - \frac{r}{R} \right)$$

$$m R \ddot{\theta} = F - \frac{F}{3} + \frac{2}{3} \frac{r}{R} F = \frac{2}{3} F \left( 1 + \frac{r}{R} \right)$$

Variante sempre pu coprire questo gioco della forza  $f_s$ :  
 lancio della ruota di bicicletta. Quando tocca terra  
 ho



Solo attrito che scelgo  
 come in figura

$$-f_s = m a_G$$

$$a_G = - \frac{f_s}{m}$$

$$I_G \ddot{\theta} = -f_s R$$

$$\ddot{\theta} = - \frac{f_s R}{I_G}$$

$\Rightarrow$

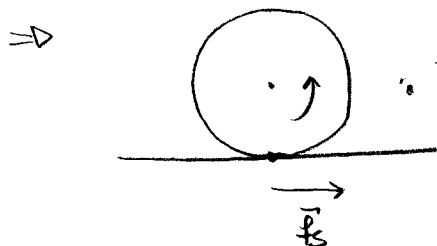
$$\begin{cases} v_G(t) = v_0 - \frac{f_s}{m} t \\ \dot{\theta}(t) = \omega_0 - \frac{f_s R}{I_G} t \end{cases}$$

Sia  $\bar{t}$  l'istante in cui  $v_G = 0 \Rightarrow \bar{t} = \frac{v_0 m}{f_s}$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(\bar{t}) = \omega_0 - \frac{v_0 m}{I_G}$$

Se ho dato  $\omega_0$  corretta,  $\dot{\theta}(\bar{t})$  può essere  $> 0$

$\Rightarrow$  la ruota torna indietro !!



$\Rightarrow$   $\vec{f}_s$  adesso è diretta  
 come  $\hat{x}$  !