Compito del 17/01/05

**Esercizio 1**: Un punto materiale percorre una traiettoria descritta, in coordinate radiali, dall'equazione $r(\theta) = (1-e^{-\theta})\times 3.70$ m. La traiettoria è percorsa con velocità angolare costante pari a 0.970 Rad/s e all'istante iniziali l'angolo $\theta$ è nullo. Determinare dopo 0.860 s:

1. il modulo della velocità istantanea del punto (5,0)
   $|v|$ [m/s] = $\boxed{2.56}$ A $\boxed{15.1}$ B $\boxed{9.54}$ C $\boxed{2.56}$ D $\boxed{3.12}$ E $\boxed{18.2}$
2. il modulo dell'accelerazione istantanea del punto (5,0)
   $|a|$ [m/s$^2$] = $\boxed{4.61}$ A $\boxed{2.68}$ B $\boxed{0.848}$ C $\boxed{1.04}$ D $\boxed{8.92}$ E $\boxed{4.61}$
3. il valore assoluto della componente radiale del versore normale alla traiettoria (5,0)
   $|\hat{N}_r|$ = $\boxed{0.793}$ A $\boxed{0.0654}$ B $\boxed{0.793}$ C $\boxed{0.247}$ D $\boxed{0.896}$ E $\boxed{0.171}$

$$r(\theta) = r_0 (1-e^{-\theta}) \qquad \Rightarrow \qquad r(t) = r_0(1-e^{-\omega_0 t})$$
$$\theta(t) = \omega_0 t$$

$$\dot{r} = r_0 \omega_0 e^{-\omega_0 t} \qquad \ddot{r} = -r_0 \omega_0^2 e^{-\omega_0 t}$$
$$\dot{\theta} = \omega_0 \qquad \ddot{\theta} = 0$$

1) $$\vec{v} = \hat{e}_r \dot{r} + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta = \hat{e}_r\, r_0\omega_0 e^{-\omega_0 t} + \hat{e}_\theta\, r_0 (1-e^{-\omega_0 t})\omega_0$$

$$|\vec{v}| = r_0\omega_0 \sqrt{e^{-2\omega_0 t} + (1-e^{-\omega_0 t})^2}$$
$$= r_0\omega_0\sqrt{1-2e^{-\omega_0 t} + 2e^{-2\omega_0 t}}$$

2) $$\vec{a} = \hat{e}_r\left(\cancel{-r_0\omega_0^2 e^{-\omega_0 t}} - r_0(1-\cancel{e^{-\omega_0 t}})\,\omega_0^2\right)$$
$$+\, \hat{e}_\theta\left(2 r_0 \omega_0^2 e^{-\omega_0 t}\right)$$

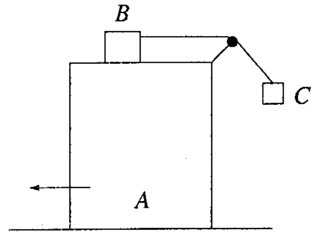
$$|\vec{a}| = r_0\omega_0^2\sqrt{1+4e^{-2\omega_0 t}}$$

3) $$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \hat{e}_r \frac{\cancel{r_0}\cancel{\omega_0}\, e^{-\omega_0 t}}{\cancel{r_0}\cancel{\omega_0}\,\Delta} + \hat{e}_\theta \frac{\cancel{r_0}\cancel{\omega_0}(1-e^{-\omega_0 t})}{\cancel{r_0}\cancel{\omega_0}\,\Delta}$$

$$\Delta \equiv \sqrt{1-2e^{-\omega_0 t} + 2e^{-2\omega_0 t}} \qquad |\hat{N}_r|$$

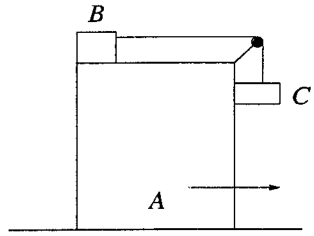
$$\hat{N} = -\hat{e}_r \frac{(1-e^{-\omega_0 t})}{\Delta} + \hat{e}_\theta \frac{e^{-\omega_0 t}}{\Delta}$$

