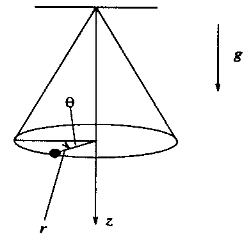
Esercizio 1: Una pallina di massa 0.650 kg si muove lunga una guida intagliata su un cono di semiapertura 0.440 Rad. Si scelga il sistema di coordinate r, θ, z come in figura. La traiettoria della pallina può essere descritta dall'equazione $z(\theta) = z_0 + c\theta$, con c=0.1000 m/Rad. La pallina di muove con accelerazione angolare costante, pari a 0.960 Rad/s^2. All'istante iniziale, la pallina ha velocità nulla ed è distante dall'asse z di 0.0920 m. Si misurano gli angoli a partire dalla posizione iniziale. Dopo 3.70 s, determinare:



1. il modulo della velocità istantanea (5,-1)
   $|v|$ [m/s] = $\boxed{1.48}$ A $\boxed{4.43}$ B $\boxed{1.48}$ C $\boxed{0.380}$ D $\boxed{1.68}$ E $\boxed{0.488}$
2. il modulo della componente dell'accelerazione parallela alla velocità istantanea (5,-1)
   $|a_{//}|$ [m/s^2] = $\boxed{0.972}$ A $\boxed{8.91}$ B $\boxed{1.88}$ C $\boxed{0.972}$ D $\boxed{0.347}$ E $\boxed{0.529}$
2. il modulo della componente lungo l'asse z della forza esercitata dalla guida sulla pallina (5,-1)
   $|F_z|$ [N] = $\boxed{6.44}$ A $\boxed{3.69}$ B $\boxed{13.3}$ C $\boxed{6.44}$ D $\boxed{2.02}$ E $\boxed{1.05}$

$$\begin{cases} z(\theta) = z_0 + c\theta \\ r(\theta) = z\, tg\alpha \\ \theta(t) = \frac{1}{2}\lambda t^2 \end{cases} \qquad r(t=0) = r_0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \theta(t) = \frac{1}{2}\lambda t^2 \\ r(t) = r_0 + \frac{1}{2}\lambda c\, tg\alpha\, t^2 \\ z(t) = \frac{r_0}{tg\alpha} + \frac{1}{2}\lambda c\, t^2 \end{cases}$$

1) $\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \dot{z}\,\hat{e}_z \Rightarrow$

$$v_r = \lambda c\, tg\alpha\, t$$

$$v_\theta = \underbrace{\left[r_0 + \frac{1}{2}\lambda c\, tg\alpha\, t^2\right]}_{r} \lambda t$$

$$v_z = \lambda c\, t$$

$$\Rightarrow |\vec{v}| = \lambda t \sqrt{c^2 tg^2\alpha + r^2 + c^2} = \lambda t \sqrt{\frac{c^2}{\cos^2\alpha} + r^2}$$

2) $\vec{v} = v\,\hat{T}$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{T} + \frac{v^2}{R}\hat{N} \Rightarrow a_{//} = \frac{dv}{dt} = \lambda\sqrt{\frac{c^2}{\cos^2\alpha} + r^2} + \frac{\lambda t}{\cancel{2}\sqrt{\frac{c^2}{\cos^2\alpha} + r^2}}\, \cancel{2} r\, \lambda c\, tg\alpha\, t$$

$$\Rightarrow a_{//} = \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{c^2}{\cos^2\alpha} + r^2}} \left(\frac{c^2}{\cos^2\alpha} + r^2 + r\lambda c\, tg\alpha\, t^2\right)$$

Si poteva ottenere anche in questa seconda maniera:

$\vec{a} = a_{//}\,\hat{e}_{//} + a_\perp\,\hat{e}_\perp$ con $\hat{e}_{//}$ e $\hat{e}_\perp$ versori $//$ e $\perp$ a $\vec{v}$

$$\Rightarrow \quad a_{/\!/} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{e}_\theta + \ddot{z}\,\hat{e}_z$$

$$\vec{a}\cdot\vec{v} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\dot{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,r\dot{\theta} + \ddot{z}\,\dot{z}$$

$$= \lambda c\,\mathrm{tg}\alpha\, t\left[\lambda c\,\mathrm{tg}\alpha - r\lambda^2 t^2\right]$$

$$+ r\lambda t\left[r\lambda + 2\lambda c\,\mathrm{tg}\alpha\, t\,\lambda t\right]$$

$$+ \lambda c t\,\lambda c = \lambda^2 t\left[c^2\,\mathrm{tg}^2\alpha \cancel{- r\lambda t^2 c\,\mathrm{tg}\alpha} + r^2 + \cancel{2} r\lambda c t^2\,\mathrm{tg}\alpha + c^2\right]$$

