

Compito A1 7/7/04

Esercizio 1: Un punto materiale si muove su una parabola di equazione $y = ax^2$ in modo tale che la componente x della posizione varia nel tempo secondo la legge $x(t) = b \cos(\omega t)$, con $a = 2.40 \text{ m}^{-1}$, $b = 4.00 \text{ m}$ e $\omega = 0.390 \text{ Rad/s}$. Determinare:

- il modulo della velocità istantanea del punto materiale per t pari a 0.270 s (5,-1)
 $|v| \text{ [m/s]} = \boxed{3.13}$ A $\boxed{4.32}$ B $\boxed{3.13}$ C $\boxed{3.54}$ D $\boxed{0.389}$ E $\boxed{0.742}$
- il modulo dell'accelerazione istantanea del punto materiale per t pari a metà periodo (5,-1)
 $|a| \text{ [m/s}^2\text{]} = \boxed{11.7}$ A $\boxed{11.7}$ B $\boxed{9.07}$ C $\boxed{78.0}$ D $\boxed{16.5}$ E $\boxed{40.0}$
- il raggio di curvatura della parabola in $x=0$ (5,-1)
 $r \text{ [m]} = \boxed{0.208}$ A $\boxed{0.0294}$ B $\boxed{0.208}$ C $\boxed{0.154}$ D $\boxed{0.0122}$ E $\boxed{0.0426}$

$$y = ax^2$$

$$x(t) = b \cos \omega t$$

$$1) \quad v_x = \dot{x}(t) = -b\omega \sin \omega t$$

$$v_y = \frac{dy}{dx} \dot{x}(t) = 2a x(t) \dot{x}(t)$$

$$\Rightarrow v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \dot{x}(t)^2 (1 + 4a^2 x^2(t))$$

$$v = |\dot{x}(t)| \sqrt{1 + 4a^2 x^2(t)} = |b\omega \sin \omega t| \sqrt{1 + 4a^2 x^2(t)}$$

$$2) \quad a_x = \ddot{x}(t) = -b\omega^2 \cos \omega t$$

$$a_y = 2a x(t) \ddot{x}(t) + 2a \dot{x}^2(t)$$

$$\text{Per } t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} \quad \cos \omega t = -1 \quad \sin \omega t = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t = T/2) = 0$$

$$\Rightarrow a_x = b\omega^2$$

$$a_y = 2a(-b)b\omega^2 = -2ab\omega^2$$

$$\Rightarrow |a| = b\omega^2 \sqrt{1 + 4a^2 b^2}$$

$$3) \quad \vec{a} = \dot{v} \hat{T} + \frac{v^2}{R} \hat{N}$$

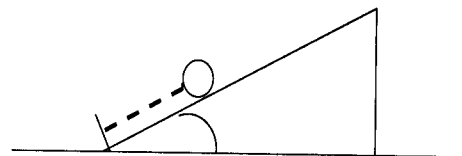
$$\vec{v} = \underbrace{b\omega^2 \cos \omega t}_{\omega^2 x(t)} \sqrt{1 + 4a^2 x^2(t)} + \frac{b\omega \sin \omega t}{2\sqrt{1 + 4a^2 x^2(t)}} 4a^2 2x(t) \dot{x}(t)$$

$$= 0 \quad \text{per } x(t) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \cancel{\frac{v^2}{R}} \hat{N} = 2a \dot{x}^2(t) \hat{j} \Rightarrow$$

$$R = \frac{1}{2a}$$

Esercizio 2: Si consideri il sistema in figura: un cuneo di massa pari a 3.70 kg è appoggiato su un piano orizzontale liscio. Sul cuneo è attaccata una molla (mostrata in figura dalla linea tratteggiata) e alla molla è appoggiata una pallina di massa 0.910 kg. Si trascurino le forze di attrito tra la pallina e il cuneo. La molla ha costante elastica pari a 1800 N/m e lunghezza a riposo pari a 0.700 m. L'angolo di inclinazione del cuneo è di 0.640 Rad e l'ipotenusa del cuneo è di 1.90 m. Determinare:



1. il modulo della forza esterna F che si deve applicare al cuneo per mantenerlo fermo, quando la lunghezza della molla è pari a 0.270 m (5,-1)

