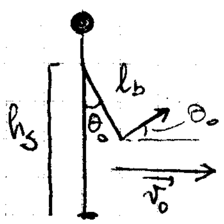
Compito 13/09/04 A1

Esercizio 1: Un ragazzo si allena sulla spiaggia al gioco delle bocce. Vediamo in dettaglio uno dei vari lanci: al momento del lancio della boccia, la spalla del ragazzo è alta 1.50 m, il suo braccio, lungo 0.730 m, si muove con velocità angolare pari a 3.60 Rad/s, e il braccio forma con il corpo, che ipotizziamo rigido e in posizione verticale, un angolo pari a 0.440 Rad. Si supponga che il ragazzo al momento del lancio si muova con velocità orizzontale pari a 3.00 m/s. Determinare:

1. la distanza a cui viene lanciata la boccia dalla posizione iniziale del corpo del ragazzo (5,-1)
   d [m] = $\boxed{3.20}$ A $\boxed{27.4}$ B $\boxed{31.2}$ C $\boxed{3.20}$ D $\boxed{37.6}$ E $\boxed{19.7}$
2. l'angolo che il versore tangente alla traiettoria forma col vettore velocità iniziale del ragazzo nel punto di arrivo della boccia (5,-1)
   θ [Rad] = $\boxed{0.669}$ A $\boxed{2.07}$ B $\boxed{3.53}$ C $\boxed{1.12}$ D $\boxed{0.669}$ E $\boxed{6.02}$
3. il modulo della componente dell'accelerazione tangente alla traiettoria nel punto di arrivo della boccia (5,-1)
   $|a_{tang}|$ [m/s^2] = $\boxed{6.20}$ A $\boxed{173}$ B $\boxed{6.20}$ C $\boxed{8.60}$ D $\boxed{22.5}$ E $\boxed{119}$



$$x(t) = l_b \sin\theta_0 + (v_0 + \omega_b l_b \cos\theta_0)\, t$$

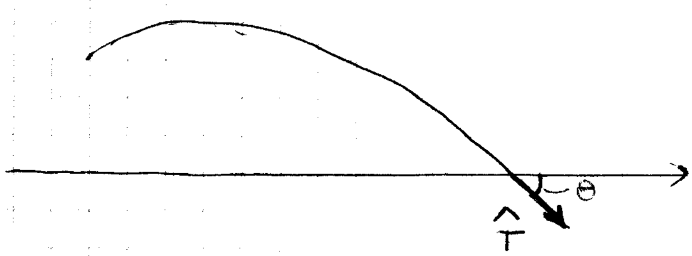
$$y(t) = (h_s - l_b\cos\theta_0) + \omega_b l_b \sin\theta_0\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

1) $t_{arr} \Rightarrow y(t_{arr}) = 0 \Rightarrow$

$$t_{arr} = \frac{\omega_b l_b \sin\theta_0}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2g(h_s - l_b\cos\theta_0)}{\omega_b^2 l_b^2 \sin^2\theta_0}}\right)$$

$$d = x(t_{arr}) = l_b \sin\theta_0 + (v_0 + \omega_b l_b\cos\theta_0)\frac{\omega_b l_b \sin\theta_0}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2g(h_s - l_b\cos\theta_0)}{\omega_b^2 l_b^2 \sin^2\theta_0}}\right)$$

2)



$$\vec{v} = v\,\hat{T} \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

$$v_y = \omega_b l_b \sin\theta_0 - gt = \cancel{\omega_b l_b \sin\theta_0} - \cancel{\omega_b l_b \sin\theta_0} - \omega_b l_b \sin\theta_0 \sqrt{1 + \frac{2g(h_s - l_b\cos\theta_0)}{\omega_b^2 l_b^2 \sin^2\theta_0}}$$

$$v_y = -\omega_b l_b \sin\theta_0 \sqrt{1 + \frac{2g(h_S - l_b\cos\theta_0)}{\omega_b^2 l_b^2 \sin^2\theta_0}}$$

$$v_x = v_0 + \omega_b l_b \cos\theta_0$$

$\Rightarrow$

$$\theta = tg^{-1}\left[\frac{\omega_b l_b \sin\theta_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{2g(h_S - l_b\cos\theta_0)}{\omega_b^2 l_b^2 \sin^2\theta_0}}}{v_0 + \omega_b l_b \cos\theta_0}\right]$$

