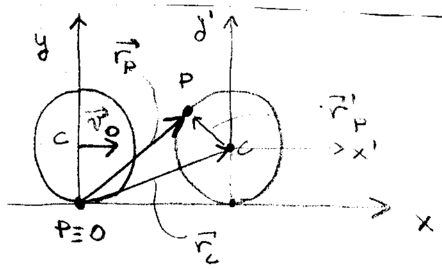
Esercizio 1: Un ciclista viaggia, in pianura, con velocità costante di 5.70 m/s lungo una strada rettilinea. La bicicletta ha ruote di 28 pollici, ovvero diametro di 0.71 m. All'istante iniziale un punto P della ruota, colorato di rosso, si trova in contatto con un punto della strada che coincide con l'origine di un sistema di riferimento solidale con la strada stessa. In questa sistema di riferimento, dopo 0.140 s dall'istante iniziale, determinare:

1. la distanza del punto P dall'origine delle coordinate (5,-1)
   d [m] = $\boxed{0.778}$ A $\boxed{0.110}$ B $\boxed{0.0498}$ C $\boxed{0.778}$ D $\boxed{0.0440}$ E $\boxed{0.446}$
2. la componente dell'accelerazione di P nella direzione della velocità della bicicletta (5,-1)
   $a_{//}$ [m/s^2] = $\boxed{71.3}$ A $\boxed{34.5}$ B $\boxed{91.5}$ C $\boxed{56.0}$ D $\boxed{182}$ E $\boxed{71.3}$
3. la distanza dall'origine del punto di caduta di una gocciolina d'acqua che si stacca dal punto P della ruota all'istante considerato (5,-1)
   d [m] = $\boxed{9.83}$ A $\boxed{1.10}$ B $\boxed{2.47}$ C $\boxed{0.897}$ D $\boxed{18.1}$ E $\boxed{9.83}$



Δt

$$\vec{r}_P = \vec{r}_c + \vec{r}\,'_P$$

$$\vec{r}_c(t) = v_0 t\,\hat{\imath} + r_0\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{r}\,'_P(t) = r_0 \cos\underbrace{\left(\tfrac{3}{2}\pi - \omega_0 t\right)}_{\theta}\hat{\imath} + r_0 \sin\left(\tfrac{3}{2}\pi - \omega_0 t\right)\hat{\jmath} \qquad \omega_0 \equiv \frac{v_0}{r_0} = -\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_P = (r_0\cos\theta + v_0 t)\,\hat{\imath} + r_0(\sin\theta + 1)\,\hat{\jmath}$$

1) $$d = |\vec{r}_P| = \sqrt{v_0^2\Delta t^2 + 2 v_0 \Delta t\, r_0 \cos\Delta\theta + 2r_0^2 + 2r_0^2 \sin\Delta\theta} \qquad \Delta\theta = \frac{3}{2}\pi - \frac{v_0}{r_0}\Delta t$$

$$= \sqrt{v_0^2\Delta t^2 + 2r_0^2\left(\sin\Delta\theta + \frac{v_0\Delta t}{r_0}\cos\Delta\theta + 1\right)}$$

2) $$\dot{\vec{r}}_P = (-r_0\dot{\theta}\sin\theta + v_0)\,\hat{\imath} + r_0\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\ddot{\vec{r}}_P = \left(-r_0\dot{\theta}^2\cos\theta - r_0\ddot{\theta}\sin\theta\right)\hat{\imath} + \left(r_0\ddot{\theta}\cos\theta - r_0\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\hat{\jmath}$$

$$\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_P = -r_0\dot{\theta}^2\cos\theta\,\hat{\imath} - r_0\dot{\theta}^2\sin\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\Rightarrow a_{//} = -r_0\omega_0^2\cos\Delta\theta = -\frac{v_0^2}{r_0}\cos\Delta\theta$$

3)

$$\vec{r}_g(t=0) \equiv \vec{r}_0 = (\cos\Delta\theta \; r_0 + v_0 \Delta t)\,\hat{\imath} + r_0(\sin\Delta\theta + 1)\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}_g(t=0) \equiv \vec{v}_0 = v_0\,(1 + \sin\Delta\theta)\,\hat{\imath} - v_0 \cos\Delta\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{r}_g(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2$$