$|F|$ [N] = A B C D E

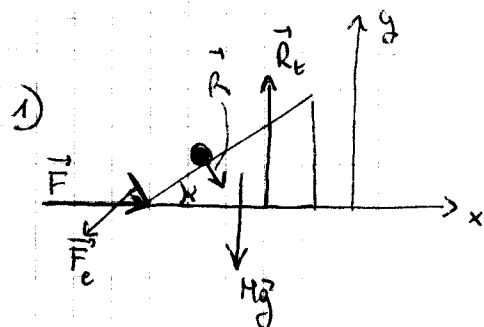
2. la minima lunghezza della molla affinché la pallina raggiunga la sommità del cuneo, in assenza della forza F (5,-1)

l_{min} [m] = A B C D E

Si rilascia il sistema cuneo+pallina da fermo, con la molla completamente compressa. Determinare:

3. il modulo della velocità del cuneo dopo che la pallina si è staccata dal cuneo stesso (5,-1)

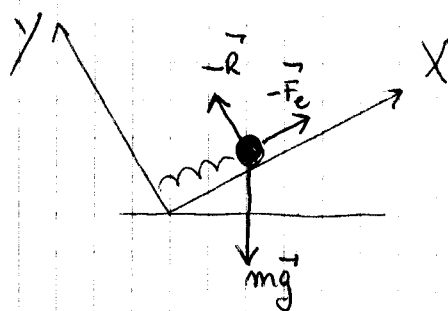
$|v_c|$ [m/s] = A B C D E



Cuneo:

$$H \vec{a}_c = 0 = \vec{F} + \vec{F}_e + H\vec{g} + \vec{R} + \vec{R}_e$$

lungo x $F - F_e \cos \alpha + R \sin \alpha = 0$



Pallina

$$m \vec{a}_p = -\vec{R} - \vec{F}_e + m\vec{g}$$

lungo Y $a_p = 0 \Rightarrow R = mg \cos \alpha$

Si sa che $F_e = k(l_0 - \bar{l}) \Rightarrow$

$$F = F_e \cos \alpha - R \sin \alpha = k(l_0 - \bar{l}) \cos \alpha - mg \cos \alpha \sin \alpha$$

2) Conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2} k (l_m - l_0)^2 + mg l_m \sin \alpha + \frac{1}{2} (H+m) v_0^2 =$$

$$\frac{1}{2} H v_H^2 + \frac{1}{2} m v_m^2 + mg l \sin \alpha$$

$$\begin{cases} v_{mx} = v_{m'x} + v_H \\ v_{my} = v_{m'y} \end{cases}$$

Conservazione della quantità di moto lungo x:

2

$$H v_H + m v_{m,x} = (H+m) v_H + v_{m,x}' m = (H+m) v_0$$

La pallina raggiunge la sommità del cuneo con $v_{m,x}' = v_{m,y}' = 0$

$$\Rightarrow v_H = v_0 = v_m \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} k (l_m - l_0)^2 + mg l_m \sin \alpha - mg l \sin \alpha = 0$$

$$\frac{1}{2} k l_m^2 - k l_0 l_m + \frac{1}{2} k l_0^2 + mg l_m \sin \alpha - mg l \sin \alpha = 0$$

$$k l_m^2 - 2 (k l_0 - mg \sin \alpha) l_m + k l_0^2 - 2 mg l \sin \alpha = 0$$

$$l_m = \frac{(k l_0 - mg \sin \alpha) \pm \sqrt{(k l_0 - mg \sin \alpha)^2 - k^2 l_0^2 + 2 k mg l \sin \alpha}}{k}$$

$$= \frac{k l_0 - mg \sin \alpha}{k} \pm \frac{1}{k} \left(\cancel{k^2 l_0^2} - 2 mg k l_0 \sin \alpha + m^2 g^2 \sin^2 \alpha - \cancel{k^2 l_0^2} + 2 mg k l \sin \alpha \right)^{1/2}$$

$$= l_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k} \pm \frac{1}{k} \sqrt{m^2 g^2 \sin^2 \alpha + 2 k mg \sin \alpha (l - l_0)}$$

$$= l_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2 k (l - l_0)}{mg \sin \alpha}} \right)$$

soluzione non fisica ($l_m > l_0$!)

