Esercizio 1: Due particelle A e B interagiscono con una forza che dipende dal vettore $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ secondo la legge

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{cases} k_1 \mathbf{r}/r^4 & r > a \\ -k_2 \mathbf{r} & r \leq a \end{cases} \tag{1}$$

con k_1=680 N m^3, k_2=61.0 N/m e a=5.10 m. Con $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ si è indicata la forza esercitata su B da A. Le particelle A e B hanno masse rispettivamente pari a 7.10 kg e 1.80 kg. All'istante iniziale, la particella A è ferma, mentre la particella B si trova ad una distanza infinita da A, e si avvicina con parametro d'impatto di 1.10 m e velocità di 4.50 m/s. Determinare:

1. l'energia potenziale per r=4.00 m (5,0)
   U [J] = $\boxed{-292}$ A $\boxed{-292}$ B $\boxed{-305}$ C $\boxed{-1380}$ D $\boxed{-263}$ E $\boxed{-505}$
2. la minima distanza relativa tra A e B (5,0)
   d_{min} [m] = $\boxed{0.149}$ A $\boxed{0.149}$ B $\boxed{0.221}$ C $\boxed{2.60}$ D $\boxed{3.56}$ E $\boxed{3.73}$
3. il valore massimo per il modulo della velocità iniziale di B, tale per cui, col medesimo valore per il parametro d'impatto, le due particelle non arrivino a "sentire" la parte di forza repulsiva (5,0)
   $v_{B,max}$ [m/s] = $\boxed{4.37}$ A $\boxed{12.4}$ B $\boxed{2.51}$ C $\boxed{3.80}$ D $\boxed{1.15}$ E $\boxed{4.37}$

---

1) $$U(r>a) - \underbrace{U(\infty)}_{=0} = -\int_\infty^r \frac{k_1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}\frac{k_1}{x^2}\Big|_\infty^r = \frac{k_1}{2r^2}$$

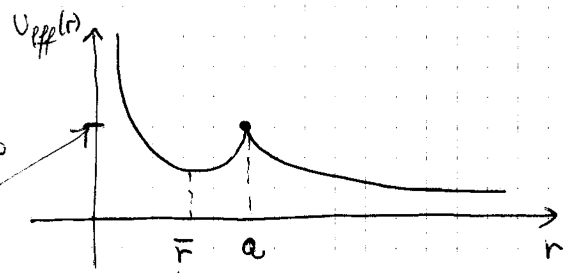
$$U(r<a) - U(a) = U(r<a) - \frac{k_1}{2a^2} = -\int_a^r (-k_2 x)\,dx = \frac{1}{2}k_2(r^2-a^2)$$

$$\Rightarrow \quad U(r<a) = \frac{1}{2}k_2(r^2-a^2) + \frac{k_1}{2a^2}$$

2) $$E_0 = \frac{1}{2}\mu v_0^2 \; ; \quad L = \mu v_0 b \longrightarrow \text{costanti del moto}, \quad \mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$$

$$E_0 = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r)}_{U_{eff}(r)}$$

$U_{eff}(r) \longrightarrow$ grafico

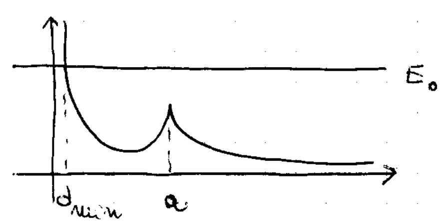


$$U_{eff}(a) = \frac{L^2}{2\mu a^2} + \frac{k_1}{2a^2}$$

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = 0 \Rightarrow k_2 r - \frac{L^2}{\mu r^3} = 0$$

$$\bar{r} = \left(\frac{L^2}{\mu k_2}\right)^{1/4}$$

$E_0 = \frac{1}{2}\mu v_0^2 > U_{eff}(a) \Rightarrow$
per trovare d_{min} devo usare $U(r<a)$



$$\Rightarrow \quad E_0 = \cancel{\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{1}{2}k_2 r^2 - \frac{1}{2}k_2 a^2 + \frac{k_1}{2a^2} \Rightarrow \tilde{E} = E_0 + \frac{1}{2}k_2 a^2 - \frac{1}{2}\frac{k_1}{a^2} =$$

$$= \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{1}{2}k_2 r^2$$

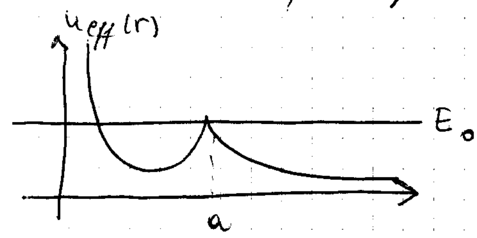
$$\Rightarrow -2\mu\tilde{E}r^2 + \mu k_2 r^4 + L^2 = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{\tilde{E}}{k_2} \ominus \frac{\sqrt{\mu^2\tilde{E}^2 - \mu k_2 L^2}}{\mu k_2} \Rightarrow$$