**Esercizio 2**: Si consideri il sistema in figura: un blocco $A$ è appoggiato su di un piano orizzontale liscio e ad un suo angolo è attaccata una carrucola ideale di massa trascurabile. Sul blocco è appoggiato un blocchetto $B$ di massa 7.00 kg. Il blocchetto $B$ è collegato, come in figura, ad un altro blocchetto $C$ di massa 2.90 kg per mezzo di un filo che passa attraverso la carrucola ed è inestensibile e di massa nulla. Si supponga che la faccia superiore del blocco $A$ sia scabra e il blocco stesso sia accelerato per mezzo di una forza esterna orizzontale verso sinistra con accelerazione costante pari a 2.40 m/s$^2$. Determinare:




1. il valore minimo del coefficiente di attrito statico per cui il blocchetto $B$ possa rimanere in quiete sul blocco $A$ (5,0)
   $\mu_s$ = $\boxed{0.666}$ A $\boxed{0.199}$ B $\boxed{0.317}$ C $\boxed{0.0651}$ D $\boxed{0.666}$ E $\boxed{0.179}$

Si supponga adesso che tutte le facce superiori del blocco $A$ siano lisce e che il blocco, di massa pari a 10.0 kg, sia accelerato verso destra con accelerazione costante pari a 7.30 m/s$^2$ da una forza esterna orizzontale (vd. figura). Determinare:

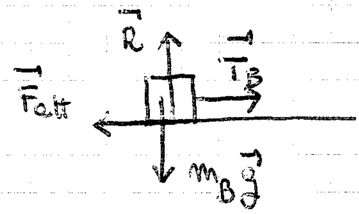


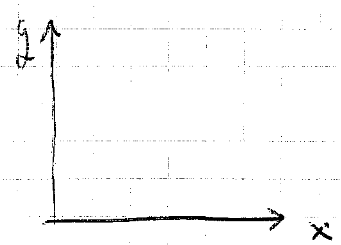

2. il modulo della forza esterna applicata (5,0)
   $|F_{ex}|$ [N] = $\boxed{130}$ A $\boxed{9.29}$ B $\boxed{81.0}$ C $\boxed{37.9}$ D $\boxed{130}$ E $\boxed{42.0}$

Si supponga infine che il lato orizzontale del blocco $A$ sia lungo 1.80 m, e il lato verticale abbia una lunghezza maggiore. Il blocchetto $C$ è adesso vincolato a muoversi lungo il lato verticale del blocco $A$ senza attrito. Si rilascia il sistema da fermo, con il blocchetto $B$ posizionato all'estremità sinistra del blocco $A$. Quando il blocchetto $B$ ha percorso tutto il lato orizzontale del blocco $A$, determinare, in un sistema di riferimento assoluto:

3. il modulo dello spostamento del blocco $A$ (5,0)
   $|\Delta x|$ [m] = $\boxed{0.633}$ A $\boxed{0.425}$ B $\boxed{0.730}$ C $\boxed{0.363}$ D $\boxed{1.56}$ E $\boxed{0.633}$

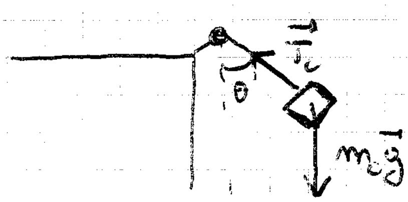
1) Forze su B

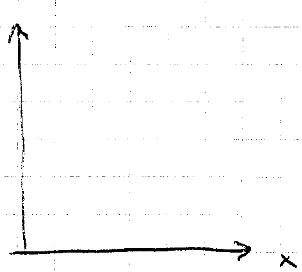



$$m_B \vec{a}_B = \vec{T}_B + \vec{F}_{att} + m_B \vec{g} + R$$

Forze su C




$$m_B \vec{a}_c = \vec{T}_c + m_c \vec{g}$$

In un sistema di rif. assoluto $\vec{a}_B = \vec{a}_c = \vec{a}_A = -a\hat{x}$

$|\vec{T}_c| = |\vec{T}_B| \equiv T$

$\Rightarrow$ Scompongo in $\{x, y\}$:

$$\begin{cases} -m_B a = T - F_{att} \\ 0 = -m_B g + R \\ -m_c a = -T \sin\theta \\ 0 = -m_c g + T\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} F_{att} &= T + m_B a \\ R &= m_B g \end{aligned} \quad \begin{cases} T\sin\theta = m_c a \\ T\cos\theta = m_c g \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

