

## Esercizio della molecola d'ozono

1

Supponiamo che una particella di massa  $m$  si muova in un campo centrale, il cui potenziale è

$$U(x) = -U_0 \left[ \left( \frac{r_0}{x} \right)^6 - \left( \frac{r_0}{x} \right)^{12} \right], \quad U_0 \text{ e } r_0 \text{ dati}$$

Determinare  $x_0 = \text{posizione d'equilibrio}$  1)

$\omega = \text{freq. delle piccole oscill.}$  2)

$$1) \quad U'(x) = -6 U_0 \frac{r_0^6}{x^{13}} \left[ 2 r_0^6 - x^6 \right]$$

$$U'(x) = 0 \Rightarrow x_0^6 = 2 r_0^6$$

$$2) \text{ Per trovare } \nu, \text{ o } \omega: \quad \omega = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}. \quad \text{confronti:}$$

$$U(x) = U(x_0) + \cancel{U'(x_0)(x-x_0)} + \frac{1}{2} U''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots$$

$$F = -\nabla V \Rightarrow V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2} K (x-x_0)^2$$

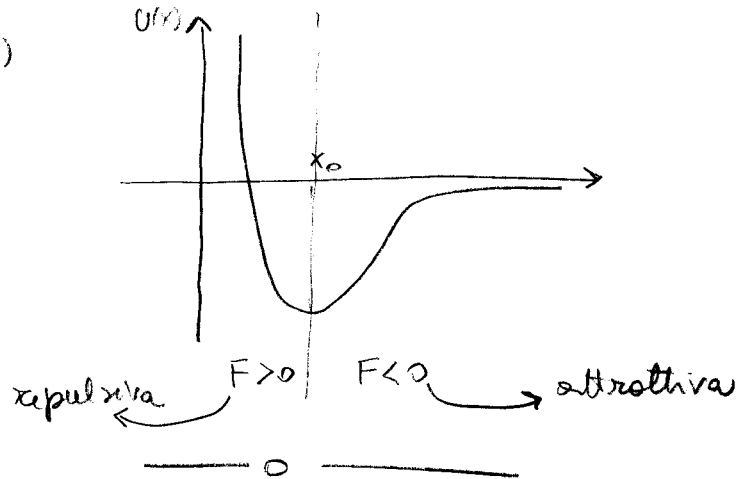
$$\Rightarrow K = U''(x_0) \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}$$

$$U''(x) = -6 U_0 \frac{r_0^6}{x^{14}} \left[ -26 r_0^6 + 7 x^6 \right]$$

$$\Rightarrow U''(x_0) = 9 \sqrt[3]{4} \frac{U_0}{r_0^2} \Rightarrow$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3}{\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \sqrt{\frac{U_0}{m r_0^2}}$$

3) grafico di  $U(x)$



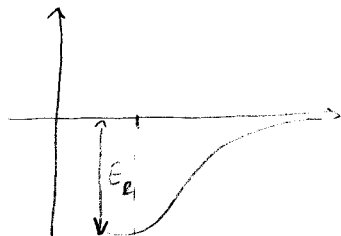
Adesso facciamo il procedimento inverso: ho la molecola di  $N_2$



So che

$$\begin{cases} m_N = 2.32 \times 10^{-26} \text{ kg} \\ x_0 = 1.09 \times 10^{-10} \text{ m} \\ \nu = 7.08 \times 10^{13} \text{ Hz} \\ E_0 = 1.18 \times 10^{-18} \text{ J} \end{cases}$$

ricaviamo  $U(x)$ . So che  $U(x)$  ha un minimo in  $x_0$  e che per  $x \rightarrow \infty$ ,  $U(x) \rightarrow 0$ .



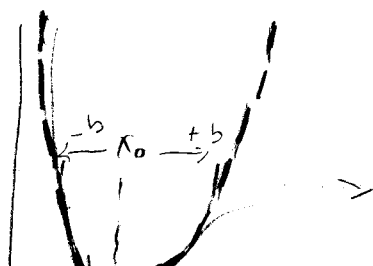
In prima approssimazione possiamo scrivere:

$$U(x) = -E_0 + \frac{1}{2} K (x - x_0)^2$$

$$K = \mu \omega^2 = \frac{m}{2} 4\pi^2 \nu^2 = 2\pi^2 m \nu^2$$

! massa ridotta!

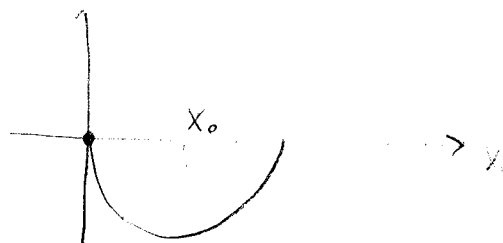
$\Rightarrow$



$$b = \sqrt{\frac{2E_0}{K}}$$

Supponiamo che di non avere  $v$  e cerchiamo una stima di  $k$ .

Assumiamo



$$U(x_0 - b) = 0 \Rightarrow$$

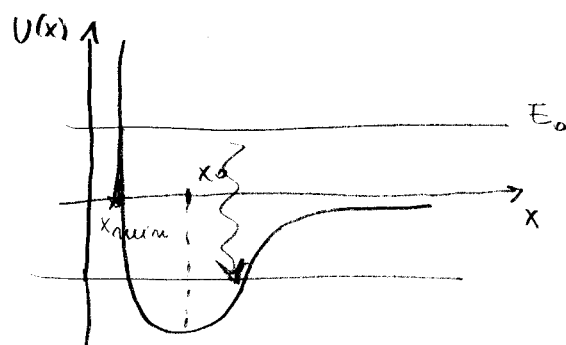
$$0 = \frac{1}{2} k x_0^2 - E_c$$

$$k = \frac{2E_c}{x_0^2}$$

$$\omega = 2\pi\nu \Rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2E_c}{x_0^2} \frac{2}{m}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{E_c}{x_0^2 m}}$$

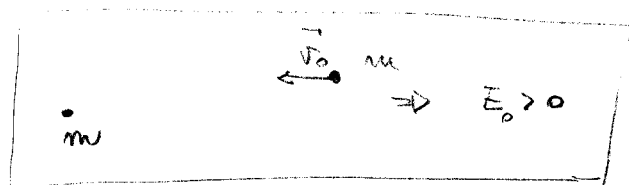
$$\nu \approx \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1.18 \times 10^{-18}}{2.32 \times 10^{-26} \cdot 1 \cdot 10^{-20}}} \approx 2 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$$

$\Rightarrow$  manca un fattore 3 circa  $\Rightarrow$  la parabola è più stretta!



Problema in questo modello:

si dà una velocità iniziale



$\Rightarrow$  arriviamo a  $x_{min}$  e poi torna indietro  $\Rightarrow$  non si ferma la molecola?!

Di fatto succede questo: arriviamo a  $x_{min}$ . Poi si perde energia (vibrazioni) e si va a  $E < 0 \Rightarrow$  molecola ha

