

Esercizio 1: Un punto materiale si muove su una traiettoria descritta, in coordinate polari $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta\}$, da $r(\theta) = \frac{l}{1-e \cos(\theta)}$ con $l=2.00$ m e $e=0.670$. La traiettoria viene percorsa in senso antiorario con velocità angolare costante, pari a 4.60 Rad/s. L'angolo θ all'istante iniziale è nullo. Determinare dopo 2.40 s:

- il modulo della velocità istantanea (5,0)
 $|v|$ [m/s] = A B C D E
- il valore assoluto della componente lungo $\hat{e}_\theta$ dell'accelerazione istantanea (5,0)
 $|a_\theta|$ [m/s²] = A B C D E
- il valore assoluto della componente dell'accelerazione parallela alla velocità (5,0)
 $a_{||}$ [m/s²] = A B C D E

$$r(\theta) = \frac{l}{1-e \cos \theta}$$

$$\Rightarrow r(t) = \frac{l}{1-e \cos \omega t}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t = \omega t$$

$$\dot{r} = - \frac{l e \omega \sin \omega t}{(1-e \cos \omega t)^2} = v_r$$

$$r \dot{\theta} = \frac{l \omega}{1-e \cos \omega t} = v_\theta$$

$$\Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2} = \sqrt{\frac{l^2 e^2 \omega^2 \sin^2 \omega t}{(1-e \cos \omega t)^4} + \frac{l^2 \omega^2}{(1-e \cos \omega t)^2}}$$

$$= \frac{l \omega}{(1-e \cos \omega t)^2} \sqrt{1+e^2-2e \cos \omega t}$$

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = a_r$$

$$2 \dot{r} \dot{\theta} = a_\theta$$

$$\Rightarrow a_\theta = - \frac{2 l e \omega^2 \sin \omega t}{(1-e \cos \omega t)^2}$$

$$a_{||} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{|\vec{v}|} (a_r v_r + a_\theta v_\theta)$$

$$a_r = \frac{d}{dt} \left(-l e w \frac{\sin \omega t}{(1 - e \cos \omega t)^2} \right) - \frac{l \omega^2}{1 - e \cos \omega t}$$

$$= -l e w \left[\frac{\omega \cos \omega t}{(1 - e \cos \omega t)^2} + \frac{\sin \omega t}{(1 - e \cos \omega t)^3} (-2)(-e)(-\omega \sin \omega t) \right]$$

$$- \frac{l \omega^2}{1 - e \cos \omega t} = - \frac{l \omega^2 e}{(1 - e \cos \omega t)^3} \left[\cos \omega t - e \cos^2 \omega t - 2 e \underbrace{\sin^2 \omega t}_{1 - \cos^2 \omega t} \right]$$

$$- \frac{l \omega^2}{1 - e \cos \omega t}$$

$$= - \frac{l \omega^2 e}{(1 - e \cos \omega t)^3} (\cos \omega t - 2e + e \cos^2 \omega t) - \frac{l \omega^2}{1 - e \cos \omega t}$$

$$\Rightarrow a_{||} = \frac{1}{|\vec{r}|} \left(- \frac{l e w \sin \omega t}{(1 - e \cos \omega t)^2} \left[- \frac{l \omega^2 e}{(1 - e \cos \omega t)^3} (\cos \omega t - 2e + e \cos^2 \omega t) - \frac{l \omega^2}{1 - e \cos \omega t} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{l w}{1 - e \cos \omega t} \left[- \frac{2 l e \omega^2 \sin \omega t}{(1 - e \cos \omega t)^2} \right] \right)$$

$$= \frac{l^2 e \omega^3 \sin \omega t (3e \cos \omega t - 1 - 2e^2)}{(1 - e \cos \omega t)^5} \quad \frac{1}{|\vec{r}|}$$

$$= \frac{l^2 e \omega^3 \sin \omega t (3e \cos \omega t - 1 - 2e^2)}{(1 - e \cos \omega t)^3 \sqrt{1 + e^2 - 2e \cos \omega t}}$$

Al medesimo risultato si arriva anche facendo

$$a_{||} = \frac{d}{dt} |\vec{v}| = \frac{d}{dt} \left[\frac{l w \sqrt{1 + e^2 - 2e \cos \omega t}}{(1 - e \cos \omega t)^2} \right] \cdot$$

Esercizio 2: Un cacciatore vuole colpire un uccello che vola ad una quota costante di 200 m con una certa velocità costante. Si sa che il fucile del cacciatore spara il proiettile ad una velocità di 76.0 m/s. Si supponga che il cacciatore spari nell'istante in cui l'uccello è proprio sulla sua testa e si trascuri l'altezza del cacciatore rispetto alla quota a cui vola l'uccello. Sapendo che il povero uccello non può volare ad una velocità superiore a quella del proiettile, determinare:

1. il modulo della velocità minima che deve avere l'uccello perché questo non venga colpito dal cacciatore (5,0)

$|v|$ [m/s] = A B C D E

Supponiamo che la velocità dell'uccello fosse tale per cui sia stato colpito. In seguito al colpo, la povera bestiola ha una velocità il cui modulo è pari a 9.40 m/s e la cui direzione forma un angolo di 0.620 Rad con l'orizzontale. Determinare:

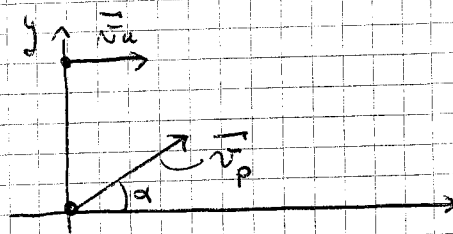
2. la distanza sul terreno tra la proiezione del punto in cui l'uccello è stato colpito e il punto in cui cade (5,0)

d [m] = A B C D E

3. il valore assoluto della componente verticale del versore tangente alla traiettoria nel punto di contatto col suolo (5,0)

$|T_{vert}|$ = A B C D E

1)
$$\begin{cases} x_u(t) = v_u t \\ x_p(t) = v_p \cos \alpha t \\ y_p(t) = v_p \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$



Se colpisce l'uccello, deve esistere un tempo $\bar{t}$ tale che

$$\begin{cases} x_u(\bar{t}) = x_p(\bar{t}) \\ y_p(\bar{t}) = R \end{cases} \Rightarrow v_u \bar{t} = v_p \cos \alpha \bar{t} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{v_u}{v_p}$$

$$\Rightarrow R = v_p \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \bar{t} - \frac{1}{2} g \bar{t}^2 = v_p \sqrt{1 - \frac{v_u^2}{v_p^2}} \bar{t} - \frac{1}{2} g \bar{t}^2$$

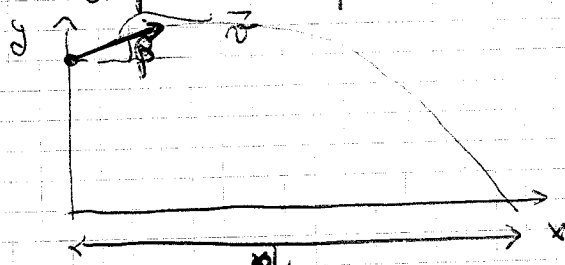
$$R = \sqrt{v_p^2 - v_u^2} \bar{t} - \frac{1}{2} g \bar{t}^2 \Rightarrow \bar{t} = \frac{\sqrt{v_p^2 - v_u^2} \pm \sqrt{v_p^2 - v_u^2 - 2hg}}{g}$$

Se l'uccello non viene colpito $\Rightarrow \bar{t}$ non esiste $\Rightarrow$

$$\sqrt{v_p^2 - v_u^2 - 2hg} \leq 0 \Rightarrow v_u^2 \geq v_p^2 - 2hg$$

$$\Rightarrow v_u = \sqrt{v_p^2 - 2hg}$$

2) L'uccello colpito compie un moto parabolico.



$$\begin{cases} x_u(t) = v \cos \beta t \\ y_u(t) = h + v \sin \beta t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Ciò che $\bar{t}$ tale che $y_u(\bar{t}) = 0 \Rightarrow$

$$h + v \sin \beta \bar{t} - \frac{1}{2} g \bar{t}^2 = 0 \quad \bar{t} = \frac{v \sin \beta \pm \sqrt{v^2 \sin^2 \beta + 2 h g}}{g}$$

$$\Rightarrow \bar{t} = \frac{v \sin \beta}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 h g}{v^2 \sin^2 \beta}} \right)$$

$$\Rightarrow d = x_u(\bar{t}) = \frac{v^2 \sin \beta \cos \beta}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 h g}{v^2 \sin^2 \beta}} \right)$$

$$3) \quad v_x = v \cos \beta$$

$$v_y(t) = v \sin \beta - g t$$

$$\Rightarrow v_y(\bar{t}) = v \sin \beta - g \bar{t} = -v \sin \beta \sqrt{1 + \frac{2 h g}{v^2 \sin^2 \beta}}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}(\bar{t})| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v^2 \cos^2 \beta + v^2 \sin^2 \beta + 2 h g} \\ = \sqrt{v^2 + 2 h g}$$

$$\Rightarrow \hat{T} = \frac{\vec{v}(\bar{t})}{|\vec{v}(\bar{t})|} \Rightarrow T_y = \frac{v_y(\bar{t})}{|\vec{v}|} = - \frac{v \sin \beta}{\sqrt{v^2 + 2 h g}} \sqrt{1 + \frac{2 h g}{v^2 \sin^2 \beta}}$$