3) $$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{T} + \frac{v^2}{R}\hat{N}$$

$$\Rightarrow \quad a_{tang} = \frac{dv}{dt}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\cancel{2}v}\cancel{2}v_y(-g)$$

$v_x = cost$

$v_y = \omega_b l_b \sin\theta_0 - gt$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \frac{-g(\omega_b l_b \sin\theta_0 - gt)}{v}$$

Al temp $t = t_{arr}$

$$|a_{tang}| = g\sqrt{\frac{\omega_b^2 l_b^2 \sin^2\theta_0 + 2g(h_S - l_b\cos\theta_0)}{\omega_b^2 l_b^2 + v_0^2 + 2v_0\omega_b l_b \cos\theta_0 + 2g(h_S - l_b\cos\theta_0)}}$$

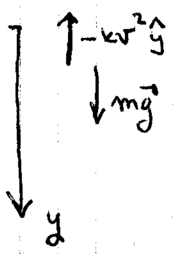
Esercizio 2: La resistenza che l'aria oppone al moto di un corpo di massa 3.80 kg è proporzionale al quadrato della velocità e la costante di proporzionalità vale 0.0730 N s^2/m^2. Nell'ipotesi in cui il corpo sia lasciato cadere liberamente in prossimità della superficie terrestre determinare:

1. il modulo della velocità limite di caduta (5,-1)
   $|v_{lim}|$ [m/s] = $\boxed{22.8}$ A $\boxed{22.8}$ B $\boxed{16.0}$ C $\boxed{13.2}$ D $\boxed{19.9}$ E $\boxed{39.6}$

Nell'ipotesi in cui il corpo sia sparato verso l'alto lungo la direzione verticale con velocità iniziale 130 m/s determinare:

2. il tempo impiegato dal corpo a raggiungere la quota massima (5,-1)
   t [s] = $\boxed{3.19}$ A $\boxed{8.73}$ B $\boxed{0.378}$ C $\boxed{1.54}$ D $\boxed{3.19}$ E $\boxed{1.71}$
3. l'altezza sopra la quota di lancio, a cui arriva il corpo (5,-1)
   h [m] = $\boxed{91.4}$ A $\boxed{61.4}$ B $\boxed{105}$ C $\boxed{52.3}$ D $\boxed{225}$ E $\boxed{91.4}$

1)



$$m\ddot{y} = mg - k\dot{y}^2$$

$$v_\ell \Rightarrow \ddot{y} = 0 \Rightarrow$$

$$v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

2)

$$m\ddot{y} = -mg - k\dot{y}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad m\frac{dv}{dt} = -mg - kv^2$$

$$\frac{dv}{dt} = -g\left(1 + \frac{k}{mg}v^2\right)$$

$$\frac{dv}{\left(1 + \frac{k}{mg}v^2\right)} = -g\,dt \qquad \int_{v_i}^{v_f} \frac{dv}{1 + \frac{k}{mg}v^2} = -g\int_0^t dt = -gt$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\,tg^{-1}\frac{x}{a} \Rightarrow \qquad x = \sqrt{\frac{k}{mg}}\,v$$

$$dx = \sqrt{\frac{k}{mg}}\,dv$$

$$\Rightarrow \int_{x_i}^{x_f} \frac{dx}{1 + x^2}\underbrace{\sqrt{\frac{mg}{k}}}_{v_\ell} = -gt \qquad \Rightarrow$$

$$\mathrm{tg}^{-1}\frac{v_f}{v_\ell} - \mathrm{tg}^{-1}\frac{v_i}{v_\ell} = -\frac{g}{v_\ell}t$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = v_\ell \,\mathrm{tg}\left[\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{v_i}{v_\ell}\right) - \frac{g}{v_\ell}t\right]$$

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow h_{max} \Rightarrow$$

$$\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{v_i}{v_\ell}\right) - \frac{g}{v_\ell}t_{max} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{max} = \frac{v_\ell}{g}\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{v_i}{v_\ell}$$

