Compito n. 1

Nome	*Cognome*	*Numero di matricola*

Primo compitino di Fisica a1 del 18/11/2003.

- Questo compito sarà corretto da un computer, che analizzerà solo le risposte numeriche fornite dallo studente. Fare quindi massima attenzione nei calcoli. La tolleranza prevista è $\pm 5\%$ salvo ove diversamente indicato. I punteggi di ciascuna domanda sono indicati tra parentesi: attenzione, una risposta errata verrà valutata con il numero negativo indicato sempre in parentesi, per scoraggiare risposte casuali: è meglio non rispondere che rispondere a caso!
- Modalità di risposta: scrivere il valore numerico della risposta nell'apposito spazio e barrare la lettera corrispondente.
- Durante la prova scritta è consentito usare solo libri di teoria, strumenti di disegno e scrittura, calcolatrice: non è possibile utilizzare eserciziari o appunti. Il candidato dovrà restituire tutta la carta fornita dagli esaminatori: non è consentito utilizzare fogli di carta propri per svolgere l'elaborato. Candidati scoperti in violazione di questa norma verranno allontanati dalla prova.
- Si assuma, là dove presente, che l'intensità campo gravitazionale sia $g = 10$ m s^{-2}.

Esercizio 1: Un'automobile percorre, partendo da ferma, una pista circolare con accelerazione tangenziale costante di 2.00 m/s^2.

1. Determinare il modulo dell'accelerazione quando il raggio vettore dell'auto ha spazzato un angolo di 250 gradi (5,-1)
   $|a|$ [m/s^2] = $\boxed{17.6}$ A $\boxed{120}$ B $\boxed{1000}$ C $\boxed{2.00}$ D $\boxed{160}$ E $\boxed{17.6}$
2. Raggiunta la velocità di 130 km/h, l'auto imbocca una via di fuga diritta e tangente alla pista, lunga 190 m. L'auto inizia a decelerare uniformemente in maniera tale da fermarsi alla fine della via di fuga. Un'altra auto, ferma a metà, parte con accelerazione costante quando la prima auto imbocca la via di fuga. Qual'è la minima accelerazione della seconda auto tale che essa non venga investita dalla prima? (5,-1)
   $|a|$ [m/s^2] = $\boxed{3.43}$ A $\boxed{22.2}$ B $\boxed{3.43}$ C $\boxed{2.28}$ D $\boxed{1.14}$ E $\boxed{13.8}$
3. Qual'è la minima accelerazione di cui alla precedente domanda nel caso in cui la prima auto rompa i freni e prosegua di moto uniforme, una volta imboccata la via di fuga (assunta di lunghezza infinita e considerando la stessa distanza iniziale tra le due auto fornita nella domanda precedente). (5,-1)
   $|a|$ [m/s^2] = $\boxed{6.86}$ A $\boxed{6.86}$ B $\boxed{2.88}$ C $\boxed{3.54}$ D $\boxed{0.907}$ E $\boxed{88.9}$

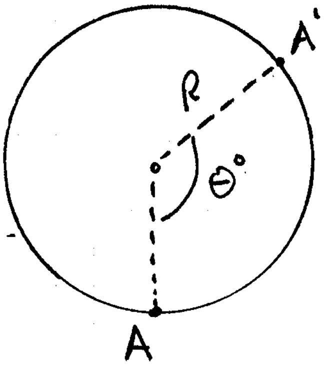
Esercizio 2: In un canale rettilineo di larghezza 460 m la corrente scorre da sud verso nord, parallelamente alle due sponde. La velocità della corrente è massima al centro del canale, 7.20 m/s, e decresce col quadrato della distanze da~~lle sponde~~l centro, fino ad annullarsi sulle rive. Un battello parte dal punto A, sulla riva ovest, per raggiungere il punto B, sulla riva est, posto 370 m a sud rispetto alla proiezione ortogonale di A sulla riva oppposta. Il comandante del battello, controllando opportunamente la velocità dell'imbarcazione relativa all'acqua, fa sì che quella relativa alle sponde rimanga costante durante la traversata. Se il battello arriva in B dopo 2800 s dalla partenza, determinare:

