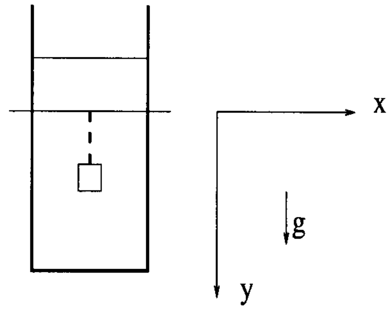
Esercizio 1: Si consideri il sistema in figura: un corpo di massa 6.80 kg e volume 0.00250 m^3 è attaccato ad una delle estremità di una molla (rappresentata in figura da una linea tratteggiata) di costante elastica pari a 84.0 N/m e lunghezza a riposo pari a 0.710 m. L'altra estremità è attaccata ad un'asticella fissa e il tutto è immerso in un recipiente pieno d'acqua. Si supponga che l'acqua sia un fluido che genera una forza di attrito proporzionale alla velocità del corpo in movimento, con un certo coefficiente di proporzionalità α. Si assuma inoltre che la densità dell'acqua sia 10^3 kg/m^3. Determinare:

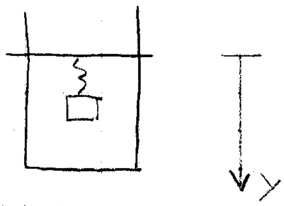


1. il valore di α per il quale il moto dell'oscillatore è smorzato criticamente (5,-1)
   α [N s/m] = $\boxed{47.8}$ A $\boxed{8.10}$ B $\boxed{11.3}$ C $\boxed{47.8}$ D $\boxed{5.94}$ E $\boxed{4.86}$

Si scelga adesso come sistema di coordinate quello in figura. All'istante iniziale, il corpo è nella sua posizione di equilibrio ed ha velocità pari a 3.20 m/s, diretta in basso lungo l'asse verticale. Si supponga inoltre che il coefficiente α sia pari a 5.40 N s/m. Determinare:

2. la massima distanza dall'asticella che il corpo può raggiungere (5,-1)
   d_{max} [m] = $\boxed{1.99}$ A $\boxed{1.65}$ B $\boxed{0.819}$ C $\boxed{1.99}$ D $\boxed{2.30}$ E $\boxed{3.52}$

3. il lavoro della forza di attrito generata dall'acqua tra l'istante iniziale e l'istante in cui il corpo ripassa per la prima volta dalla sua posizione di equilibrio (5,-1)
   L [J] = $\boxed{-17.8}$ A $\boxed{-38.2}$ B $\boxed{-189}$ C $\boxed{-17.8}$ D $\boxed{-21.7}$ E $\boxed{34.8}$



$$m\ddot{y} = mg - \rho_{H_2O} V g - k(y - l_0) - \alpha \dot{y}$$

$y - l_0 = z \Rightarrow \quad m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = m_{eff}\, g$

$m_{eff} = m - \rho_{H_2O} V \qquad z(t) = z_0 e^{i\lambda t} \Rightarrow$

$$-m\lambda^2 + i\alpha\lambda + k = 0 \qquad \lambda = -\frac{i\alpha}{2m} \pm \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}$$

$$\Omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}$$

1) oscill. criticamente smorzato $\Rightarrow \Omega = 0 \Rightarrow \frac{k}{\cancel{m}} = \frac{\alpha^2}{4m^{\cancel{2}}}$

$$\alpha = 2\sqrt{mk}$$

2) Soluzione $z(t) = z_0 e^{-\frac{\alpha}{2m}t} \sin(\Omega t + \varphi) + z_{particolare}$

z_{part} : $z = \frac{m_{eff}\, g}{k} \Rightarrow$

$$z(t) = z_0 \, e^{-\frac{\alpha}{2m}t} \sin(\Omega t + \varphi) + \frac{m_{eff}\, g}{k} \Rightarrow$$

$$y(t) = \underbrace{z_0}_{} \, e^{-\frac{\alpha t}{2m}} \sin(\Omega t + \underbrace{\varphi}_{}) + \frac{m_{eff}\, g}{k} + l_0$$

cost. da determinare usando $y(t=0) = y_{eq}$

$\dot{y}(t=0) = v_0$

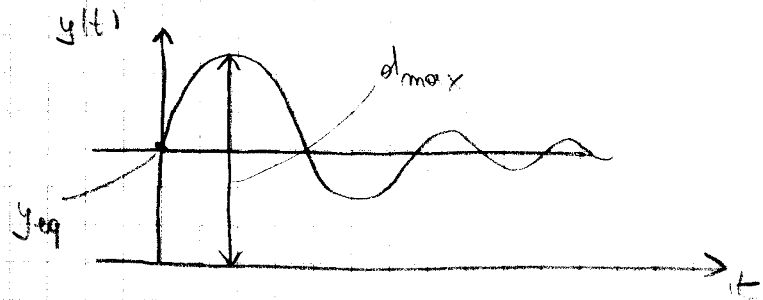
$$y_{eq} = \frac{m_{eff}\, g}{k} + l_0 \Rightarrow$$