3) Due modi di risolvere:

a) Teorema delle forze vive

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \mathcal{L}_{peso} + \mathcal{L}_{attr.}$$

$$\mathcal{L}_{peso} = -mgh$$

$$\mathcal{L}_{attr} = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{y_i}^{y_f} -kv^2\,dy = -k\int v^2\frac{dy}{dt}dt$$

$$= -k\int v^3\,dt = -k\int v^3\frac{dt}{dv}\,dv = -k\int\frac{v^3}{a}\,dv$$

$$= -k\int_{v_i}^{0}\frac{v^3\,dv}{-g-\frac{k}{m}v^2}$$

$x = \frac{v}{v_\ell}$

$$= \frac{k}{g}v_\ell^4\int_{\frac{v_i}{v_\ell}}^{0}\frac{x^3\,dx}{1+x^2} = -\frac{\cancel{k}}{\cancel{g}}\frac{m^2g^{\cancel{2}}}{k^{\cancel{2}}}\left[\frac{v_i^2}{2\frac{mg}{k}} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{v_i^2}{v_\ell^2}\right)\right]$$

$$\int\frac{x^3}{a^2+x^2}dx = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\ln(x^2+a^2)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}mv_i^2 = -mgh - \frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{m^2g}{2k}\ln\left[1+\left(\frac{v_i}{v_\ell}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{m}{2k}\ln\left(1+\frac{v_i^2}{v_\ell^2}\right) = \frac{v_\ell^2}{2g}\ln\left(1+\left(\frac{v_i}{v_\ell}\right)^2\right).$$

b) Da $v(t) \rightarrow$

$$\dot{y}(t) = v_e \, tg\left[tg^{-1}\frac{v_i}{v_e} - \frac{g}{v_e} t \right]$$

$$\int_{y_i}^{y_f} dy = v_e \int_0^{t_{max}} tg\left[tg^{-1}\frac{v_i}{v_e} - \frac{g}{v_e} t \right] dt$$

$$\tau = tg^{-1}\frac{v_i}{v_e} - \frac{g}{v_e} t \quad \Rightarrow \quad d\tau = -\frac{g}{v_e} dt$$

$$y_f - y_i = h = v_e \left(-\frac{v_e}{g}\right) \int_{tg^{-1}\frac{v_i}{v_e}}^{tg^{-1}\frac{v_i}{v_e} - \frac{g}{v_e} t_{max}} tg\, \tau \, d\tau$$

$\int tg\, x \, dx = -\ln(\cos x)$

$$h = -\frac{v_e^2}{g} \left\{ \ln\left[\cos\left(tg^{-1}\frac{v_i}{v_e}\right)\right] - \ln\left[\cos\left(tg^{-1}\frac{v_i}{v_e} - \frac{g}{v_e} t_{max}\right)\right] \right\}$$

$$= -\frac{v_e^2}{g} \left\{ \ln \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\left(tg^{-1}\frac{v_i}{v_e}\right)}} - \cancel{\ln\left[\overset{1}{\cos 0}\right]} \right\}$$

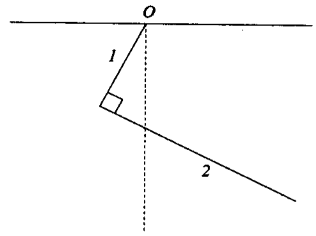
$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$

$t_{max} = \frac{v_e}{g} tg^{-1}\frac{v_i}{v_e}$

$$= -\frac{v_e^2}{g}\left(-\frac{1}{2}\right) \ln\left[1 + \left[tg\left(tg^{-1}\frac{v_i}{v_e}\right)\right]^2\right] =$$

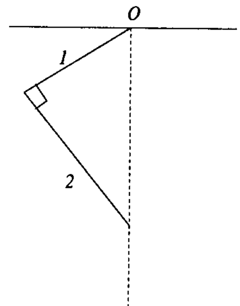
$$h = \frac{v_e^2}{2g} \ln\left[1 + \left(\frac{v_i}{v_e}\right)^2\right].$$

Esercizio 1: Due aste omogenee, 1 e 2, sono rigidamente connesse come in figura, formando tra di loro un angolo retto. L'asta 1 può ruotare, senza attrito, attorno al punto di sospensione O. Le due aste sono lunghe 0.370 m e 0.440 m, rispettivamente. La massa della prima asta è 0.710 kg. Si supponga che all'equilibrio l'asta 1 formi un angolo di 0.350 Rad con la verticale passante per O. Determinare:



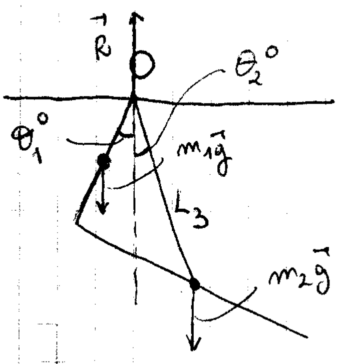
1. la massa dell'asta 2 (5,-1)
   m_2 [kg] = $\boxed{0.564}$ A $\boxed{0.0797}$ B $\boxed{0.564}$ C $\boxed{0.418}$ D $\boxed{0.0331}$ E $\boxed{0.115}$
2. la frequenza angolare delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio (a questa domanda non si può rispondere senza conoscere la massa dell'asta 2) (5,-1)
   ω [Rad/s] = $\boxed{4.98}$ A $\boxed{9.38}$ B $\boxed{1.93}$ C $\boxed{2.36}$ D $\boxed{4.98}$ E $\boxed{3.21}$

Si supponga adesso che la massa di 2 sia 6.50 kg e che sul punto di sospensione sia applicato un momento di richiamo proporzionale all'angolo tra l'asta 1 e la verticale, con coefficiente di proporzionalità pari a 1000 N m/Rad. Si rilascia il sistema da fermo dalla posizione in cui l'estremo libero dell'asta 2 è sulla verticale (vedi figura accanto). Determinare:



3. la velocità angolare del sistema quando l'asta 1 passa per la posizione verticale (5,-1)
   ω [Rad/s] = $\boxed{23.7}$ A $\boxed{6.19}$ B $\boxed{6.87}$ C $\boxed{4.44}$ D $\boxed{11.8}$ E $\boxed{23.7}$

1)



1 eq. car. $m_1 g + m_2 g = R$

2 eq. car. (polo O) $m_1 \cancel{g} \frac{L}{2} \sin\theta_1^\circ - m_2 \cancel{g} L_3 \sin\theta_2^\circ = 0$

$$L_3 = \sqrt{L_1^2 + \frac{L_2^2}{4}}$$

$$\sin(\theta_1^\circ + \theta_2^\circ) = \frac{L_2}{2L_3} \Rightarrow \theta_2^\circ = \sin^{-1}\left(\frac{L_2}{2\sqrt{L_1^2 + \frac{L_2^2}{4}}}\right) - \theta_1^\circ$$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{m_1 \frac{L_1}{2} \sin\theta_1^\circ}{\sqrt{L_1^2 + \frac{L_2^2}{4}}\ \sin\left[\sin^{-1}\left(\frac{L_2}{2\sqrt{L_1^2 + \frac{L_2^2}{4}}}\right) - \theta_1^\circ\right]}$$

2) $I_1^\circ = \frac{1}{3} m_1 L_1^2$

$$I_2^\circ = \frac{1}{12} m_2 L_2^2 + m_2 L_3^2 = \frac{1}{12} m_2 L_2^2 + m_2 \left(L_1^2 + \frac{L_2^2}{4} \right)$$

$$= m_2 \left(L_1^2 + \frac{L_2^2}{3} \right)$$

$$\text{Energia} = \frac{1}{2} I_1^\circ \dot\theta_1^2 + \frac{1}{2} I_2^\circ \dot\theta_2^2 - m_1 g \frac{L_1}{2} \cos\theta_1 - m_2 g L_3 \cos\theta_2$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 = \cancel{\frac{1}{2}} I_1^\circ \cancel{2}\dot\theta_1 \ddot\theta_1 + \cancel{\frac{1}{2}} I_2^\circ \cancel{2}\dot\theta_2 \ddot\theta_2 + m_1 g \frac{L_1}{2} \sin\theta_1 \dot\theta_1$$
$$+ m_2 g L_3 \sin\theta_2 \dot\theta_2$$

$$\theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{L_2}{2L_3}\right) - \theta_1$$

$$\dot\theta_1 = -\dot\theta_2 \qquad \ddot\theta_1 = -\ddot\theta_2$$

$$\Rightarrow \quad I_1^\circ \cancel{\dot\theta_1} \ddot\theta_1 + I_2^\circ \cancel{\dot\theta_1} \ddot\theta_1 + m_1 g \frac{L_2}{2} \sin\theta_1 \cancel{\dot\theta_1}$$
$$- m_2 g L_3 \sin\theta_2 \cancel{\dot\theta_1} = 0$$