$$3) \quad \frac{1}{2} k l_0^2 = \frac{1}{2} H v_H^2 + \frac{1}{2} m v_m^2 + mg l \sin \alpha$$

$$\begin{cases} H v_H + m v_{m,x} = (H+m) v_H + m v_{m,x}' = 0 \\ v_{m,y} = v_{m,y}' = v_{m,x}' \tan \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{m,x}' = - \frac{H+m}{m} v_H \Rightarrow \begin{cases} v_{m,x} = - \frac{H}{m} v_H \\ v_{m,y} = - \frac{H+m}{m} v_H \tan \alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} k l_0^2 = \frac{1}{2} H v_H^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{H^2}{m^2} v_H^2 + \frac{(H+m)^2}{m^2} v_H^2 \tan^2 \alpha \right) + mgl \sin \alpha \quad 3$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} k l_0^2 - mgl \sin \alpha &= \frac{1}{2} H v_H^2 \left(1 + \frac{H}{m} + \frac{(H+m)^2}{mH} \tan^2 \alpha \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{H}{m} (m+H) v_H^2 \left(1 + \frac{m+H}{H} \tan^2 \alpha \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_H = \sqrt{\frac{m}{m+H} \frac{k l_0^2 - 2 mgl \sin \alpha}{H + (m+H) \tan^2 \alpha}}$$

Esercizio 1: Due particelle A e B interagiscono con una forza che dipende dal vettore $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ secondo la legge

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{cases} k_1 \mathbf{r}/r^3 & r \leq a \\ -k_2 \mathbf{r} & a \leq r \leq b \\ 0 & r > b \end{cases} \quad (1)$$

con $k_1 = 3.00 \text{ N m}^2$, $k_2 = 68.0 \text{ N/m}$, $a = 3.60 \text{ m}$ e $b = 6.20 \text{ m}$. Con $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ si è indicata la forza esercitata su B da A . Le particelle A e B hanno masse rispettivamente pari a 6.60 kg e 1.60 kg . All'istante iniziale, la particella A è ferma, mentre la particella B si trova ad una distanza infinita da A , e si avvicina con parametro d'impatto di 4.40 m e velocità di 2.90 m/s . Determinare:

1. l'energia potenziale per $r = 0.400 \text{ m}$ (5,-1)

$U [\text{J}] = \boxed{-860}$ A $\boxed{-70.9}$ B $\boxed{-860}$ C $\boxed{-268}$ D $\boxed{-971}$ E $\boxed{-185}$

2. la minima distanza relativa tra A e B (5,-1)

$d_{\min} [\text{m}] = \boxed{0.348}$ A $\boxed{0.104}$ B $\boxed{0.166}$ C $\boxed{0.0340}$ D $\boxed{0.348}$ E $\boxed{0.0939}$

Si supponga adesso che all'istante iniziale la distanza relativa tra A e B sia pari a b e la velocità iniziale di B sia ortogonale a $\mathbf{r}$. Determinare:

3. il valore minimo per il modulo della velocità iniziale di B , tale per cui nel loro moto successivo le due particelle arrivino a "sentire" la parte di forza repulsiva (5,-1)

$v_{B,\min} [\text{m/s}] = \boxed{26.2}$ A $\boxed{1.87}$ B $\boxed{16.3}$ C $\boxed{7.64}$ D $\boxed{26.2}$ E $\boxed{8.48}$

1) $U(r) = 0 \quad r > b$
 $U(r) - U(b) = - \int_b^r (-k_2 x) dx \quad a \leq r \leq b$
 $= k_2 \frac{x^2}{2} \Big|_b^r = \frac{1}{2} k_2 (r^2 - b^2)$

$\Rightarrow U(a) = -\frac{1}{2} k_2 (b^2 - a^2)$

$U(r) - U(a) = - \int_a^r \frac{k_1}{x^2} dx = \frac{k_1}{x} \Big|_a^r = k_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad r < a$

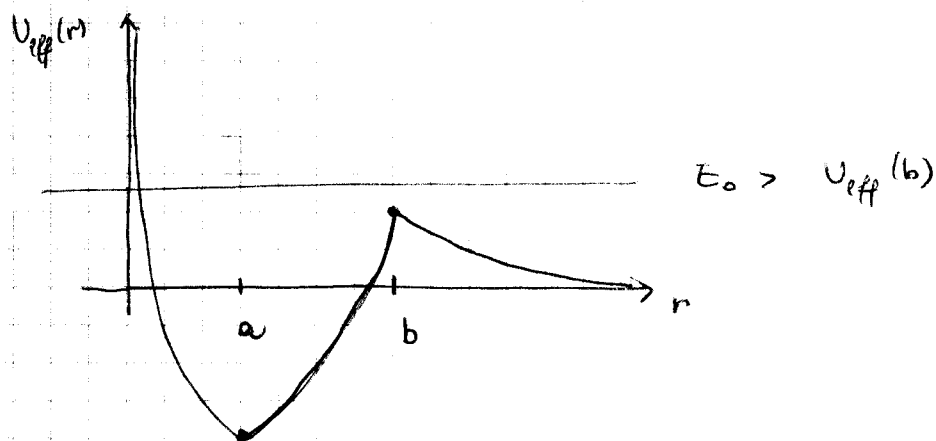
$\Rightarrow U(r) = k_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) - \frac{1}{2} k_2 (b^2 - a^2)$

