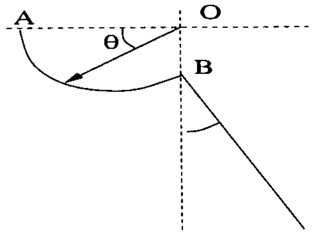
**Esercizio 1**: Uno sciatore si lancia da un trampolino AB come indicato in figura. La distanza tra lo sciatore sul trampolino e il punto O (vd. figura) segue la legge $r(\theta)$ =140 m -$\theta$ ·50.0 m/Rad. Al trampolino segue una pista, che può essere schematizzata come un piano inclinato, con inclinazione rispetto alla verticale di 1.20 Rad. Determinare:




1. il modulo della velocità dello sciatore per $\theta$= 0.760 Rad (5,-1)
   $|v|$ [m/s] = $\boxed{37.5}$ A $\boxed{51.6}$ B $\boxed{37.5}$ C $\boxed{42.3}$ D $\boxed{4.66}$ E $\boxed{8.87}$
2. la tangente dell'angolo che gli sci formano con l'orizzontale al momento del salto (5,-1)
   $\tan\alpha$ = $\boxed{0.814}$ A $\boxed{0.814}$ B $\boxed{0.631}$ C $\boxed{5.42}$ D $\boxed{0.000}$ E $\boxed{2.78}$

Supponiamo adesso che il trampolino sia tale che l'angolo che gli sci formano con l'orizzontale sia 0.320 Rad e la velocità al momento del salto sia 26.0 m/s. Determinare:

3. la distanza tra il punto B e il punto in cui lo sciatore ricade (5,-1)
   $d$ [m] = $\boxed{94.1}$ A $\boxed{13.3}$ B $\boxed{94.1}$ C $\boxed{69.7}$ D $\boxed{5.51}$ E $\boxed{19.2}$

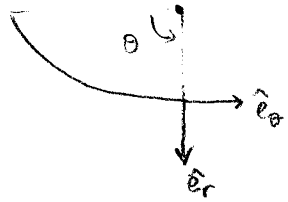
---

1) Teorema delle forze vive

$$\cancel{m} g h = \frac{1}{2} \cancel{m} v^2 \qquad h = (r_0 - a\theta)\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{2g(r_0 - a\theta)\sin\theta}$$

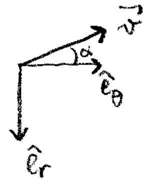
2) $$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$




$\theta = \pi/2$

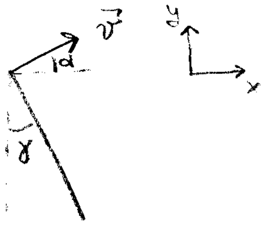
$$\dot{r} = -a\dot{\theta}$$

$\Rightarrow$




$$tg\alpha = \frac{|v_r|}{|v_\theta|} = \frac{a\cancel{\dot{\theta}}}{(r_0 - a\frac{\pi}{2})\cancel{\dot{\theta}}} = \frac{a}{r_0 - a\frac{\pi}{2}}$$

3)




$$x_{sc}(t) = v\cos\alpha\, t$$
$$y_{sc}(t) = v\sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$x_{discesa} = x_d$$

$$y_{disc} = -\frac{x_d}{tg\gamma}$$

$$x_d = v\cos\alpha\, t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x_d}{v\cos\alpha}$$

$$-\frac{\cancel{x_d}}{tg\gamma} = \cancel{v}\sin\alpha \frac{\cancel{x_d}}{\cancel{v}\cos\alpha} - \frac{1}{2} g \frac{x_d^{\cancel{2}}}{v^2\cos^2\alpha}$$

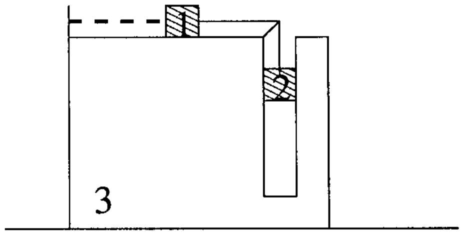
$$-\frac{1}{tg\gamma} = tg\alpha - \frac{g\, x_d}{2v^2\cos^2\alpha} \Rightarrow$$

$$x_d = \left(tg\alpha + \frac{1}{tg\gamma}\right)\frac{2v^2\cos^2\alpha}{g}$$

$$\Rightarrow \quad d = \sqrt{x_d^2 + y_d^2} = x_d\sqrt{1 + 1/tg^2\gamma}$$

$$= \frac{2v^2\cos^2\alpha}{g}\left(tg\alpha + \frac{1}{tg\gamma}\right)\sqrt{1 + \frac{1}{tg^2\gamma}}$$

