

$$z(t) = z_0 \sin \omega t$$

$$\dot{z}(t) = z_0 \omega \cos \omega t$$

1

$$l(t) = y(t) - z(t) \text{ lunghezza molla a } t$$

$$l_0 = \text{lunghezza a riposo della molla}$$

$$\vec{F}_m = K(l_0 - l(t))\hat{j} = K(l_0 - y(t) + z(t))\hat{j}$$

$$\vec{P} = -Mg\hat{j}$$

$$\vec{F}_a = -\gamma \vec{v}_r = -\gamma (\dot{y}(t) - \dot{z}(t))\hat{j}$$

$$\vec{F}_m + \vec{F}_a + \vec{P} = M \ddot{y}(t) \quad -\frac{K}{M}(y(t) - l_0) + \frac{K}{M}z(t) - \frac{\gamma}{M}\dot{y}(t) + \frac{\gamma}{M}\dot{z}(t) - g = \ddot{y}(t)$$

$$y(t) = y(t) - l_0 \quad \frac{K}{M} = \omega_0^2 \quad \frac{\gamma}{M} = \Gamma \quad \dot{y}(t) = \dot{y}(t) \quad \dot{z}(t) = \dot{z}(t)$$

$$\boxed{\ddot{y}(t) + \Gamma \dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 z(t) + \Gamma \dot{z}(t) - g}$$

Soluzione dell'omogenea

$$\ddot{y}(t) + \Gamma \dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = 0 \quad \hat{y}(t) = y_i e^{\lambda t}$$

$$(-\lambda^2 + \Gamma \lambda + \omega_0^2) y(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow -\lambda^2 + \Gamma \lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{\Gamma}{2} \pm \sqrt{-\frac{\Gamma^2}{4} + \omega_0^2} \quad 1) \omega_0 > \frac{\Gamma}{2} \quad \lambda = \frac{\Gamma}{2} \pm \Omega \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}}$$

oscillatore sottosmorzato

$$2) \omega_0 = \frac{\Gamma}{2} \quad \lambda = \frac{\Gamma}{2}$$

oscillatore crit.amente smorzato

$$3) \omega_0 < \frac{\Gamma}{2} \quad \lambda = \frac{\Gamma}{2} \pm \Omega$$

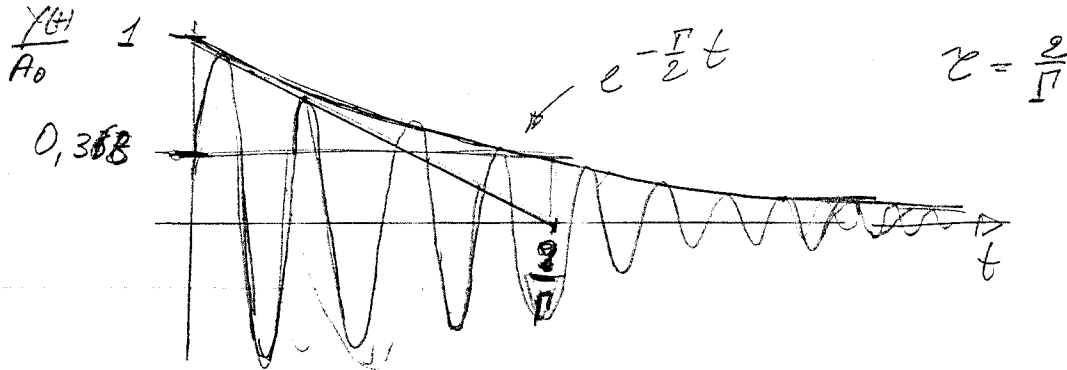
oscillatore sovra smorzato

Nel caso ① la soluzione dell'omogenea

$$\hat{y}(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left[\frac{1}{\Omega} e^{i\Omega t} + \frac{1}{\Omega} e^{-i\Omega t} \right]$$

$$y(t) = \text{Rea}(\hat{y}(t)) = A_0 e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\Omega t + \varphi)$$