- 2) Sistema di riferimento del CM:

conservazione dell'energia $\rightarrow \frac{1}{2} \mu \vec{v}_0^2 = \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U(r)$

$\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}, \quad L = \mu v_0 b$

$$U_{\text{eff}}(r) = \begin{cases} \frac{L^2}{2\mu r^2} & r \leq b \\ \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{1}{2} k_2 (r^2 - b^2) & a \leq r \leq b \\ \frac{L^2}{2\mu r^2} + k_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) - \frac{1}{2} k_2 (b^2 - a^2) & r < a \end{cases}$$



Nota che tra a e b non ci sono minimi: infatti:

$$\left. \frac{dV_{eff}}{dr} \right|_{a \leq r \leq b} = -\frac{2}{2\mu r^3} \frac{L^2}{2} + \frac{1}{2} k_2 2r = 0 \quad \bar{r} = \left(\frac{L^2}{\mu k_2} \right)^{1/4} < a$$

Per trovare $d_{min} \Rightarrow \dot{r} = 0$

$$\frac{1}{2} \mu v_0^2 = \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{k_1}{r} - \frac{k_1}{a} - \frac{1}{2} k_2 (b^2 - a^2)$$

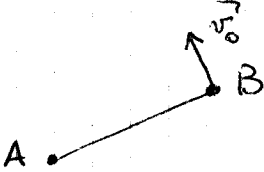
$$E = \frac{1}{2} \mu v_0^2 + \frac{k_1}{a} + \frac{1}{2} k_2 (b^2 - a^2) \Rightarrow$$

$$E = \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{k_1}{r}$$

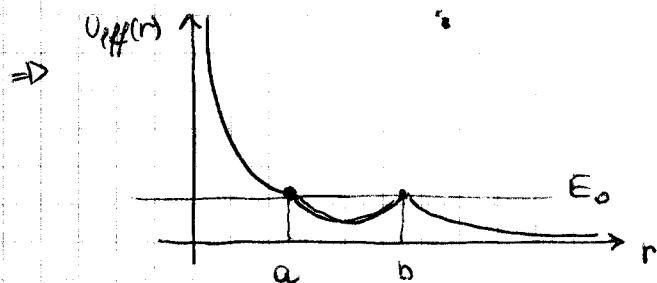
$$2\mu E r^2 - 2\mu k_1 r - L^2 = 0$$

$$r = \frac{\mu k_1 \pm \sqrt{\mu^2 k_1^2 + 2\mu E L^2}}{2\mu E}$$

$$\Rightarrow d_{min} = \frac{k_1}{2E} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k_1}} \right)$$

3) A $t=0$  $\Rightarrow L = \mu v_0 b \Rightarrow E_0 = \frac{1}{2} \mu v_0^2 = V_{eff}(b)$

Perché $d_{min} = 0$ occorre che $V_{eff}(a) = E = V_{eff}(b)$



$$\Rightarrow U_{\text{eff}}(0) = E_0$$

$$\frac{L^2}{2\mu k^2} + \frac{1}{2} k_2 (b^2 - a^2) = \frac{1}{2} \mu v_0^2$$

$$\frac{\cancel{\mu} \cancel{v_0^2} b^2}{\cancel{2} \mu a^2} + \cancel{\frac{1}{2}} k_2 (a^2 - b^2) - \cancel{\frac{1}{2}} \mu v_0^2 = 0$$

$$\mu v_0^2 \frac{1}{a^2} (\cancel{b^2 - a^2}) = k_2 (\cancel{b^2 - a^2})$$

$$v_0 = a \sqrt{\frac{k_2}{\mu}}$$

Nota: $\bar{r}$ calcolato prudentemente adimo $\bar{r} = a \leq \bar{r} \leq b$, come deve essere.