1. il modulo della velocità relativa all'acqua che ha il battello quando si trova a 50.0 m dalla sponda ad est; (5,-1)
   $|v_{rel}|$ [m/s] = $\boxed{2.93}$ A $\boxed{2.93}$ B $\boxed{7.20}$ C $\boxed{4.34}$ D $\boxed{1.64}$ E $\boxed{11.7}$
2. l'angolo tra la velocità del battello relativa all'acqua e quella della corrente dopo un tempo pari a 1800 s. (5,-1)
   θ [gradi] = $\boxed{179}$ A $\boxed{49.4}$ B $\boxed{149}$ C $\boxed{456}$ D $\boxed{39.6}$ E $\boxed{179}$

Esercizio 3: Un punto si muove, in coordinate polari, con legge oraria $r = 2r_0[1 + cos(\theta)]$ e $\theta = \omega_0 t$, con r_0 =17.0 m e ω_0=1.40 rad/s, ambedue costanti nel tempo. Determinare, all'istante 6.10 s,

1. il valore assoluto della componente dell'accelerazione perpendicolare alla velocità. (5,-1)
   $|a_p|$ [m/s^2] = $\boxed{85.6}$ A $\boxed{742}$ B $\boxed{395}$ C $\boxed{51.9}$ D $\boxed{85.6}$ E $\boxed{98.3}$

Esercizio 1



a_{tg} = costante $\qquad \theta°$ (in gradi)

1) accelerazione in A'?

$$\theta = \frac{\theta°}{360°} 2\pi .$$

$$\begin{cases} v' = a_{tg} t' \\ s' = R\theta = \frac{1}{2} a_{tg} (t')^2 \Rightarrow t' = \left(\frac{2R\theta}{a_{tg}}\right)^{1/2}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow v' = \left(\frac{2R\theta}{a_{tg}}\right)^{1/2} a_{tg} = (2R\theta a_{tg})^{1/2}$$

$$a'_c = (v')^2/R = \frac{2R\theta a_{tg}}{R} = 2\theta a_{tg}$$

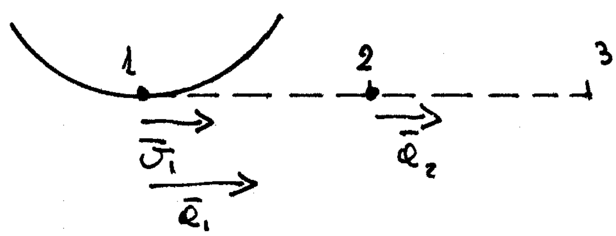
$$a = \left[a_{tg}^2 + a_c'^2\right]^{1/2} = \left[a_{tg}^2 + 4\theta^2 a_{tg}^2\right]^{1/2} = a_{tg}(1+4\theta^2)^{1/2}.$$

$$= a_{tg}\left(1 + 4(2\pi)^2\left(\frac{\theta°}{360°}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\boxed{\begin{matrix} a_{tg} = 3.1\ m/s^2 \\ \theta° = 140° \end{matrix} \Rightarrow a = 15.46\ m/s^2}$$

2) Raggiunta v_1 trova via di fuga con S_{13}

$S_{12} = S_{13}/2$

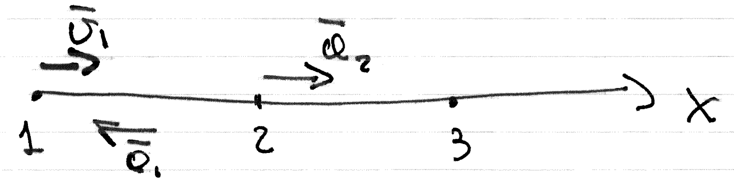


$$\begin{cases} S_{13} = v_1 t_3 - \frac{1}{2} a_1 t_3^2 \\ v_1(3) = 0 = v_1 - a_1 t_3 \Rightarrow t_3 = v_1/a_1 \end{cases}$$

$$S_{13} = v_1^2/a_1 - \frac{1}{2} a_1 (v_1/a_1)^2 = \frac{1}{2} v_1^2/a_1 \Rightarrow a_1 = (2S_{13}/v_1^2)^{-1}$$

- a_1 = acc. necessaria a 1 per fermarsi in 3

$$t_3 = 2S_{13}/v_1$$



$$x_1(t) = v_1 t - \frac{1}{4}\, v_1^2/S_{13}\, t^2$$

$$x_2(t) = \frac{S_{13}}{2} + \frac{1}{2} a_2 t^2$$ incontro all'istante $\tilde{t}$ t.c.