A_0 e φ costanti arbitrarie che dipendono dalle condizioni iniziali



Soluzioni particolare

$$\text{dif}(y) = \ddot{y}(t) + \Gamma \dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t)$$

$$\ddot{y}(t) + \Gamma \dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \frac{1}{2} \omega_0^2 \sin \omega t + \frac{\Gamma}{2} \omega \cos \omega t - g$$

se $y_1(t)$ è la soluzione dell'equazione $\text{dif}(y) = \frac{1}{2} \omega_0^2 \sin \omega t$

e $y_2(t)$ è la soluzione dell'equazione $\text{dif}(y) = \frac{\Gamma}{2} \omega \cos \omega t$

e $y_3(t)$ è la soluzione dell'equazione $\text{dif}(y) = -g$

Essendo l'equazione lineare la soluzione particolare è:

$$y_p(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$$

$$y(t) = A_0 e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi) + y_p(t)$$

Transiente

soluzione secolare

Le costanti iniziali determinano il transiente, per tempi

$t \gg \frac{2}{\Gamma}$ la soluzione si riduce sempre alla soluzione

secolare

$y(t) = y_p(t)$ che non dipende dalle condizioni

iniziali

Per risolvere $\text{dif}(y) = \omega_0^2 \sin \omega t$ proponiamo soluzioni in

del tipo $y_1(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

$$\dot{y}_1(t) = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$$

$$\ddot{y}_1(t) = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2) A + \Gamma \omega B = 0 \\ -\Gamma \omega A + (\omega_0^2 - \omega^2) B = f_0 \omega^2 \end{cases}$$

$$A = -f_0 \omega_0^2 \frac{\Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad \boxed{3}$$

$$B = f_0 \omega_0^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}$$

$$D(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2$$

$$Y_1(t) = f_0 \omega_0^2 \left[- \frac{\Gamma \omega}{D(\omega)} \cos \omega t + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{D(\omega)} \sin \omega t \right]$$

Termine in quadratura
con l'eccitazione
Termine dispersivo

Termine in fase con l'eccitazione
Termine di assorbimento

Analogamente per $Y_2(t)$ si ottiene

$$Y_2(t) = f_0 \Gamma \omega \left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{D(\omega)} \cos \omega t + \frac{\Gamma \omega}{D(\omega)} \sin \omega t \right]$$

Termine di assorbimento Termine dispersivo

$$Y_3(t) = -\frac{g}{\omega^2} \quad \text{Soluzione d'equilibrio statico} \quad (f_0 = 0)$$

$$Y_p(t) = f_0 \left[\frac{\Gamma \omega (\omega_0^2 - \omega^2) - \omega_0^2 \Gamma \omega}{D(\omega)} \cos \omega t + \frac{\Gamma^2 \omega^2 + \omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{D(\omega)} \sin \omega t \right] - \frac{g}{\omega_0^2}$$

$\frac{\Gamma \omega (\omega_0^2 - \omega^2) - \omega_0^2 \Gamma \omega}{D(\omega)} \xrightarrow{K_1(\omega)}$
 $\frac{\Gamma^2 \omega^2 + \omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{D(\omega)} \xrightarrow{K_2(\omega)}$

Prendendo $K_1 = K_0 \sin \varphi$ $K_2 = K_0 \cos \varphi$ con $K_0^2 = K_1^2 + K_2^2$
 $\tan \varphi = \frac{K_1}{K_2}$

otteniamo

$$Y_p(t) = f_0 K_0 \sin(\omega t + \varphi) - \frac{g}{\omega_0^2}$$

$$K_0 = \frac{\omega_0^4 + \Gamma^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad \text{e} \quad \tan \varphi = - \frac{\Gamma \omega^3}{\Gamma^2 \omega^2 + \omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