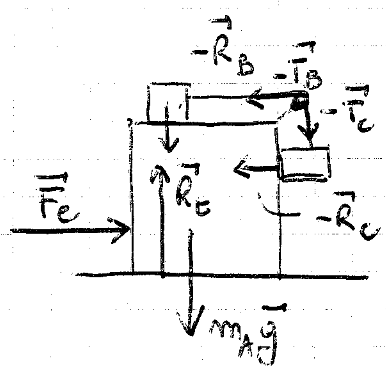
$$T = m_c\sqrt{a^2+g^2} \quad \Leftarrow \quad T^2 = m_c^2\, a^2+g^2$$

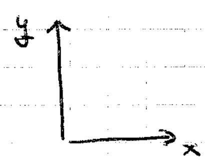
$$\Rightarrow \quad F_{att} = m_B a + m_c a\sqrt{1+\frac{g^2}{a^2}}$$

$$F_{att} \leq \mu_s R = \mu_s m_B g \quad \Rightarrow$$

$$\mu_s \geq \underbrace{\frac{a}{g}\left(1+\frac{m_c}{m_B}\sqrt{1+\frac{g^2}{a^2}}\right)}_{\mu_{s\,min}}$$

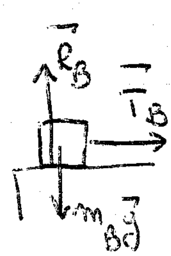
2) Forze su A



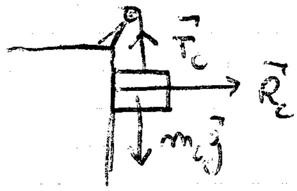

$$\begin{cases} m_A a = F_e - T - R_c \\ 0 = R_t - R_B - T - m_A g \end{cases}$$

Forze su B




$$\begin{cases} m_B a_B = T \\ 0 = -m_B g + R_B \end{cases}$$

Forze su C




$$\begin{cases} m_c a_{c_x} = R_c \\ m_c a_{c_y} = T - m_c g \end{cases}$$

Delle accelerazioni sappiamo che $\begin{cases} a_{c_x} = a \\ a_B = a + a' \\ a_{c_y} = -a' \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} m_A a = F_e - T - R_c \\ m_B(a + a') = T \\ m_c a = R_c \\ - m_c a' = T - m_c g \end{cases}$$

4 incognite: $F_e, T, R_c, a'$
4 eqn !

$$-m_c a' = m_B a + m_B a' - m_c g \Rightarrow$$

$$a' = \frac{m_c g - m_B a}{m_B + m_c}$$

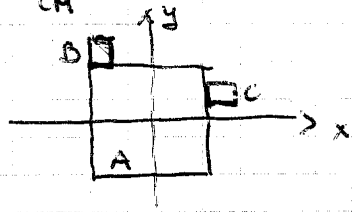
$$T = m_B a + m_B a' = m_B a + \frac{m_B}{m_B + m_c}(m_c g - m_B a)$$

$$F_e = m_A a + T + R_c = m_A a + m_B a + \frac{m_B}{m_B + m_c}(m_c g - m_B a) + m_c a$$

$$F_e = (m_A + m_B + m_c)\, a + \frac{m_B}{m_B + m_c}(m_c g - m_B a)$$

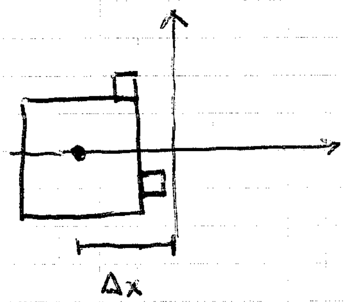
3) Lungo l'asse x non ci sono forze esterne al sistema A + B + C $\Rightarrow$ si conserva la quantità di moto totale, componente x. Poiché all'istante iniziale è tutto fermo, la comp. x della q. d. m. totale è zero $\Rightarrow$ $M_{tot}\, v_{CM} = 0$ $\Rightarrow$ $x_{CM}$ = costante nel tempo