$y(t=0) = y_{eq} \Rightarrow z_0 \sin\varphi = 0$ $\qquad \varphi = 0$

$\Rightarrow$

$\dot{y}(t=0) = v_0 \Rightarrow z_0 \, \Omega \cos\varphi = v_0$ $\qquad z_0 = v_0 / \Omega$

$$y(t) = \frac{v_0}{\Omega} e^{-\frac{\alpha t}{2m}} \sin \Omega t + y_{eq}$$



$$d_{max} = y\left(\frac{T}{4}\right) = \frac{v_0}{\Omega} e^{-\frac{\alpha}{2m}\frac{\pi}{2\Omega}} \cancel{\sin\left(\Omega \frac{\pi}{2\Omega}\right)} + y_{eq}$$

$$= \frac{v_0}{\Omega} e^{-\frac{\alpha \pi}{4m\Omega}} + \frac{m_{eff}\, g}{k} + l_0$$

3) $t = \frac{T}{2}$ $\qquad \dot{y}\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{v_0}{\cancel{\Omega}} \cancel{\Omega} \, e^{-\frac{\alpha}{2m}\frac{\pi}{\Omega}} \cos\left(\Omega \frac{\pi}{\Omega}\right)$

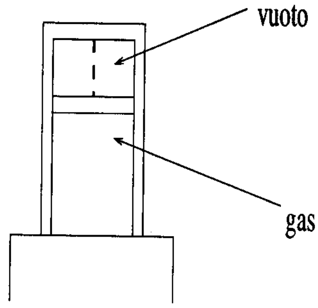
$$= - v_0 \, e^{-\frac{\alpha\pi}{2m\Omega}} \Rightarrow$$

$$L = E_c\left(\frac{T}{2}\right) - E_c(0) = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(e^{-\frac{\alpha\pi}{m\Omega}} - 1\right)$$

t. forze vive

Compitino 28/05/04 1

Esercizio 2: Si consideri il sistema in figura. In un cilindro ci sono 0.240 moli di gas perfetto biatomico. Nel cilindro può scorrere senza attrito un pistone di massa 2.20 kg, collegato al lato superiore del cilindro stesso da una molla (rappresentata in figura dalla linea tratteggiata) di costante elastica 24.0 N/m e lunghezza a riposo nulla. Sul lato superiore del pistone è stato fatto il vuoto. La sezione del cilindro è pari a 0.0380 m^2. Il cilindro può scambiare calore con un'unica sorgente inizialmente a temperatura pari a 370 K. Supponendo che il sistema sia in equilibrio e che la lunghezza della molla sia 0.560 m, determinare:



1. il volume del gas (5,-1)
   V_0 [m^3] = $\boxed{3.28}$ A $\boxed{5.94}$ B $\boxed{3.28}$ C $\boxed{32.6}$ D $\boxed{2.13}$ E $\boxed{23.6}$

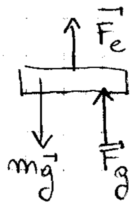
Si supponga adesso di variare in maniera quasi statica la temperatura della sorgente fino a far sì che la molla abbia lunghezza nulla. A quell'istante, la temperatura della sorgente è 410 K. Determinare:

2. la quantità di calore scambiato dal gas nella trasformazione (5,-1)
   Q_{gas} [J] = $\boxed{208}$ A $\boxed{208}$ B $\boxed{340}$ C $\boxed{605}$ D $\boxed{274}$ E $\boxed{77.2}$

Si cambiano adesso le condizioni iniziali del sistema: quando la sorgente è alla temperatura di 330 K, il volume occupato dal gas è pari a 0.650 m^3. Si varia di nuovo quasi staticamente la temperatura della sorgente fino a far sì che la molla abbia lunghezza nulla. La temperatura della sorgente è allora 500 K. Determinare:

3. la variazione di entropia della sorgente (5,-1)
   ΔS_{sorg} [J/K] = $\boxed{-4.02}$ A $\boxed{-2.05}$ B $\boxed{-4.02}$ C $\boxed{-3.44}$ D $\boxed{-0.726}$ E $\boxed{-1.03}$

1)



$$k\ell_m - mg + P_g S = 0 \qquad P_g = \frac{mg - k\ell_m}{S}$$

$$V_0 = \frac{n R T_0 S}{mg - k\ell_m}$$

2)

$$\Delta U = \Delta Q_g + \mathcal{L}_{ext} \qquad \mathcal{L}_{ext} = -mg\,\ell_m + \frac{1}{2}k\ell_m^2$$

$$n\underbrace{c_v}_{\frac{5}{2}R}(T_f - T_0) + mg\,\ell_m - \frac{1}{2}k\ell_m^2 = \Delta Q_g$$

3)

$$\Delta S_{gas} + \Delta S_{sorg} = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta S_{sorg} = -\Delta S_{gas} = -\left(nR\ln\frac{V_f}{V_i} + nc_v\ln\frac{T_f}{T_i}\right)$$

$$V_f = \frac{nRT_f S}{mg} \Rightarrow \Delta S_{sorg} = nR\ln\frac{V_i\,mg}{nRT_f S} + nc_v\ln\frac{T_i}{T_f}$$