Esercizio 2: 0.720 moli di un gas perfetto monoatomico compiono, all'interno di un contenitore rigido chiuso da un pistone mobile, una trasformazione reversibile politropica, descritta dalla legge $PV^{-0.800} = \text{costante}$, da uno stato iniziale A, con pressione pari a 150000 Pa e volume di 0.00130 m^3 , a uno stato finale B con pressione di 180000 Pa. Una volta raggiunto lo stato finale, il pistone viene bloccato e il contenitore viene messo in contatto con una sorgente avente temperatura uguale a quella iniziale del gas. Il gas raggiunge il nuovo stato di equilibrio C. Determinare:

1. il calore scambiato dal gas nella trasformazione da B a C (5,-1)

$$Q \text{ [J]} = \boxed{-148} \quad A \boxed{-99.7} \quad B \boxed{-171} \quad C \boxed{-85.0} \quad D \boxed{-365} \quad E \boxed{-148}$$

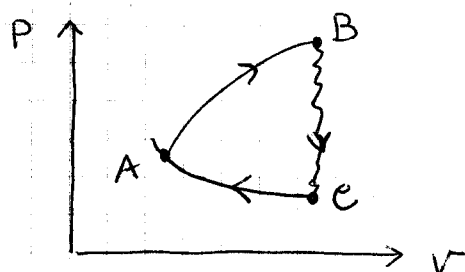
2. la variazione di entropia del gas nella trasformazione da B a C (5,-1)

$$\Delta S \text{ [J/K]} = \boxed{-3.68} \quad A \boxed{-19.9} \quad B \boxed{-7.32} \quad C \boxed{-36.2} \quad D \boxed{-25.7} \quad E \boxed{-3.68}$$

Con una trasformazione isoterma reversibile si porta il sistema dallo stato C di nuovo allo stato A. Determinare:

3. il rendimento del ciclo (5,-1)

$$\eta = \boxed{0.0517} \quad A \boxed{0.0517} \quad B \boxed{0.0867} \quad C \boxed{0.345} \quad D \boxed{0.476} \quad E \boxed{0.157}$$



$$C_v = \frac{3}{2} R$$

$$1) \Delta U_{Ac} = 0 = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC}$$

$$\Delta U_{BC} = Q_{BC} - \cancel{W_{BC}} = Q_{BC} = -\Delta U_{AB}$$

$$Q_{BC} = m C_v (T_A - T_B) = m C_v T_A \left(1 - \frac{T_B}{T_A}\right)$$

$$T_A = \frac{P_A V_A}{m R}$$

$$P_A V_A^{-\gamma} = P_B V_B^{-\gamma} \Rightarrow V_B = V_A \left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{1/\gamma}$$

$$T_B = \frac{P_B V_B}{m R} \left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{1/\gamma} = \left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} T_A$$

$$\Rightarrow Q_{BC} = m C_v T_A \left(1 - \left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right)$$

$$2) \Delta S_{BC} = m C_v \ln \frac{T_C}{T_B} = m C_v \ln \frac{T_A}{T_B} = -m C_v \frac{\gamma+1}{\gamma} \ln \left(\frac{P_B}{P_A}\right)$$

$$\eta = \frac{L}{Q_{AB}}$$

2

$$AB: Q_{AB} = n C_{AB} (T_B - T_A)$$

$$C_{AB}? \quad n C_{AB} dT = n C_v dT + p dV$$

$$\begin{aligned} pV &= nRT \Rightarrow p dV + V dp = nR dT \\ pV^{-\gamma} &= \text{const} \Rightarrow \left[\begin{aligned} -\gamma p V^{-\gamma-1} dV + dp V^{-\gamma} &= 0 \\ -\gamma p dV + V dp &= 0 \end{aligned} \right] \Rightarrow p dV = \frac{nR dT}{1+\gamma} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_{AB} = C_v + \frac{R}{1+\gamma}$$

$$L_{AB} = Q_{AB} - \Delta U_{AB} = n \frac{R}{1+\gamma} (T_B - T_A) > 0$$

$$BC: Q_{BC} = n C_v (T_A - T_B) < 0$$

$$L_{BC} = 0$$

$$\begin{aligned} CA: L_{CA} &= Q_{CA} = n R T_A \ln \frac{V_A}{V_B} = n R T_A \ln \left(\frac{P_A}{P_B} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ &= -\frac{1}{\gamma} n R T_A \ln \left(\frac{P_B}{P_A} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{Q_{AB} - \Delta U_{AB} + L_{CA}}{Q_{AB}} =$$

$$= 1 - \frac{C_v}{C_v + \frac{R}{1+\gamma}} - \frac{1}{\gamma} \frac{R}{C_v + \frac{R}{1+\gamma}} \ln \left(\frac{P_B}{P_A} \right) \frac{1}{\left[\left(\frac{P_B}{P_A} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} - 1 \right]}$$