$$(I_1^\circ + I_2^\circ) \ddot\theta_1 + m_1 g \frac{L_2}{2} \sin\theta_1 - m_2 g L_3 \sin\theta_2 = 0$$

$$\theta_1 \approx \theta_1^\circ + \varepsilon \qquad \theta_2 \approx \theta_2^\circ - \varepsilon$$

$$(I_1^\circ + I_2^\circ) \ddot\varepsilon + m_1 g \frac{L_2}{2} \left(\sin\theta_1^\circ \cos\varepsilon + \cos\theta_1^\circ \sin\varepsilon \right)$$
$$- m_2 g L_3 \left(\sin\theta_2^\circ \cos\varepsilon - \cos\theta_2^\circ \sin\varepsilon \right)$$

$$\approx (I_1^\circ + I_2^\circ) \ddot\varepsilon + \left(m_1 g \frac{L_2}{2} \cos\theta_1^\circ + m_2 g L_3 \cos\theta_2^\circ \right) \varepsilon$$
$$+ m_1 g \frac{L_2}{2} \sin\theta_1^\circ - m_2 g L_3 \sin\theta_2^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{m_1 g \frac{L_2}{2} \cos\theta_1^\circ + m_2 g \sqrt{L_1^2 + \frac{L_2^2}{4}} \cos\theta_2^\circ}{I_1^\circ + I_2^\circ}}$$

3) $M = \mu_0 \theta$

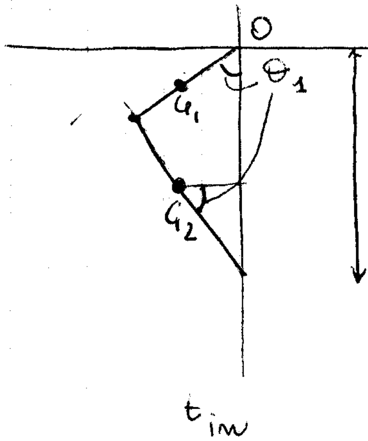
$$\downarrow$$

$$\mathcal{L} = \int M \, d\theta = \frac{1}{2} \mu \theta^2 \Big|_{\theta_i}^{\theta_f}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(I_1^0 + I_2^0\right)\omega^2 - m_1 \frac{L_1}{2} g - m_2 L_1 g$$

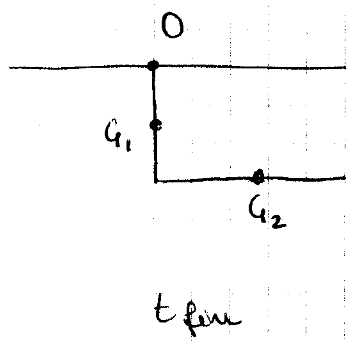
$$= - m_1 \frac{L_1}{2} g \cos\theta_1 - m_2 g \left(L_4 - \frac{L_2}{2} \sin\theta_1 \right) + \frac{1}{2} \mu_0 \theta_1^2$$

con



$L_4 = \sqrt{L_1^2 + L_2^2}$

$\theta_1 = \sin^{-1}\left(\frac{L_2}{L_4}\right)$



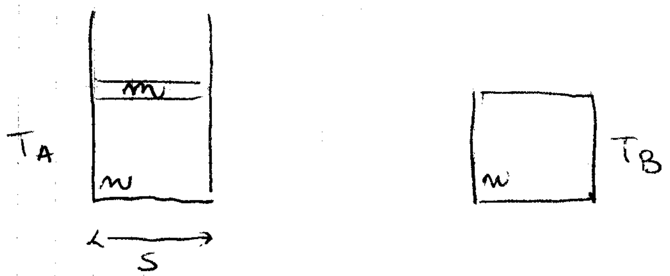
$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{m_1 L_1 g (1 - \cos\theta_1) + m_2 g \left(2L_1 - 2L_4 + L_2 \sin\theta_1 \right) + \mu_0 \theta_1^2}{I_1^0 + I_2^0}$$

