Compito n. 1

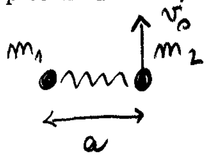
Nome	*Cognome*	*Numero di matricola*

Compitino di Fisica A2 del 30/03/2003.

Esercizio 1: Due particelle di massa 7.10 kg e 1.70 kg sono attaccate ad una molla di costante elastica 31.0 N/m e lunghezza a riposo nulla. All'istante iniziale, le due palline sono a distanza 0.980 m, e la particella di destra si allontana da quella di sinistra con una velocità pari a 37.0 m/s, in direzione ortogonale alla retta congiungente le due particelle. In un sistema di riferimento solidale al centro di massa, determinare:

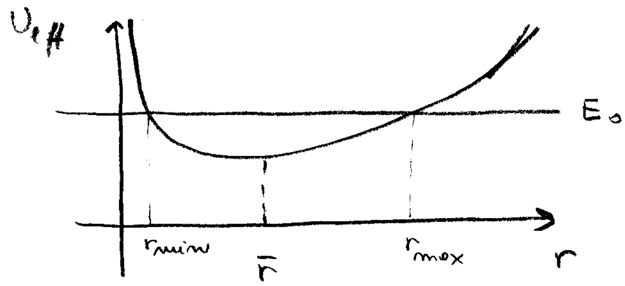
1. la massima distanza tra le due particelle (5,-1)
   r_{max} [m] = $\boxed{7.78}$ A $\boxed{8.81}$ B $\boxed{2.10}$ C $\boxed{5.06}$ D $\boxed{11.5}$ E $\boxed{7.78}$
2. il valore assoluto della componente dell'accelerazione relativa lungo la retta congiungente le due particelle, nel punto in cui la velocità radiale relativa è massima (5,-1)
   a_r [m/s^2] = $\boxed{62.4}$ A $\boxed{45.1}$ B $\boxed{296}$ C $\boxed{62.4}$ D $\boxed{211}$ E $\boxed{120}$
3. il modulo della velocità iniziale tale che il moto relativo delle due particelle sia circolare e uniforme (5,-1)
   v_0 [m/s] = $\boxed{4.66}$ A $\boxed{4.66}$ B $\boxed{21.9}$ C $\boxed{66.6}$ D $\boxed{45.9}$ E $\boxed{10.4}$

Compito n. 1



$$E = \frac{1}{2}\mu v_0^2 + \frac{1}{2}k a^2$$

$$L = \mu a v_0$$



1) $$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{1}{2}kr^2}_{U_{eff}(r)}$$

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = \frac{L^2(-2)}{2\mu r^3} + \frac{1}{2}k2r = 0 \Rightarrow \bar{r}^4 = \frac{L^2}{\mu k}$$

$$E = U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{1}{2}kr^2$$

$$\mu k r^4 - 2\mu E r^2 + L^2 = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{E}{k} \pm \sqrt{\frac{E^2}{k^2} - \frac{L^2}{\mu k}} \Rightarrow r_{max} = \sqrt{\frac{E}{k} + \sqrt{\frac{E^2}{k^2} - \frac{L^2}{\mu k}}}$$

r_{max} ($+$), r_{min} ($-$)

$\dot{r}$ è max $\Rightarrow U_{eff}$ è min

2) $$|a_r| = |(\cancel{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2)| = \bar{r}\dot{\theta}^2 = \bar{r}\frac{L^2}{\mu^2\bar{r}^4} = \frac{L^2}{\mu^2\bar{r}^3} = \frac{k}{\mu}\frac{\overbrace{L^2}^{\bar{r}^4}}{\mu k\,\bar{r}^3} = \frac{k}{\mu}\bar{r}$$

$L = \mu r^2\dot{\theta}$

3) Si richiede $r_{max} = r_{min} = \bar{r} \Rightarrow$

$$\frac{E^2}{k^2} - \frac{L^2}{\mu k} = 0 \Rightarrow E = L\sqrt{\frac{k}{\mu}} = \mu a v_0\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$\frac{1}{2}\mu v_0^2 + \frac{1}{2}ka^2 = \sqrt{\mu k}\, a v_0 \qquad \mu v_0^2 - 2\sqrt{\mu k}\,a v_0 + ka^2 = 0$$

$$v_0 = \frac{\sqrt{\mu k}\,a \pm \cancel{\sqrt{\mu k a^2 - k\mu a^2}}}{\mu} = \sqrt{\frac{k}{\mu}}\,a$$