**Esercizio 2**: Si consideri il sistema in figura. I corpi 1,2 e 3 hanno rispettivamente massa pari a 2.60 kg, 5.40 kg e 8.70 kg. La molla (rappresentata dalla linea tratteggiata) ha massa trascurabile, costante elastica 440 N/m e lunghezza a riposo nulla. Il filo è inestensibile e di massa trascurabile. Il sistema è privo di attrito. Si supponga di rilasciare il sistema da fermo con la molla nella posizione di riposo. Determinare:

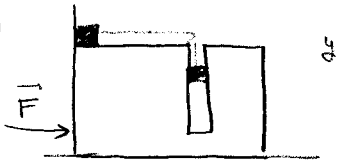



1. il modulo della forza che si deve esercitare all'istante iniziale sul blocco 3 per mantenerlo fermo (5,-1)
   $|F|$ [N] = $\boxed{17.5}$ A $\boxed{33.1}$ B $\boxed{0.000}$ C $\boxed{8.30}$ D $\boxed{17.6}$ E $\boxed{11.3}$

Si rimuove adesso la forza del punto precedente e, partendo dalla stessa posizione iniziale, si lascia il sistema libero di muoversi. All'istante in cui la molla ha lunghezza 0.0680 m, determinare:

2. il modulo dello spostamento del blocco 3 (5,-1)
   $|d|$ [m] = $\boxed{0.0106}$ A $\boxed{0.00276}$ B $\boxed{0.00306}$ C $\boxed{0.00198}$ D $\boxed{0.00525}$ E $\boxed{0.0106}$
3. l'allungamento massimo della molla (5,-1)
   $l_{max}$ [m] = $\boxed{0.245}$ A $\boxed{0.461}$ B $\boxed{0.123}$ C $\boxed{0.0578}$ D $\boxed{0.0469}$ E $\boxed{0.245}$

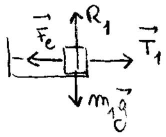
1)



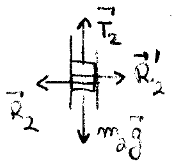


$$m_1 \ddot{x}_1 = -F_e + T$$
$$m_1 \ddot{y}_1 = -m_1 g + R_1$$
$$m_2 \ddot{x}_2 = -R_2 + R_2'$$
$$m_2 \ddot{y}_2 = -m_2 g + T$$
$$m_3 \ddot{x}_3 = F + F_e - T + R_2 - R_2'$$
$$m_3 \ddot{y}_3 = -m_3 g + R_t - T - R_1$$

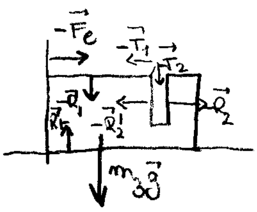
1




2




3




A $t=0$ $\quad F_e = K\, l_{molla} = K x_1' = 0$

posizione di 1 rispetto a 3

Inoltre

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = \ddot{y}_3 = 0 \\ \ddot{x}_1 = \ddot{x}_1' + \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_2 = \ddot{x}_3 \\ \ddot{y}_2 = -\ddot{x}_1' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1' = T \\ m_2 \ddot{x}_2 = m_2 \ddot{x}_3 = 0 \\ -m_2 \ddot{x}_1' = -m_2 g + T \\ m_3 \ddot{x}_3 = 0 = F - T \end{cases} \Rightarrow \quad F = T \qquad \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1' = T \\ m_2 (g - \ddot{x}_1') = T \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$m_1 \ddot{x}_1' = m_2 g - m_2 \ddot{x}_1' \qquad \ddot{x}_1' = \frac{m_2 g}{m_1+m_2}$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1+m_2} = F$$

2) Non ci sono forze esterne al sistema 1+2+3 lungo x $\Rightarrow$ la posizione del c.m. lungo x rimane la stessa $\Rightarrow$

$$m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + m_3 \Delta x_3 = 0$$

$$m_1(\ell + \Delta x_3) + m_2 \Delta x_3 + m_3 \Delta x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad |\Delta x_3| = \left| \frac{m_1 \ell}{m_1+m_2+m_3} \right|$$