Esercizio 2: Si considerino due recipiente A e B così fatti: il recipiente A, a forma cilindrica con sezione 0.200 m^2, contiene 0.640 moli di gas perfetto biatomico ed è chiuso da un pistone di massa 0.460 kg. Si trascuri la pressione atmosferica esterna. La temperatura iniziale del gas in A è 290 K. Il contenitore B è rigido e contiene lo stesso numero di moli dello stesso gas del contenitore A. La temperatura iniziale del gas in B è 320 K. Supponiamo che i due contenitori abbiano una parete a contatto e che gli unici scambi di calore avvengano attraverso questa parete. Una volta raggiunto l'equilibrio, determinare:

1. il volume finale del gas in A (5,-1)
   V_A [m^3] = $\boxed{69.7}$ A $\boxed{69.7}$ B $\boxed{290}$ C $\boxed{16.4}$ D $\boxed{36.7}$ E $\boxed{131}$
2. la variazione di entropia del sistema $A + B$ (5,-1)
   ΔS [J/K] = $\boxed{0.0243}$ A $\boxed{0.308}$ B $\boxed{0.200}$ C $\boxed{0.0169}$ D $\boxed{0.0625}$ E $\boxed{0.0243}$

Si supponga adesso di avere lo stesso sistema di prima, con le stesse condizioni iniziali, ma che i due contenitori possano scambiare calore soltanto con una macchina termica che, attraverso cicli reversibili, preleva calore da B per scaldare A, fino ad esaurimento della differenza di temperatura, e produce lavoro. Determinare:

3. il massimo lavoro che può essere prodotto (5,-1)
   L_{max} [J] = $\boxed{7.33}$ A $\boxed{2.58}$ B $\boxed{15.3}$ C $\boxed{7.33}$ D $\boxed{13.5}$ E $\boxed{12.4}$



$$C_V = \frac{3}{2}R$$

$$C_P = \frac{5}{2}R$$

1) $\Delta Q_{AB} + \Delta Q_{BA} = 0$

$$n\,C_p\,(T_{eq} - T_A) + n\,C_v\,(T_{eq} - T_B) = 0$$

$$T_{eq} = \frac{C_p T_A + C_v T_B}{C_p + C_v}$$

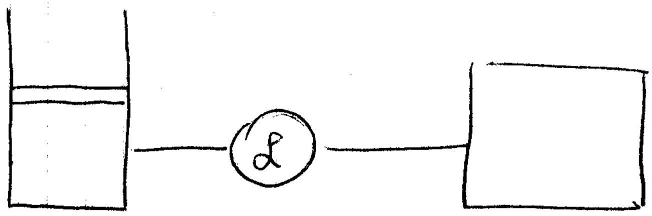
$$\frac{mg}{S} V_A = nR\,T_{eq} \Rightarrow$$

$$V_A = \frac{nRS}{mg}\left(\frac{C_p T_A + C_v T_B}{C_v + C_p}\right)$$

2) $$\Delta S_A + \Delta S_B = n\,C_p \ln\frac{T_{eq}}{T_A} + n\,C_v \ln\frac{T_{eq}}{T_B}$$

$$= n\,C_p \ln\left(\frac{C_p T_A + C_v T_B}{(C_p + C_v) T_A}\right) + n\,C_v \ln\left(\frac{C_p T_A + C_v T_B}{(C_p + C_v) T_B}\right)$$

3)



$$\Delta U_{\mathcal{L}} = 0 = \Delta Q - \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{L} = \Delta Q = -\Delta Q_{A\mathcal{L}} - \Delta Q_{B\mathcal{L}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = n c_p (T_A - T_{eq}) + n c_v (T_B - T_{eq})$$

$$\mathcal{L}_{max} \Rightarrow T_{eq} = T_{eq\,min}$$

$$\Delta S_A + \Delta S_B + \cancelto{0}{\Delta S_{\mathcal{L}}} \geq 0$$

$$\cancel{n} c_p \ln \frac{T_{eq}}{T_A} + \cancel{n} c_v \ln \frac{T_{eq}}{T_B} \geq 0$$

$$\left(\frac{T_{eq}}{T_A}\right)^{c_p} \left(\frac{T_{eq}}{T_B}\right)^{c_v} \geq 1 \Rightarrow$$

$$T_{eq\,min} = T_A^{\frac{c_p}{c_p + c_v}} \; T_B^{\frac{c_v}{c_p + c_v}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{max} = n c_p (T_A - T_{eq\,min}) + n c_v (T_B - T_{eq\,min}) .$$