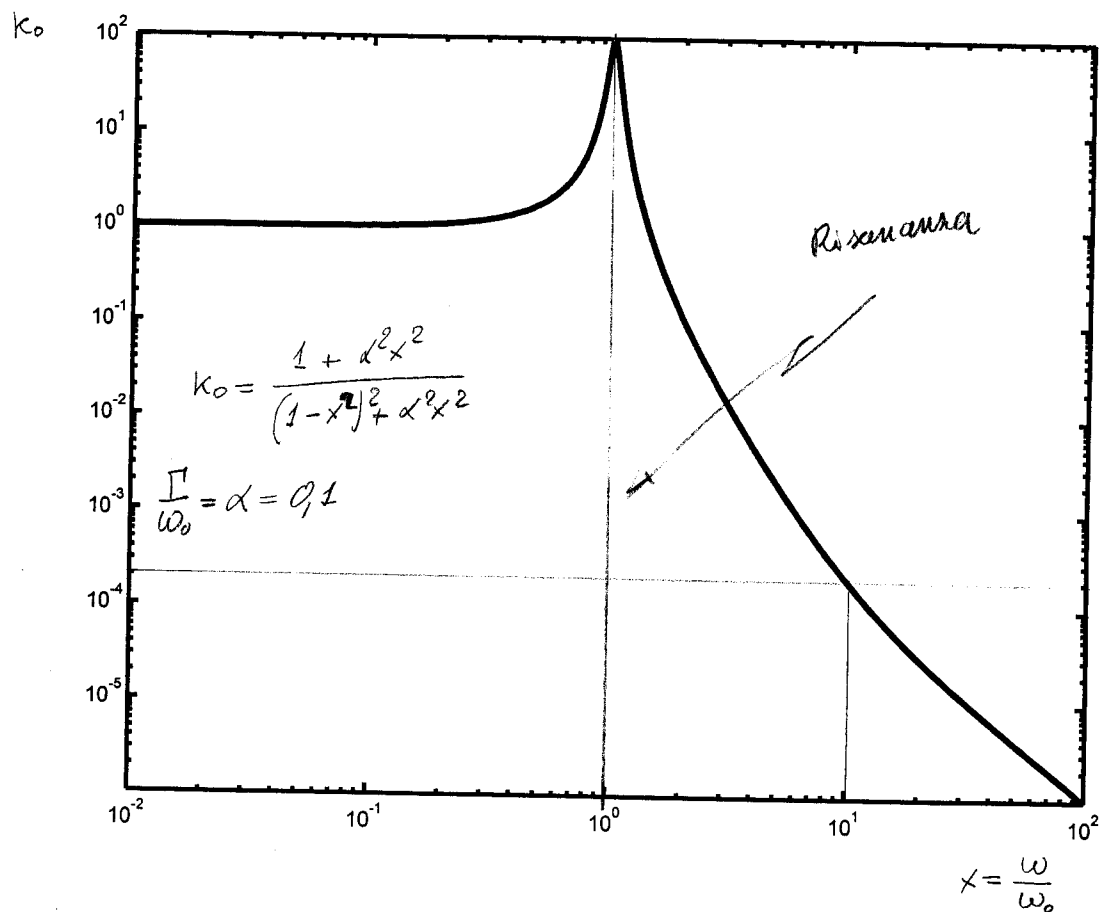
Per tempi $t \gg \frac{2}{\Gamma}$ la massa si oscilla alla stessa frequenza ω del pavimento con un'ampiezza $K_0(\omega)$. L'oscillazione della massa non è in fase con quella del pavimento $\varphi(\omega)$

per $\omega \rightarrow 0$ $K_0 \rightarrow 1$ $\varphi \rightarrow 0$ come $\tan \varphi \approx \frac{\Gamma \omega^3}{\omega_0^4}$

per $\omega \rightarrow \infty$ $K_0 \rightarrow 0$ $K_0 \approx \left(\frac{\Gamma}{\omega}\right)^2$ $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ $\tan \varphi \approx \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \omega_0^2} \omega$

per $\omega = \omega_0$ il denominatore è minimo e K_0 è massimo (allungamento)
caso $\frac{\Gamma}{\omega_0} < 1$

$$K_0 = 1 + \left(\frac{\omega_0}{\Gamma}\right)^2 \quad \text{e} \quad \tan \varphi = \frac{\omega_0}{\Gamma}$$



Come si osserva dal grafico per $\frac{\Gamma}{\omega_0} = 0,1$ e $\frac{\omega}{\omega_0} = 10$ l'ampiezza delle oscillazioni della massa M è $\sim 10^{-4}$ volte più piccola di quella del pavimento.