3) Teorema delle forze vive:

$$\frac{1}{2} m_1 (\cancel{\dot{x}_1'^2} + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2} m_2 (\underset{\dot{x}_2^2}{\dot{x}_3^2} + \underset{\dot{y}_2^2}{\cancel{\dot{x}_1'^2}}) + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2 = -m_2 g\, y_2 + \frac{1}{2} k\, x_1'^2$$

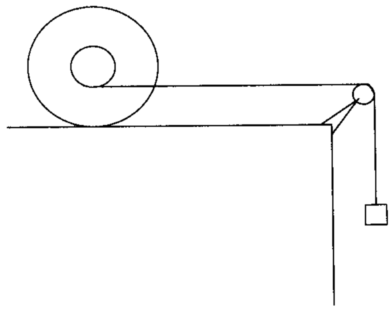
lunghezza max $\Rightarrow \dot{x}_1' = 0$

Inoltre $m_1(\dot{x}_1' + \dot{x}_3) + m_2 \dot{x}_3 + m_3 \dot{x}_3 = 0$ (conservazione quantità di moto lungo x)

$\Rightarrow$ se $\dot{x}_1' = 0$ anche $\dot{x}_3 = 0$

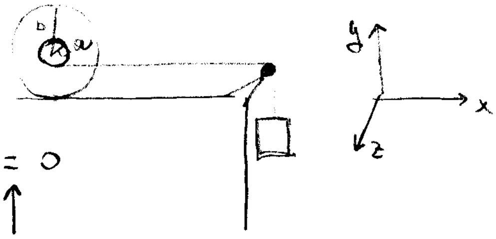
$$\Rightarrow \quad -m_2 g\, \cancel{\ell_{max}} + \frac{1}{2} k\, \ell_{max}^{\cancel{2}} = 0 \qquad \ell_{max} = \frac{2 m_2 g}{k}$$

**Esercizio 1**: Un rocchetto di massa 0.370 kg e di raggio 0.0660 m è costituito da due dischi connessi da un tamburo centrale di raggio 0.0170 m ed ha un momento d'inerzia rispetto all'asse di simmetria di 0.00200 kg m$^2$. Un sottile nastro (tipo quello per registrazioni magnetiche) è avvolto in parte sul tamburo. Il rocchetto è appoggiato su un tavolo orizzontale in modo che la parte libera del nastro fuoriesca dalla parte inferiore del tamburo. Inizialmente il rocchetto è mantenuto fermo in modo che la parte non avvolta nel nastro si tenda sotto l'azione del peso di una massa 0.0130 kg fissata all'estremità libera del nastro come illustrato in figura. Una carrucola ideale, senza attrito e massa, fissata a un bordo del tavolo, è regolata in modo da mantenere il tratto di nastro che va dal rocchetto alla carrucola stessa sempre orizzontale e pertanto parallelo al piano del tavolo. L'attrito tra il tavolo e il rocchetto è tale da garantire a quest'ultimo un moto di puro rotolamento. Una volta liberato il rocchetto, nell'ipotesi di poter trascurare la variazione del raggio del tamburo e del momento d'inerzia in conseguenza dell'avvolgimento o svolgimento del nastro, determinare:



1. il modulo della velocità del rocchetto nell'istante in cui la massa in caduta verticale è scesa al disotto del suo punto iniziale di 0.370 m (5,-1)
   $|v|$ [m/s] = $\boxed{0.339}$ A $\boxed{2.00}$ B $\boxed{1.26}$ C $\boxed{0.339}$ D $\boxed{0.414}$ E $\boxed{2.41}$
2. il modulo dell'accelerazione angolare del rocchetto (5,-1)
   $|\alpha|$ [Rad/s$^2$] = $\boxed{1.75}$ A $\boxed{1.02}$ B $\boxed{0.322}$ C $\boxed{0.393}$ D $\boxed{3.38}$ E $\boxed{1.75}$
3. il valore minimo del coefficiente di attrito statico tra il piano e il rocchetto in grado di garantire il moto di puro rotolamento (5,-1)
   $\mu_{min}$ = $\boxed{0.0233}$ A $\boxed{0.00192}$ B $\boxed{0.0233}$ C $\boxed{0.00726}$ D $\boxed{0.0263}$ E $\boxed{0.00502}$

1) L'Energia si conserva $\Rightarrow$




$$\frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - m g \Delta y = E = 0$$