Compito n. 1

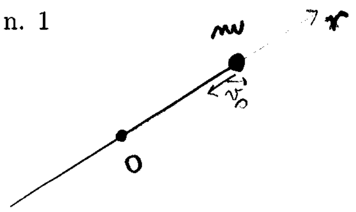
Nome | *Cognome* | *Numero di matricola*

Compitino di Fisica A2 del 30/03/2003

Esercizio 2: Un'asta di massa 15.0 kg e lunghezza 4.50 m è libera di ruotare su un piano orizzontale senza attrito attorno al suo centro di massa. Un manicotto di massa 4.90 Kg, di dimensioni trascurabili, scorre senza attrito lungo l'asta. All'istante iniziale l'asta ruota con una velocità angolare di 8.40 Rad/sec mentre il manicotto, posizionato ad una dell'estremità dell'asta, ha una velocità relativa di 2.90 m/s diretta verso il centro di rotazione. Nel sistema di riferimento inerziale in quiete rispetto al centro di rotazione dell'asta determinare:

1. la velocità di rotazione dell'asta quando il manicotto è a una distanza dal centro di rotazione dell'asta pari a $\underbrace{0.680}_{\beta}$ volte la semilunghezza (5,-1)
   ω [Rad/s] = $\boxed{11.4}$ A $\boxed{31.9}$ B $\boxed{11.4}$ C $\boxed{175}$ D $\boxed{200}$ E $\boxed{77.0}$
2. la distanza minima dall'asse di rotazione raggiunta dal manicotto (5,-1)
   d_{min} [m] = $\boxed{2.22}$ A $\boxed{20.1}$ B $\boxed{8.13}$ C $\boxed{2.22}$ D $\boxed{4.54}$ E $\boxed{14.3}$
3. la velocità relativa minima da imprimere al manicotto all'istante iniziale affinchè questo passi attraverso il centro di rotazione (5,-1)
   v_{min} [m/s] = $\boxed{26.6}$ A $\boxed{86.2}$ B $\boxed{26.6}$ C $\boxed{4.29}$ D $\boxed{11.2}$ E $\boxed{59.4}$

Compito n. 1



l
M
m
ω_0
v_0

$I_0 = \frac{1}{12} M l^2$

$\alpha = m \frac{l^2}{4} \frac{12}{M l^2} = \frac{3m}{M}$

1) Conservazione del momento angolare $L = I_0 \omega_0 + m \frac{l^2}{4} \omega_0 = I_0 (1+\alpha) \omega_0$

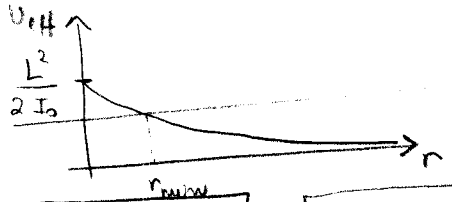
$$\Rightarrow \quad I_0 \dot\theta + m\left(\beta \frac{l}{2}\right)^2 \dot\theta = L = I_0 (1+\alpha)\omega_0$$

$$\dot\theta = \frac{I_0 (1+\alpha)\omega_0}{I_0 + m\beta^2 \frac{l^2}{4}}$$

2) Conservazione dell'energia $E = \frac{1}{2}\left(I_0 + m\frac{l^2}{4}\right)\omega_0^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} I_0 (1+\alpha)\omega_0^2 + \frac{1}{2} m v_0^2$

$$E = \frac{1}{2} I_0 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} m \dot r^2 = \frac{1}{2} m \dot r^2 + \frac{1}{2}\cancel{(I_0 + mr^2)} \frac{L^2}{(I_0 + mr^2)^{\cancel{2}}}$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot r^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2(I_0 + mr^2)}}_{V_{eff}}$$



$$\Rightarrow \quad E = \frac{L^2}{2(I_0 + mr^2)} \quad \Rightarrow \quad r_{min} = \sqrt{\frac{L^2 - 2 E I_0}{2 m E}} = \sqrt{\frac{I_0 \omega_0^2 \alpha (1+\alpha) - m v_0^2}{\frac{m^2 v_0^2}{I_0} + m (1+\alpha)\omega_0^2}}$$

3) Si richiede v_{min} t.c. $E = \frac{L^2}{2 I_0} \Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}} m v_0^2 + \cancel{\frac{1}{2}} I_0 (1+\alpha)\omega_0^2 = \frac{I_0^{\cancel{2}} (1+\alpha)^2 \omega_0^2}{\cancel{2 I_0}}$

$$v_0^2 = \frac{I_0 \omega_0^2 (1+\alpha)(\cancel{1}+\alpha \cancel{-1})}{m} \qquad v_0 = \omega_0 \sqrt{\frac{I_0 (1+\alpha)\alpha}{m}}.$$