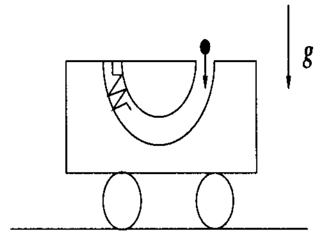
$$= \lambda^2 t\left[\frac{c^2}{\cos^2\alpha} + r^2 + r\lambda c\,\mathrm{tg}\alpha\, t^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad a_{/\!/} = \frac{\lambda^{\cancel{2}}\cancel{t}}{\cancel{\lambda}\cancel{t}}\left(\frac{c^2}{\cos^2\alpha} + r^2 + r\lambda c\,\mathrm{tg}\alpha\, t^2\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{c^2}{\cos^2\alpha} + r^2}}$$

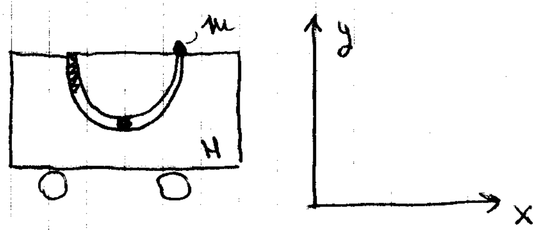
3) $$\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$F_z + mg = m\ddot{z} = m\lambda c \quad \Rightarrow \quad F_z = m(\lambda c - g)$$

Esercizio 2: In un carrello di massa 45.0 kg, fermo ma vincolato a muoversi senza attrito su di un piano orizzontale liscio, è stato scavato un condotto semicircolare, di raggio 0.270 m, come in figura. All'estremo chiuso del condotto è fissata una molla di costante elastica 16000 N/m e lunghezza a riposo 0.0540 m. Una pallina di massa pari a 4.70 kg entra nel condotto, con velocità, verticale, pari in modulo a 7.70 m/s. Determinare, in un sistema di riferimento solidale al piano orizzontale:



1. il modulo dell'accelerazione della pallina quando passa per il punto più basso del condotto (5,-1)
   $|a|$ [m/s^2] = $\boxed{265}$ A $\boxed{197}$ B $\boxed{544}$ C $\boxed{241}$ D $\boxed{265}$ E $\boxed{329}$
2. il modulo della velocità minima iniziale della pallina tale per cui la molla si comprime fino alla lunghezza di 0.0380 m (5,-1)
   $|v_0|$ [m/s] = $\boxed{0.338}$ A $\boxed{0.0881}$ B $\boxed{0.0977}$ C $\boxed{0.0632}$ D $\boxed{0.167}$ E $\boxed{0.338}$
3. se la velocità iniziale della pallina è la minima per cui la molla si possa comprimere completamente, calcolare il modulo dell'impulso delle forze esterne al sistema complessivo pallina+carrello tra l'istante di entrata della pallina e quello di compressione totale della molla (5,-1)
   $|I|$ [N s] = $\boxed{14.8}$ A $\boxed{14.8}$ B $\boxed{61.7}$ C $\boxed{3.49}$ D $\boxed{7.81}$ E $\boxed{27.8}$



1) Le forze esterne al sistema M+m sono dirette lungo y ⇒

$M A_x + m a_x = 0$ ∀ istante

$a_x = a'_x + A_x$

↳ accel. di m vista da M

⇒ $m a'_x + (m+M) A_x = 0$

Nell'istante in cui la pallina è nel punto più basso,

$\vec{a}' = -\frac{v'^2}{R}\hat{y}$ ⇒ $a'_x = 0$ ⇒ $A_x = 0$

velocità di m vista da M

$|\vec{a}'| = \frac{v'^2}{R}$

forze (est.) solo lungo $\hat{y}$ e a $t=0$ $\vec{v}_0 // \hat{y}$

$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$ $m v_x + M V_x = m v_x + M V = 0$ $V = -v_x \frac{m}{M}$