In componenti

$$x_g(t) = (r_0 \cos\Delta\theta + v_0 \Delta t) + v_0(1+\sin\Delta\theta)\,t$$

$$y_g(t) = r_0(\sin\Delta\theta + 1) - v_0 \cos\Delta\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\equiv y_0 + v_{0,y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

Cerco t tale che $y_g(t) = 0$ $\Rightarrow$

$$0 = y_0 + v_{0,y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

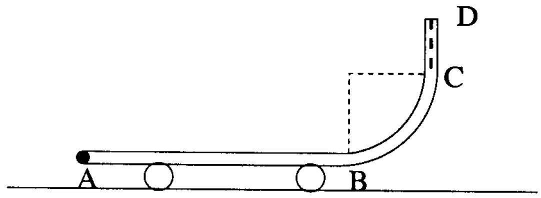
$$t = \frac{-v_{0,y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 + 2g y_0}}{-g} = \frac{v_{0y}}{g}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2g\,y_0}{v_{0y}^2}}\right]$$

$\Rightarrow$

$$d \equiv x_g(t) = (r_0 \cos\Delta\theta + v_0 \Delta t) +$$

$$- \frac{v_0^2}{g}(1+\sin\Delta\theta)\cos\Delta\theta\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2g\,r_0(1+\sin\Delta\theta)}{v_0^2 \cos^2\Delta\theta}}\right)$$

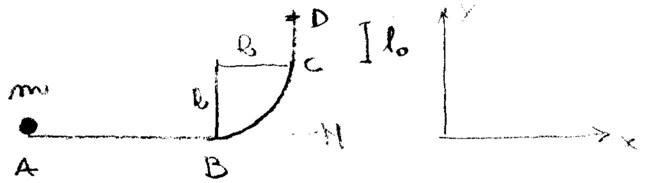
Esercizio 2: Su un carrello libero di muoversi su un piano orizzontale liscio è incollata una guida composta di tre segmenti: AB è orizzontale, BC è un quarto di circonferenza di raggio 0.950 m, e CD è verticale e lungo 0.200 m. Una molla di costante elastica 540 N/m e lunghezza a riposo pari a CD, è attaccata in D come mostrato in figura (la molla è rappresentata dalla linea tratteggiata). Il carrello ha massa 3.90 kg. Una pallina di massa 0.790 kg e dimensioni trascurabili, entra nella guida, inizialmente ferma, con una certa velocità iniziale orizzontale. Non ci sono attriti. In un sistema di riferimento solidale con il piano orizzontale, determinare:



1. il modulo della velocità iniziale minima che la pallina deve avere perché riesca ad aumentare la sua quota di 0.110 m (5,-1)
   $|v_{min}|$ [m/s] = $\boxed{1.63}$ A $\boxed{1.77}$ B $\boxed{1.48}$ C $\boxed{1.63}$ D $\boxed{0.255}$ E $\boxed{17.5}$

Si supponga adesso che la pallina entri nella guida con velocità iniziale orizzontale pari a 18.0 m/s. Determinare:

2. il modulo dell'accelerazione del carrello un istante prima che la pallina passi per il punto C (5,-1)
   $|a|$ [m/s^2] = $\boxed{44.4}$ A $\boxed{44.4}$ B $\boxed{79.4}$ C $\boxed{86.2}$ D $\boxed{17.6}$ E $\boxed{97.9}$
3. il modulo della velocità della pallina, quando la lunghezza della molla si sarà ridotta del 5.80 % (5,-1)
   $|v|$ [m/s] = $\boxed{16.1}$ A $\boxed{63.7}$ B $\boxed{16.1}$ C $\boxed{35.4}$ D $\boxed{112}$ E $\boxed{98.4}$



1) Conservazione della q. di moto del sistema $m+M$ lungo l'asse x, perché le forze esterne (pesi + reazione del piano orizz.) agiscono solo lungo y.

$$m v_0 = (m+M) v_M$$

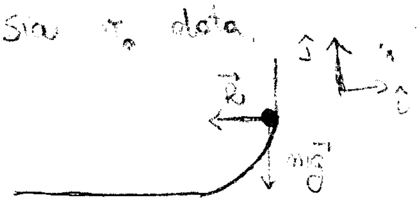
Teorema delle forze vive:

$$\frac{1}{2}(m+M) v_M^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -mgh$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{(m+M)} \frac{m^{\cancel{2}}}{(m+M)^{\cancel{2}}} v_0^2 - \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{m} v_0^2 = -2 \cancel{m} g h$$

$$\frac{\cancel{m} - \cancel{m} - M}{m+M} v_0^2 = -2gh \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2 \frac{m+M}{M} g h}\,.$$

2) Sia v_0 data.