$$x_1(\tilde{t}) = x_2(\tilde{t}) \Rightarrow v_1 \tilde{t} - \frac{1}{4}\frac{v_1^2}{S_{13}} \tilde{t}^2 = \frac{S_{13}}{2} + \frac{1}{2} a_2 \tilde{t}^2$$

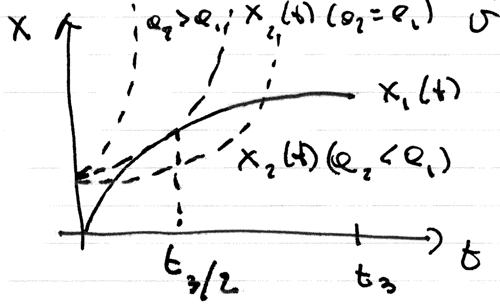
$$\tilde{t}^2 \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{1}{2} v_1^2/S_{13}\right) - \tilde{t} v_1 + S_{13}/2 = 0 =$$

$$= \tilde{t}^2 \frac{1}{2}\tilde{a} - \tilde{t} v_1 + \frac{S_{13}}{2} \qquad \tilde{a} = a_2 + \frac{1}{2} v_1^2/S_{13}$$

radici $\Rightarrow$ $$\tilde{t} = \frac{v_1}{\tilde{a}} \pm \left[\left(\frac{v_1}{\tilde{a}}\right)^2 - 4\frac{S_{13}}{2}\frac{\tilde{a}}{2}/\tilde{a}^2\right]^{1/2} =$$

$$= \frac{v_1}{\tilde{a}} \pm \left[\left(\frac{v_1}{\tilde{a}}\right)^2 - \frac{S_{13}}{\tilde{a}}\right]^{1/2} = \frac{v_1}{\tilde{a}}\left\{1 \pm \left(1 - \frac{S_{13}\tilde{a}}{v_1^2}\right)^{1/2}\right\}$$

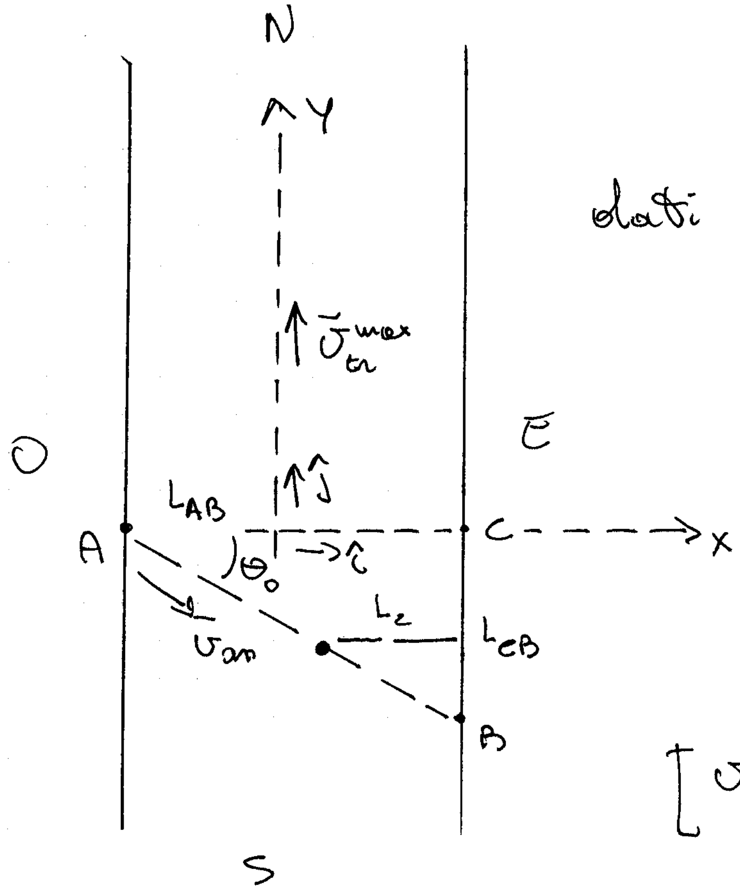
non ha soluzioni per $1 - \frac{S_{13}\tilde{a}}{v_1^2} \leq 0 \Rightarrow \tilde{a} \geq v_1^2/S_{13} \Rightarrow a_2 \geq v_1^2/2S_{13} = a_1$