E all'istante iniziale

Troviamo come sono legati tra loro $\dot{x}$, $\omega$ e $\dot{y}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega b \\ \dot{y} = -(\dot{x} + \omega a) = -\dot{x}\left(1 - \frac{a}{b}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{I}{b^2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left(1 - \frac{a}{b}\right)^2 \dot{x}^2 = m g \Delta y$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2 m g \Delta y}{M + m\left(1 - \frac{a}{b}\right)^2 + \frac{I}{b^2}}}$$

2) $\alpha = |\dot{\omega}| = \left|\frac{\ddot{x}}{b}\right|$

dalla conservazione dell' energia:

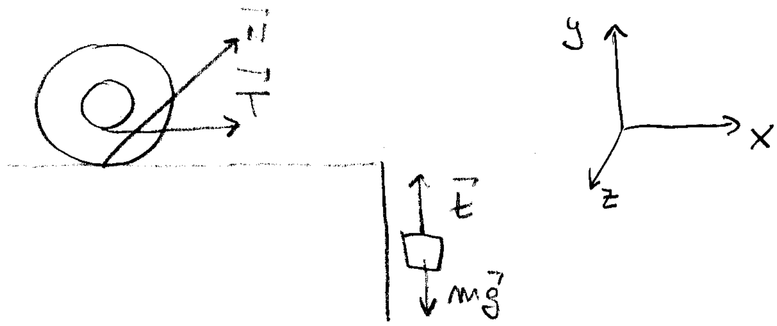
$$M \cancel{\dot{x}} \ddot{x} + \frac{I}{b^2} \cancel{\dot{x}} \ddot{x} + m\left(1-\frac{a}{b}\right)^2 \cancel{\dot{x}} \ddot{x} - mg \cancel{\dot{x}} \left(1-\frac{a}{b}\right) = 0$$

$$\ddot{x} = \frac{+ mg\,(1 - a/b)}{M + m\left(1-\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{I}{b^2}}$$

$\Rightarrow$

$$\alpha = \frac{mg\left(1-\frac{a}{b}\right)}{b\left(M + m\left(1-\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{I}{b^2}\right)}$$

Si poteva risolvere anche con la 1ª e 2ª eqn. card.:




$$M\ddot{x} = T + N_x$$

$$m\ddot{y} = T - mg$$

$$+ Ta + N_x b = I\dot{\omega} = -\frac{I}{b}\ddot{x}$$

$$T = m(\ddot{y} + g) = m\left(g - \ddot{x}\left(1-\frac{a}{b}\right)\right)$$

$$N_x = M\ddot{x} - T \qquad \Rightarrow$$

$$Ta - Tb + M\ddot{x}b = -\frac{I}{b}\ddot{x}$$

$$mg\frac{a}{b} - m\ddot{x}\left(1-\frac{a}{b}\right)\frac{a}{b} - mg\cancel{b} + m\ddot{x}\cancel{b}\left(1-\frac{a}{b}\right) + M\ddot{x}\cancel{b} = -\frac{I}{b^2}\ddot{x}$$

$$+ mg\left(1 - \frac{a}{b}\right) = \left(m\left(1-\frac{a}{b}\right)^2 + M + \frac{I}{b^2}\right)\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = \frac{mg\left(1-\frac{a}{b}\right)}{m\left(1-\frac{a}{b}\right)^2 + M + \frac{I}{b^2}}$$

3) $\mu \geq \left| \frac{N_x}{N_y} \right|$

$$N_y = Mg$$

$$N_x = M\ddot{x} - T = M\ddot{x} - mg + m\ddot{x}\left(1-\frac{a}{b}\right)$$

$$= \frac{M + m\left(1-\frac{a}{b}\right)}{m\left(1-\frac{a}{b}\right)^2 + M + \frac{I}{b^2}} \, mg\left(1-\frac{a}{b}\right) - mg$$

$$= mg\left[\frac{M\left(\cancel{1}-\frac{a}{b}\right) + \cancel{m\left(1-\frac{a}{b}\right)^2} - \cancel{m\left(1-\frac{a}{b}\right)^2} - \cancel{M} - \frac{I}{b^2}}{m\left(1-\frac{a}{b}\right)^2 + M + \frac{I}{b^2}}\right]$$

$$= -\frac{mg}{b}\,\frac{Ma + \frac{I}{b}}{m\left(1-\frac{a}{b}\right)^2 + M + \frac{I}{b^2}}$$

$$\mu \geq \frac{m}{M}\,\frac{1}{b}\,\frac{Ma + \frac{I}{b}}{m\left(1-\frac{a}{b}\right)^2 + M + \frac{I}{b^2}} .$$