$\hookrightarrow$ sol. fisica

$$d_{min} = \frac{\tilde{E}}{k_2} - \frac{\tilde{E}}{k_2}\sqrt{1 - \frac{\cancel{\mu} k_2 L^2}{\mu^{\cancel{2}} \tilde{E}^2}} = \frac{\tilde{E}}{k_2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{k_2 L^2}{\mu \tilde{E}^2}}\right)$$

3) La domanda vuole v_{0max} t.c.

$E_0 = U_{eff}(a)$



$$\Rightarrow \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\mu v_{0_{max}}^2 = \frac{\mu^{\cancel{2}} b^2 v_{0max}^2}{\cancel{2}\cancel{\mu} a^2} + \frac{k_1}{\cancel{2} a^2}$$

$$\mu\, v_{0_{max}}^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = \frac{k_1}{a^2} \quad \Rightarrow \quad v_{0_{max}} = \sqrt{\frac{k_1}{\mu(a^2 - b^2)}}$$

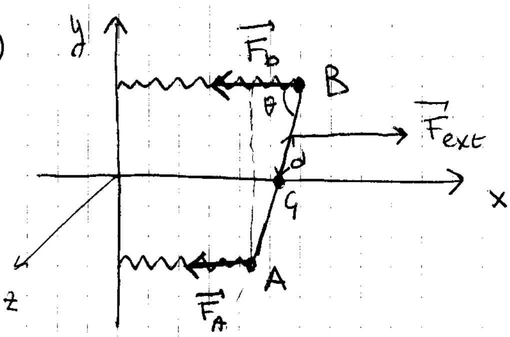
Esercizio 1: Un'asta omogenea di sezione trasversale trascurabile, lunghezza 4.80 m e massa 1.10 kg può muoversi senza attrito sul piano orizzontale (x, y) liscio. Gli estremi A e B dell'asta sono collegati ad una barra, coincidente con l'asse y, per mezzo di due molle uguali, di costante elastica 40.0 N/m, lunghezza a riposo nulla e massa trascurabile. Le molle scorrono senza attrito sull'asta e si mantengono sempre parallele all'asse x. Inizialmente l'asta è mantenuta in equilibrio da un'opportuna forza esterna. Nella posizione di equilibrio le distanze degli estremi A e B dall'asse y sono rispettivamente 1.80 m e 2.70 m. Determinare:

1. la distanza dal centro dell'asta del punto d'applicazione della forza che mantiene in equilibrio l'asta (5,0)
   d [m] = $\boxed{0.480}$ A $\boxed{2.57}$ B $\boxed{0.480}$ C $\boxed{4.35}$ D $\boxed{6.48}$ E $\boxed{0.725}$

All'istante t=0 la forza esterna è rimossa ed il sistema è lasciato libero di evolvere sotto l'azione delle forze elastiche prodotte dalle molle. In queste condizioni determinare:

2. la posizione del centro di massa al tempo 0.0170 s (5,0)
   $r_{c.m.}$ [m] = $\boxed{2.23}$ A $\boxed{3.41}$ B $\boxed{4.10}$ C $\boxed{7.48}$ D $\boxed{3.21}$ E $\boxed{2.23}$
3. il modulo dell'accelerazione angolare dell'asta all'istante t=0 (5,0)
   α [Rad/s^2] = $\boxed{40.2}$ A $\boxed{19.1}$ B $\boxed{40.2}$ C $\boxed{11.0}$ D $\boxed{15.1}$ E $\boxed{23.5}$

1)



$$\text{Eq.} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_{ext} = 0 \\ \vec{M}_{F_A} + \vec{M}_{F_B} + \vec{M}_{F_{ext}} = 0 \end{cases}$$ come polo scelgo G ≡ centro di massa