3) $a_1 = 0$ $$v_1 t = \frac{S}{2} + \frac{1}{2} a_2 t^2$$

$$\tilde{a} = a_2 \Rightarrow a_2 \geq v_1^2/S_{13}$$

Esercizio 2



dati $\quad L_{AC} \quad L_{CB} \quad v_{tr}^{max} \quad t_{AB}$

$$\cos\theta_0 = \frac{L_{AC}}{L_{AB}} \qquad \sin\theta_0 = \frac{L_{CB}}{L_{AB}}$$

$$L_{AB} = \left(L_{AC}^2 + L_{CB}^2\right)^{1/2}$$

$$v_{tr}(x) = v_{tr}^{max}\left[1 - \left(\frac{2x}{L_{AC}}\right)^2\right]$$

$$\left[v_{tr}(x=0) = v_{tr}^{max},\ v_{tr}\left(x = \pm\frac{L_{AC}}{2}\right) = 0\right]$$

$$v_{an} = \frac{L_{AB}}{t_{AB}} = |\bar{v}_{an}|$$

$$\bar{v}_{tr} = v_{tr}(x)\,\hat{j}$$

$$\bar{v}_{an} = v_{an}\cos\theta_0\,\hat{i} - v_{an}\sin\theta_0\,\hat{j}$$

$$\bar{v}_{rel} = \bar{v}_{an} - \bar{v}_{tr} = v_{an}\cos\theta_0\,\hat{i} - \left[v_{an}\sin\theta_0 + v_{tr}(x)\right]\hat{j}$$

$$v_{rel} = \left[v_{an}^2 + v_{tr}^2(x) + 2\,v_{an}\,v_{tr}(x)\sin\theta_0\right]^{1/2}$$

1) v_{rel} a L_2? $\qquad x_2 = \frac{L_{AC}}{2} - L_2$

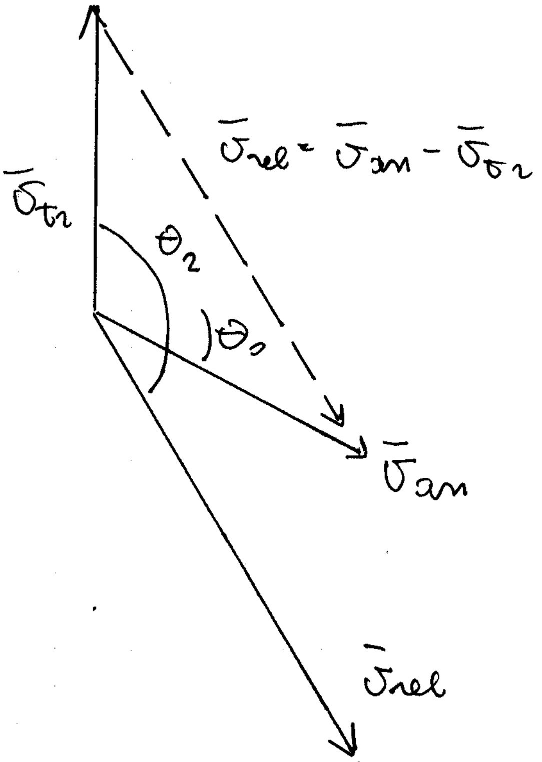
$$v_{tr}(x_2) = v_{tr}^{max}\left[1 - \frac{4}{L_{AC}^2}\left(\frac{L_{AC}}{2} - L_2\right)^2\right]$$

$$v_{rel}(x_2) = \left[\left(\frac{L_{AB}}{t_{AB}}\right)^2 + v_{tr}^2(x_2) + 2\,\frac{L_{AB}}{t_{AB}}\,v_{tr}(x_2)\,\overbrace{\sin\theta_0}^{L_{CB}}\right]^{1/2}$$

$L_{AC} = 500\ m \quad L_{CB} = 100\ m \quad v_{tr}^{max} = 5\ m/s \quad t_{AB} = 2700\ s$

$L_2 = 200\ m \Rightarrow v_{tr}(x_2) = 4.8\ m/s \qquad v_{rel}(x_2) = 4.84\ m/s$