Forze su m: $\quad m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}$

$$\vec{a} = \vec{a}_M + \vec{a}'_m \qquad \vec{a}'_m = -\frac{v'^2_m}{R}\hat{i}$$

Nota che $\vec{v}'_m = v'_m \hat{j}$

$$M\vec{a}_M = -\vec{R} + M\vec{g} + \vec{R}_t$$

$\Rightarrow$ proiettando lungo $\hat{i}$:

$$m\, a_M - m \frac{v_m'^2}{R} = -R$$

$$M\, a_M = R \qquad \Rightarrow \qquad (m+M)\, a_M = m \frac{v_m'^2}{R}$$

Per trovare v_m', si usa il teorema delle forze vive:

$$\frac{1}{2} m \left(v_M^2 + v_m'^2\right) + \frac{1}{2} M v_M^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -mgR$$

$$m v_M + M v_M = m v_0 \quad \leftarrow \text{ cons. q. di moto lungo } x$$

$$\Rightarrow \quad v_M = \frac{m}{m+M} v_0$$

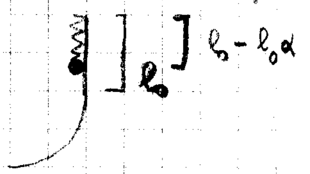
$$\Rightarrow \quad \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{(m+M)} \frac{m^{\cancel{2}}}{(m+M)^{\cancel{2}}} v_0^2 + \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{m} v_m'^2 - \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{m} v_0^2 = -2\cancel{m} g R$$

$$v_m'^2 = \frac{M}{m+M} v_0^2 - 2gR$$

$$\Rightarrow \quad a_M = \frac{m}{m+M} \frac{1}{R} \left(\frac{M}{m+M} v_0^2 - 2gR \right)$$

$$= \frac{mM}{(m+M)^2} \frac{v_0^2}{R} - 2g \frac{m}{m+M}$$

3) Si applica di nuovo il teorema delle forze vive e la conservazione della q.d.m di $m+M$ lungo x:



$$\frac{1}{2} m \left(v_M^2 + v_y^2\right) + \frac{1}{2} M v_M^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -mg\left(R + l_0\alpha\right) - \frac{1}{2} k\, l_0^2 \alpha^2$$

$$v_M = m v_0 / (m+M)$$

$$\Rightarrow \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{(m+M)}\frac{v_0^2 m^{\cancel{2}}}{(m+M)^{\cancel{2}}} + \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}v_y^2 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}v_0^2 = -\cancel{2}\cancel{m}g(R+l_0\alpha) - \cancel{\tfrac{1}{2}}\frac{k}{m}l_0^2\alpha^2$$

$$v_y^2 = \frac{M}{m+M}v_0^2 - 2g(R+l_0\alpha) - \frac{k}{m}l_0^2\alpha^2$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_m|^2 = v_M^2 + v_y^2 = \underbrace{\left(\frac{m^2}{(m+M)^2} + \frac{M}{m+M}\right)}_{\frac{1}{(m+M)^2}(m^2+Mm+M^2)} v_0^2 - 2g(R+l_0\alpha) - \frac{k}{m}l_0^2\alpha^2$$

$$|\vec{v}_m| = \sqrt{\frac{m^2+mM+M^2}{(m+M)^2}v_0^2 - 2g(R+l_0\alpha) - \frac{k}{m}l_0^2\alpha^2}$$

Esercizio 1: Due corpi di ugual massa pari a 2.30 kg interagiscono con una forza che è diretta lungo la loro congiungente, dipende dalla distanza relativa r, ed è della forma:

$$F(r) = \begin{cases} -k_1 r & r < a \\ k_2/r^2 & r > a \end{cases} \tag{1}$$

con k_1=34.0 N/m e k_2=190 Nm^2 e a=5.10 m. All'istante iniziale, uno dei due corpi è fermo nell'origine, mentre l'altro si avvicina da distanza infinita con velocità pari a 49.0 m/s e parametro d'impatto pari a 3.50 m. Determinare:

1. il valore dell'energia potenziale del sistema quando i due corpi si trovano a distanza pari a 1.000 m, assumendola nulla per distanze infinite (5,-1)
   U [J] = $\boxed{-388}$ A $\boxed{-73.7}$ B $\boxed{-388}$ C $\boxed{-41.3}$ D $\boxed{-63.7}$ E $\boxed{-425}$
2. la minima distanza relativa raggiunta dai due corpi (5,-1)
   d_{min} [m] = $\boxed{3.24}$ A $\boxed{3.24}$ B $\boxed{4.82}$ C $\boxed{0.000}$ D $\boxed{0.371}$ E $\boxed{2.07}$
3. la velocità minima che deve avere il corpo incidente tale che le due masse arrivino a sentire la parte attrattiva della forza (5,-1)
   v_{min} [m/s] = $\boxed{11.1}$ A $\boxed{8.53}$ B $\boxed{0.763}$ C $\boxed{19.2}$ D $\boxed{6.41}$ E $\boxed{11.1}$

1) $U(r) - \underset{0}{\underset{\parallel}{U(\infty)}} = -\int_\infty^r \frac{k_2}{x^2}\,dx \qquad r > a$

$U(r) = \frac{k_2}{r} \Rightarrow U(a) = \frac{k_2}{a}$

$U(r) - U(a) = \int_a^r k_1 x\,dx \qquad r < a$

$U(r) - \frac{k_2}{a} = \frac{1}{2} k_1 (r^2 - a^2)$

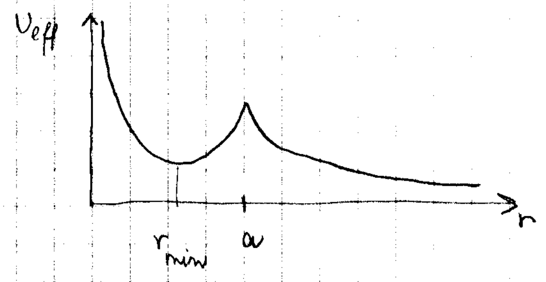
$\Rightarrow U(r) = \frac{1}{2} k_1 (r^2 - a^2) + \frac{k_2}{a} \qquad r < a$

2) E è una cost. del moto e così anche L. Nel sistema di rif. solidale al c.m.:

$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r)}_{U_{eff}(r)}$

con $E = \frac{1}{2}\mu v_0^2$

$L = \mu b v_0 \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\mu v_0^2 \frac{b^2}{r^2} + U(r)}_{U_{eff}(r)}$



r_{min} corrisponde a $\dot{r} = 0 \Rightarrow$

$$E = \frac{1}{2}\mu v_0^2 \frac{b^2}{r^2} + \frac{1}{2}k_1(r^2 - a^2) + \frac{k_2}{a}$$ (nota che $E > U_{eff}(a) \Rightarrow d_{min} < a$)

$$\Rightarrow \underbrace{\left(-E - \frac{1}{2}k_1 a^2 + \frac{k_2}{a}\right)}_{-E_0} + \frac{1}{2}\mu v_0^2 \frac{b^2}{r^2} + \frac{1}{2}k_1 r^2 = 0$$

$$k_1 r^4 - 2E_0 r^2 + \mu v_0^2 b^2 = 0$$

$$r_{min}^2 = \frac{E_0 \pm \sqrt{E_0^2 - \mu v_0^2 b^2 k_1}}{k_1}$$

$$r_{min} = \sqrt{\frac{E_0}{k_1}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{k_1 \mu v_0^2 b^2}{E_0^2}}\right)}$$

3) Si richiede di trovare v_0 t.c. $U_{eff}(a) = E = \frac{1}{2}\mu v_0^2$

$$\Rightarrow \frac{k_2}{a} + \frac{1}{2}\mu v_0^2 \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2}\mu v_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{k_2}{a} = \frac{1}{2}\mu v_0^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 k_2 a}{\mu (a^2 - b^2)}} .$$

Esercizio 2: Un contenitore cilindrico di sezione 0.0410 m^2, con l'asse disposto orizzontalmente, è chiuso dal lato sinistro da un pistone mobile ed è diviso in due parti da un setto con una valvola che si apre quando la pressione nel settore di sinistra è pari a 0.550×10^5 Pa. Contenitore, pistone e setto interno sono adiabatici. A destra e a sinistra del setto ci sono rispettivamente 1.40 e 4.20 moli di uno stesso gas perfetto biatomico, e la forza esercitata sul pistone per tenere il sistema all'equilibrio è di 240 N. Il volume occupato dal gas di sinistra è 0.650 m^3. La temperatura iniziale del gas di destra è 290 K. Si aumenta quasi staticamente l'intensità della forza esterna in modo tale da raggiungere il punto di apertura della valvola. Nell'istante in cui la valvola si apre, determinare:

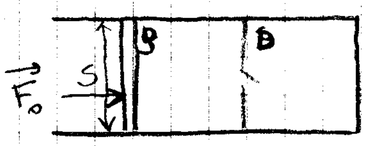
1. il lavoro fatto dalla forza esterna nella trasformazione (5,-1)
   L [J] = $\boxed{8529}$ A $\boxed{1410}$ B $\boxed{887}$ C $\boxed{8530}$ D $\boxed{575}$ E $\boxed{3890}$

Si supponga che la valvola sia tale per cui all'istante in cui essa si apre, il gas di sinistra ha temperatura 320 K. In questo istante, si blocca il pistone mobile. Determinare.

2. la temperatura finale del sistema (5,-1)
   T [K] = $\boxed{313}$ A $\boxed{264}$ B $\boxed{2430}$ C $\boxed{313}$ D $\boxed{2640}$ E $\boxed{343}$

Si supponga adesso che nel settore di destra, prima dell'apertura della valvola, sia fatto il vuoto e che il pistone mobile sia bloccato quando il volume del gas di sinistra sia 0.480 volte quello di destra. Viene aperta la valvola e il gas di sinistra diffonde nel settore di destra. Determinare:

3. la variazione di entropia del gas (5,-1)
   ΔS [J/K] = $\boxed{39.3}$ A $\boxed{14.7}$ B $\boxed{0.000}$ C $\boxed{39.3}$ D $\boxed{17.9}$ E $\boxed{8.98}$



S $\quad n_D \quad n_S$

$P_{S,a} \quad V_S$

$F_0 \quad T_D$

1) $P_S = \dfrac{F_0}{S} \Rightarrow$

$$T_S = \frac{P_S V_S}{n_S R} = \frac{F_0 V_S}{n_S S R}$$

$$P_{S,fin} = P_{S,a}$$

$$\Delta U_S = \cancel{Q_S}^{\,0} + \mathcal{L}_F = \mathcal{L}_F$$

$\|$

$$n_S C_V (T_{S,fin} - T_S) \qquad C_V = \frac{5}{2} R$$

$$PV^\gamma = \text{cost} \Rightarrow P\left(\frac{T}{P}\right)^\gamma = \text{cost} \Rightarrow T P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{cost}$$

$$\gamma = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow \quad P_{S,fin}^{\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)} \; T_{S,fin} = P_S^{\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)} \; T_S$$

$$\Rightarrow \quad T_{S,fin} = T_S \left(\frac{P_S}{P_{S,fin}} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}_F = n_S \frac{5}{2} R \; T_S \left(\left(\frac{P_S}{P_{S,fin}} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1} - 1 \right) \qquad -1 + \frac{5}{7} = -\frac{2}{7}$$

$$= \cancel{n_S} \frac{5}{2} \cancel{R} \; \frac{F_0 V_S}{\cancel{n_S} S \cancel{R}} \left[\left(\frac{F_0}{S \, P_{S,a}} \right)^{\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)} - 1 \right]$$

$$= \frac{5}{2} \frac{F_0 V_S}{S} \left[\left(P_{S,a} \frac{S}{F_0} \right)^{\frac{2}{7}} - 1 \right]$$

2) $T_{S,fin}$ data

non ci sono forze est.

$$\Delta U_{S+D} = \cancel{Q_S} + \cancel{\mathcal{L}_S} + \cancel{Q_D} + \cancel{\mathcal{L}_D} = 0$$

trasf. adiabatica

$$\Rightarrow \quad n_S T_{S,fin} + n_D T_D = (n_S + n_D) \; T$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{n_S T_{S,fin} + n_D T_D}{n_S + n_D}$$

3) $$\Delta S = n \, c_V \ln \frac{T_f}{T_i} + n R \ln \frac{V_f}{V_i}$$

Nel processo di diffusione, $\Delta U = 0 \Rightarrow T_f = T_i \Rightarrow$

$$\Delta S = n_S R \ln \left(\frac{V_S + V_D}{V_S} \right) = n_S R \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)$$