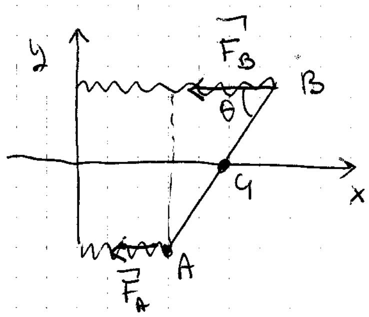
$$F_A = k\,a \qquad F_B = k\,b \quad \Rightarrow \quad F_{ext} = k(a+b)$$; le direzioni e versi sono quelli in figura

$$\vec{M}_{F_A} = -\hat{z}\; k a \frac{L}{2}\sin\theta$$

$$\vec{M}_{F_B} = \hat{z}\; k b \frac{L}{2}\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \cancel{k}(b-a)\frac{L}{2}\cancel{\sin\theta} - \cancel{k}(a+b)\,d\,\cancel{\sin\theta} = 0$$

$$\vec{M}_{F_{ext}} = -\hat{z}\; F_{ext}\, d \sin\theta \qquad d = \frac{L}{2}\,\frac{b-a}{b+a}$$

2)



$$M\ddot{x}_{CM} = -k x_A - k x_B$$

$$\begin{cases} x_{CM} = x_A + \frac{L}{2}\cos\theta \\ x_{CM} = x_B - \frac{L}{2}\cos\theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$M\ddot{x}_{CM} = -k(x_A + x_B) = -k\left(x_{CM} - \frac{L}{2}\cos\theta + x_{CM} + \frac{L}{2}\cos\theta\right) = -2k\,x_{CM}$$

$$\Rightarrow \quad x_{CM}(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad \omega = \sqrt{\frac{2k}{M}}$$

A $t=0$ $\quad \dot{x}_{CM}(0) = 0 \qquad\qquad A\cos\varphi = \frac{a+b}{2} \qquad A = \frac{a+b}{2}$

$\Rightarrow$

$x_{CM}(0) = \frac{a+b}{2} \qquad -A\omega\sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = 0$

$$\Rightarrow \quad x_{CM}(t) = \frac{a+b}{2}\cos\omega t \qquad \omega = \sqrt{\frac{2k}{M}}$$

3) i) Risolviamo con la II eq. cardinali. Momenti delle forze rispetto a O

$$\overline{M}_{F_B} = F_B\,\frac{L}{2}\sin\theta\,\hat{z} = k\,x_B\,\frac{L}{2}\sin\theta\,\hat{z}$$

$$\overline{M}_{F_A} = F_A\,\frac{L}{2}\sin\theta\,(-\hat{z}) = -k\,x_A\,\frac{L}{2}\sin\theta\,\hat{z}$$

$$I_o\ddot{\theta} = k(x_B - x_A)\frac{L}{2}\sin\theta \qquad\qquad I_o = \frac{1}{12}ML^2$$

$$x_B - x_A = L\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$I_o\ddot{\theta} = \frac{L^2}{2}\cos\theta\sin\theta\,k \quad \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\,\frac{k\,L^2\cos\theta\sin\theta}{ML^2}\,12 = 6\,\frac{k}{M}\cos\theta\sin\theta$$

A $t=0$ $\quad \cos\theta = \frac{b-a}{L} \quad \Rightarrow$

$$\ddot{\theta} = 6\,\frac{k}{M}\,\frac{b-a}{L}\sqrt{1 - \frac{(b-a)^2}{L^2}}\,.$$

ii) Risolviamo con la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}M\dot{x}_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_o\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}k\,x_A^2 + \frac{1}{2}k\,x_B^2 = E = cost$$

$$\frac{1}{2}M\dot{x}_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_o\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}k\left(x_{CM}^2 + \frac{L^2}{4}\cos^2\theta - \cancel{L\cos\theta\,x_{CM}} + \right.$$

$$\left. + x_{CM}^2 + \frac{L^2}{4}\cos^2\theta + \cancel{L\cos\theta\,x_{CM}}\right) = E$$

$$\frac{1}{2} M \dot{x}_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 + K x_{CM}^2 + \frac{1}{4} k L^2 \cos^2\theta = E$$

$$M \dot{x}_{CM} \ddot{x}_{CM} + I_0 \dot{\theta} \ddot{\theta} + 2k \dot{x}_{CM} x_{CM} - \frac{1}{4} k L^2 \, 2 \cos\theta \sin\theta \, \dot{\theta} = 0$$

$M \ddot{x}_{CM} + 2k x_{CM} = 0$ (dalla I eq. cardinale)

$$\Rightarrow \quad I_0 \ddot{\theta} - \frac{k L^2}{2} \cos\theta \sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{k \cancel{L^2}}{\frac{1}{\cancel{12}_{6}} M \cancel{L^2}} \cos\theta \sin\theta = 6 \frac{k}{M} \cos\theta \sin\theta$$