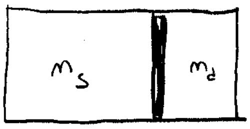
**Esercizio 2**: Un contenitore cilindrico con l'asse disposto orizzontalmente è immerso in un bagno termico a temperatura 290 K ed è diviso in due parti da un setto mobile adiabatico di massa trascurabile. A sinistra e a destra del setto, disposto verticalmente, ci sono rispettivamente 3.80 e 1.80 moli di un gas perfetto. Con una forza esterna, il setto viene spostato a partire dalla posizione di equilibrio in maniera quasi statica da destra verso sinistra in modo tale che il setto divida il cilindro in due parti uguali. Determinare:

1. il lavoro fatto dalla forza esterna nella trasformazione (5,-1)
   $L$ [J] = $\boxed{880}$ A $\boxed{263}$ B $\boxed{419}$ C $\boxed{86.0}$ D $\boxed{880}$ E $\boxed{237}$
2. la variazione di entropia del gas a sinistra del setto (5,-1)
   $\Delta S$ [J/K] = $\boxed{-9.64}$ A $\boxed{-0.691}$ B $\boxed{-6.02}$ C $\boxed{-2.82}$ D $\boxed{-9.64}$ E $\boxed{-3.12}$

Il setto viene adesso lasciato libero di muoversi. Una volta raggiunto l'equilibrio, determinare per questa seconda trasformazione:

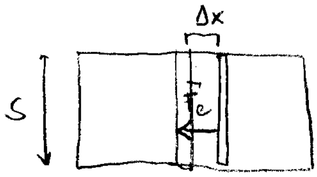
3. la variazione di entropia del sistema costituito da bagno termico + gas a destra + gas di sinistra del setto (5,-1)
   $\Delta S_{tot}$ [J/K] = $\boxed{3.03}$ A $\boxed{2.04}$ B $\boxed{3.50}$ C $\boxed{1.74}$ D $\boxed{7.46}$ E $\boxed{3.03}$

1)




$T_0$ cost

$$\begin{cases} P_s V_s = n_s R T_0 \\ P_d V_d = n_d R T_0 \\ P_s = P_d \\ V_s + V_d = V_0 \end{cases} \Rightarrow \quad V_s = \frac{n_s}{n_s+n_d} V_0 \qquad V_d = \frac{n_d}{n_s+n_d} V_0$$




$$d\mathcal{L} = F_e\, dx =$$

$$F_e + \frac{P_d}{S} - \frac{P_s}{S} = 0 \Rightarrow F_e = -\frac{P_d}{S} + \frac{P_s}{S}$$

$$d\mathcal{L} = -P_d \frac{dx}{S} + P_s \frac{dx}{S}$$

$$\frac{dx}{S} = dV_d = -dV_s \Rightarrow \mathcal{L} = -\int_{V_d}^{V_0/2} P_d\, dV_d - \int_{V_s}^{V_0/2} P_s\, dV_s \Rightarrow$$

$$\mathcal{L} = -n_d R T_0 \ln \frac{n_s+n_d}{2n_d} - n_s R T_0 \ln \frac{n_s+n_d}{2n_s}$$

2) $\Delta S_s = n_s R \ln \frac{n_s + n_d}{2 n_s}$

3) $\Delta S_{tot} = \Delta S_{Bt} + \Delta S_s + \Delta S_d$

$$\Delta S_s = n_s R \ln \frac{2 n_s}{n_s + n_d}$$

$$\Delta S_d = n_d R \ln \frac{2 n_d}{n_s + n_d}$$

$$\Delta S_{BT} = \frac{Q_{B \rightleftarrows gas}}{T_0}$$

$$\Delta U_{tot} \overset{T\ cost}{=} 0 = Q - \mathcal{L} = Q_{B \rightleftarrows gas} + \cancel{\mathcal{L}_{forze\ est}} \rightarrow 0$$

(non ci sono forze esterne)

$$\Rightarrow Q_{B \rightleftarrows gas} = 0 \Rightarrow \Delta S_{BT} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta S_{tot} = n_s R \ln \frac{2 n_s}{n_s + n_d} + n_d R \ln \frac{2 n_d}{n_s + n_d}$$