Quando la pallina è nel punto più basso, $\vec{v}'$ è tutta lungo $\hat{x}$

$\Rightarrow \quad v'_y = 0$

$$v' = v_x - V = v_x \left(1 + \frac{m}{M}\right) \quad \Rightarrow$$

$$|\vec{a}'| = \frac{v_x^2}{R}\left(1+\frac{m}{M}\right)^2$$

cons. energia

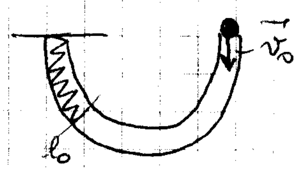
Per trovare v_x :
$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m} v_0^2 + \underset{\wedge}{2}\cancel{m} g R = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m} v_x^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{M}\frac{m^{\cancel{2}}}{M^{\cancel{2}}} v_x^2$$

$$v_x^2\left(1+\frac{m}{M}\right) = 2gR + v_0^2$$

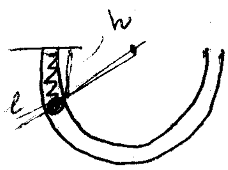
$$\Rightarrow \quad |\vec{a}'| = \frac{(v_0 + 2gR)}{R}\left(1+\frac{m}{M}\right)$$

2) Conservazione dell' energia

$t=0$



t



$\vec{v}' = 0$

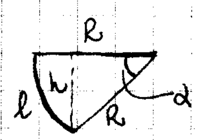
$$\frac{1}{2} m v_0^2 + mgR = \frac{1}{2} m |(\cancel{\vec{v}'} + \vec{V})|^2 + \frac{1}{2} M V^2 + mg(R-h)$$
$$+ \frac{1}{2} k (\ell_0 - \ell)^2$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + \cancel{mgR} = \frac{1}{2}(m+M) V^2 + \cancel{mgR} - mgh + \frac{1}{2} k(\ell_0 - \ell)^2$$

Cons. q. di moto lungo x $\Rightarrow$ $M V_x + m v_x = m v_{0x} = 0$

$$(M+m) V_x + \cancel{m v'_x} = 0 \quad \Rightarrow V = 0$$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m} v_0^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\frac{k}{m}(\ell_0 - \ell)^2 - \underset{\wedge}{2}\cancel{m} g h$$



$$h = R \sin\alpha = R \sin\left(\frac{l}{R}\right) \Rightarrow$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}(l_0 - l)^2 - 2gR\sin\left(\frac{l}{R}\right)}$$

3) $|\vec{I}| = \vec{P}_f - \vec{P}_i$

$$\vec{P}_f = M\vec{V} + m\vec{v}$$

$$\left.\begin{aligned} MV_x + mv_x &= 0 \\ v_x = V_x + \cancel{v'_x} &= V_x \end{aligned}\right\} V_x = 0$$

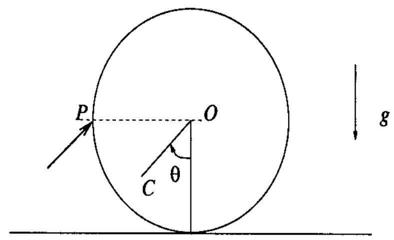
$$\Rightarrow \vec{P}_f = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \cancel{mgR} = \underset{0}{\underset{\|}{E_{e_{tot}}}} + \frac{1}{2}kl_0^2 + \cancel{mgR}$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = l_0\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$P_i = mv_0 = |\vec{I}| = l_0\sqrt{km}.$$

Esercizio 1: Un disco disomogeneo di massa 0.790 kg e raggio 0.590 m, ha il centro di massa in un punto C a distanza 0.240 m dal centro geometrico O (vedi figura). Il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse passante per il centro di massa è 0.210 kg m^2. All'istante iniziale, il disco è appoggiato su un piano orizzontale liscio e l'angolo che il vettore $\vec{OC}$ forma con la verticale è 1.30 Rad. Il verso positivo degli angoli è quello antiorario. Determinare:



1. il modulo della componente verticale della forza da applicare al punto P posto sul bordo del disco ad un'altezza pari a quella del centro geometrico O, necessaria per mantenere il disco in questa posizione (5,-1)
   $|F_z|$ [N] = $\boxed{3.10}$ A $\boxed{4.82}$ B $\boxed{22.9}$ C $\boxed{2.53}$ D $\boxed{1.97}$ E $\boxed{3.10}$

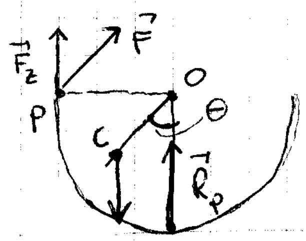
Rimossa la forza in P, il disco è lasciato libero di muoversi. Quando il vettore $\vec{OC}$ forma un angolo di 0.360 Rad con la verticale, determinare:

2. il modulo della velocit di traslazione del centro di massa del disco (5,-1)
   $|v_{cm}|$ [m/s] = $\boxed{0.290}$ A $\boxed{0.146}$ B $\boxed{0.290}$ C $\boxed{0.266}$ D $\boxed{0.0748}$ E $\boxed{1.26}$

Il disco viene poi portato nella sua posizione di equilibrio stabile. Determinare:

3. la pulsazione (frequenza angolare) delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio (5,-1)
   ω [Rad/s] = $\boxed{3.00}$ A $\boxed{11.4}$ B $\boxed{41.2}$ C $\boxed{3.00}$ D $\boxed{6.23}$ E $\boxed{3.26}$

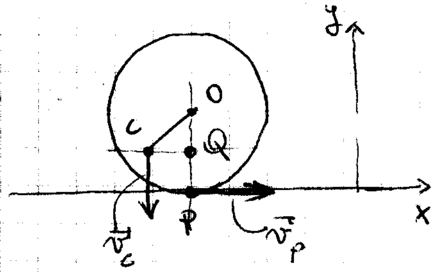
1) Momento delle forze rispetto a O



$$mg\,d\sin\theta - F_z R = 0$$

$$F_z = \frac{mg\,d\sin\theta}{R}$$

2) Centro istantaneo di rotazione (Q) si trova sapendo che:



1) le forze esterne sono tutte lungo $\hat{y} \Rightarrow \vec{v}_{CM} \equiv \vec{v}_c$ oltre essere dirette $\parallel \hat{y}$

2) il punto di contatto scivola sul piano $\Rightarrow \vec{v}_p \parallel \hat{x}$

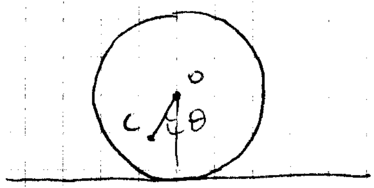
$$E(t=0) = mg(\cancel{R} - d\cos\theta_0) = E(t) = \frac{1}{2} I_Q \dot{\theta}^2 + mg(\cancel{R} - d\cos\theta)$$

$$I_Q = I_{CM} + m\,d^2\sin^2\theta \Rightarrow$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2mgd(\cos\theta - \cos\theta_0)}{I_{CM} + md^2\sin^2\theta}}$$

$$v_{CM} = d\sin\theta\,\dot\theta = \sqrt{\frac{2mgd\,(\cos\theta-\cos\theta_0)}{I_{CM}+md^2\sin^2\theta}}\; d\sin\theta$$

3)



$$E = \frac{1}{2} I_Q \dot\theta^2 + mg\,(R-\cos\theta\, d)$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 = I_Q \cancel{\dot\theta}\,\ddot\theta + \cancel{\tfrac{1}{2}}\dot\theta^2\,(md^2\cancel{2}\sin\theta\cos\theta\,\cancel{\dot\theta}) + mgd\sin\theta\,\cancel{\dot\theta}$$

$\theta \approx 0 \Rightarrow \cos\theta \approx 1$, $\sin\theta \approx \theta \Rightarrow$

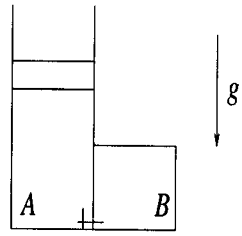
$$\left(I_{CM} + \underbrace{md^2\theta^2}\right)\ddot\theta + \underbrace{md^2\theta\,\dot\theta^2} + mgd\theta = 0$$

Sono termini dell'ordine di $\theta^3 \Rightarrow$ trascurabili!