(2) Angolo θ_2 tra $\bar{v}_{rel}$ e $\bar{v}_{tr}$ at t_2?



$$x(t_2) = -\frac{L_{AC}}{2} + v_{an} \cos\theta_0 \, t_2 =$$

$$= -\frac{L_{AC}}{2} + \frac{L_{AB}}{t_{AB}} \cos\theta_0 \, t_2 =$$

$$= -\frac{L_{AC}}{2} + L_{AC} \frac{t_2}{t_{AB}} =$$

$$= L_{AC}\left(\frac{t_2}{t_{AB}} - \frac{1}{2}\right) = 120.37 \text{ m}$$

$$\bar{v}_{rel}(t_2) = v_{an} \cos\theta_0 \, \hat{i} - \left[v_{tr}(t_2) + v_{an} \sin\theta_0\right] \hat{j}$$

$$\bar{v}_{tr}(t_2) = v_{tr}^{max}\left[1 - 4\left(\frac{t_2}{t_{AB}} - \frac{1}{2}\right)^2\right] \hat{j}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{\bar{v}_{rel} \cdot \bar{v}_{tr}}{|\bar{v}_{rel}||\bar{v}_{tr}|} = -\left[v_{tr}(t_2) + v_{an} \sin\theta_0\right] v_{tr}^{max} \times$$

$$\times \left[1 - 4\left(t_2/t_{AB} - 1/2\right)^2\right] \Big/ v_{tr}^{max} |\bar{v}_{rel}(t_2)| \left[1 - 4\left(\frac{t_2}{t_{AB}} - \frac{1}{2}\right)^2\right] =$$

$$= -\frac{v_{tr}(t_2) + v_{an} \sin\theta_0}{|\bar{v}_{rel}(t_2)|} = -.9993$$

$t_2 = 2000$ s. $\qquad \theta_2 = .98816\,\pi = 177.87°$

Esercizio 3

$r(t) = 2A(\cos\theta + 1)$ $\qquad \theta = \omega t$ $\qquad$ (ω e A costanti)

1. Determinare $|\bar{a}_{\perp \bar{v}}(\tau)|$

$\dot{r}(t) = -2A\dot{\theta}\sin\theta \qquad \dot{\theta}(t) = \omega$

$= -2A\omega\sin\theta$

$\bar{v}(t) = \dot{r}(t)\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} =$

$= -2A\omega\sin\theta\,\hat{r} + 2A\omega(1+\cos\theta)\hat{\theta} =$

$= +2A\omega[-\sin\theta\,\hat{r} + (1+\cos\theta)\hat{\theta}] = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}$

$|\bar{v}| = 2A\omega\sqrt{2}(1+\cos\theta)^{1/2}$

$\ddot{r}(t) = -2A\omega^2\cos\theta \qquad \ddot{\theta} = 0$

$\bar{a}(t) = -2A\omega^2\cos\theta\,\hat{r} - 2A(1+\cos\theta)\omega^2\hat{r} - 4A\omega^2\sin\theta\,\hat{\theta} =$

$= -2A\omega^2[(1+2\cos\theta)\hat{r} + 2\sin\theta\,\hat{\theta}] = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta}$

$|\bar{a}| = 2A\omega^2[5+4\cos\theta]^{1/2}$

$|\bar{a}_\perp| = \dfrac{|\bar{a}\times\bar{v}|}{|\bar{v}|} = \dfrac{1}{|\bar{v}|}\Big| a_r v_\theta \underbrace{(\hat{r}\times\hat{\theta})}_{=\hat{n}} + a_\theta v_r \underbrace{(\hat{\theta}\times\hat{r})}_{=-\hat{n}} \Big| =$

$= \dfrac{1}{|\bar{v}|}|a_r v_\theta - a_\theta v_r| = \dfrac{4A^2\omega^3}{2A\omega\sqrt{2}}\dfrac{3(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)^{1/2}} =$

$= \dfrac{6}{\sqrt{2}}A\omega^2\sqrt{1+\cos\theta} = \dfrac{6}{\sqrt{2}}A\omega^2(1+\cos(\omega\tau))^{1/2}$

$A = 5$ m $\qquad \omega = 3$ rad/s $\qquad \tau = 5$ s

$|\bar{a}_\perp| = 93.59$ m/s^2