$$I_{CM}\,\ddot\theta + mgd\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_{CM}}}$$

Compito 10/04/06

Esercizio 2: Si considerino 0.240 moli di gas perfetto monoatomico in equilibrio all'interno di un contenitore A, chiuso da un pistone mobile di massa 2.80 kg e sezione 0.190 m^2. Il volume del gas è 0.380 m^3. Il contenitore A è collegato, tramite una valvola chiusa, ad un altro contenitore B, di volume invariabile pari a 0.130 m^3, e di identica sezione, in cui è stato fatto il vuoto. Si trascuri la pressione atmosferica esterna al contenitore. Determinare:



1. la temperatura finale raggiunta dal gas una volta aperta la valvola, supponendo che il pistone e tutte le pareti dei contenitori siano perfettamente adiabatici (5,-1)
   T [K] = 31.9   A 23.8   B 65.7   C 29.1   D 31.9   E 39.7

La traformazione di espansione del gas avviene ora a contatto con un termostato, avente la temperatura iniziale del gas, e il calore è scambiato solo tra gas e termostato. Determinare:

2. il calore scambiato dal gas (5,-1)
   Q [J] = -19.2   A -5.00   B -5.54   C -3.59   D -9.50   E -19.2

Sia 480 N/m^2 la pressione di apertura della valvola e il sistema sia sempre in contatto termico con il termostato di cui sopra. Viene applicata al pistone una forza esterna variabile in modo da portare reversibilmente la pressione del gas fino al valore della pressione di apertura. Determinare:

3. il lavoro della forza esterna variabile tra l'istante iniziale e l'istante immediatamente precedente l'apertura della valvola (5,-1)
   L [J] = 27.3   A 27.3   B 114   C 6.43   D 14.4   E 51.3

1)
$$\Delta U = \mathcal{L}_{ext} = mg\,(h_0 - h_1)$$

$$h_0 = \frac{V_A}{S}$$

$$\Delta U = n C_v (T_f - T_0) \quad , \quad T_0 = \frac{mg}{S}\,\frac{V_A}{nR}$$

Per trovare h_1:

$$\frac{mg}{S}(h_1 S + V_B) = nRT_f \Rightarrow h_1 = \frac{nR}{mg}T_f - \frac{V_B}{S}$$

$$\Rightarrow n C_v T_f - n C_v T_0 = mg\frac{V_A}{S} - \cancel{mg}\frac{nR}{\cancel{mg}}T_f + mg\frac{V_B}{S}$$

$$n(C_v + R)T_f = n C_v T_0 + \frac{mg}{S}(V_A + V_B)$$

$$\Rightarrow T_f = \frac{T_0}{\gamma} + \frac{mg}{nC_pS}(V_A + V_B)$$

Gas monoatomico $\Rightarrow$ $C_v = \frac{3}{2} R$, $C_p = \frac{5}{2} R$ $\gamma = \frac{5}{3}$ $\Rightarrow$

$$T_f = \frac{3}{5} T_0 + \frac{2}{5} \frac{mg}{nRS} (V_A + V_B)$$

2) $\underset{\substack{\| \\ 0}}{\Delta U} = \Delta Q + \mathcal{L}_{ext}$ $\Rightarrow$ $\Delta Q = - \mathcal{L}_{ext} = - mg\,(h_0 - h_1)$

$$\frac{mg}{S}(h_1 S + V_B) = nR\,T_0 \Rightarrow h_1 = \frac{nR}{mg} T_0 - \frac{V_B}{S}$$

$$\Rightarrow \Delta Q = - mg \left[\frac{V_A + V_B}{S} - \frac{nR\,T_0}{mg} \right]$$

3) Il gas fa una trasformazione isoterma reversibile $\Rightarrow$

$$\mathcal{L}_{est} = - nRT_0 \ln \frac{V_f}{V_i}$$

$\|$ $\qquad\qquad P_v h_1 S = nRT_0 \Rightarrow h_1 = \frac{nRT_0}{P_v S}$

$$\mathcal{L}_F + mg\,(h_0 - h_1)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_F = nRT_0 \ln \left(\frac{V_A P_v}{nRT_0} \right) - \frac{mg}{S} \left(V_A - \frac{nRT_0}{P_v} \right)$$