a $t=0$




$$-m_B \frac{L}{2} + m_C \frac{L}{2} = x_{CM}$$

a t finale

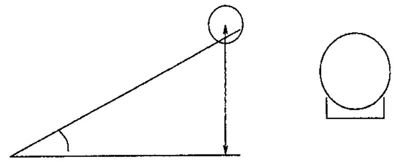



$$-m_A \Delta x - m_B\left(\Delta x - \frac{L}{2}\right) - m_C\left(\Delta x - \frac{L}{2}\right) = x_{CM}$$

$$\Rightarrow \quad -m_B \frac{L}{2} + \cancel{m_C \frac{L}{2}} = -(m_A + m_B + m_C)\,\Delta x + m_B \frac{L}{2} + \cancel{m_C \frac{L}{2}}$$

$$\Delta x = \frac{m_B\, L}{m_A + m_B + m_C}$$

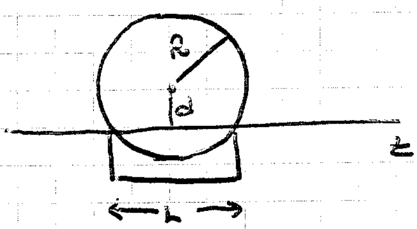
**Esercizio 1**: Un binario metallico con profilo a forma di U di larghezza 0.0350 m è inclinato di 0.940 Rad rispetto ad un piano orizzontale su cui è rigidamente incernierato. Una sfera omogenea di raggio 0.0590 m è appoggiata sopra il binario, come illustrato in figura, ed il suo centro è ad un'altezza di 1.40 m sopra il piano orizzontale. Nell'ipotesi che la sfera lasciata libera con velocità iniziale nulla scenda lungo il binario con moto di puro rotolamento, determinare:



1. il modulo della velocità di traslazione della sfera quando il suo centro è arrivato ad altezza nulla (5,0)
   $|v|$ [m/s] = $\boxed{4.41}$   A $\boxed{0.799}$   B $\boxed{2.78}$   C $\boxed{4.41}$   D $\boxed{0.374}$   E $\boxed{0.487}$
2. il modulo dell'accelerazione di traslazione della sfera durante la discesa (5,0)
   $|a|$ [m/s$^2$] = $\boxed{5.61}$   A $\boxed{1.15}$   B $\boxed{0.252}$   C $\boxed{3.77}$   D $\boxed{5.61}$   E $\boxed{0.661}$

Si prende adesso un altro binario, di forma simile al precedente ma diversa larghezza, col medesimo angolo d'inclinazione. Si sa che la stessa sfera scende su questo binario con accelerazione angolare di rotazione intorno al centro di massa pari a 6.00 Rad/sec$^2$. Determinare:

3. il minimo coefficiente di attrito, tra sfera e binario, necessario affinché la sfera discenda lungo il binario con moto di puro rotolamento (5,0)
   $\mu_{min}$ = $\boxed{0.0240}$   A $\boxed{0.00494}$   B $\boxed{0.00376}$   C $\boxed{0.0129}$   D $\boxed{0.0240}$   E $\boxed{0.00860}$




1) $Mgh = \frac{1}{2} I_z \omega_z^2$   $I_z = I_{CM} + M d^2$

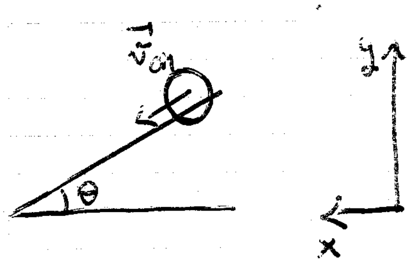
$\cancel{M}gh = \frac{1}{2}\cancel{M}\left(\frac{2}{5}R^2 + R^2 - \frac{L^2}{4}\right)\omega_z^2$   $d^2 = R^2 - \frac{L^2}{4}$

$I_{CM} = \frac{2}{5} M R^2$

$$\omega_z^2 = \frac{2gh}{\frac{7}{5}R^2 - \frac{L^2}{4}}$$

$$v_{CM} = d\,\omega_z = d\sqrt{\frac{2gh}{\frac{7}{5}R^2 - \frac{L^2}{4}}}$$

2)




$$E(t) = Mg\,y_{CM} + \frac{1}{2}\frac{I_z}{d^2}\left(\dot x_{CM}^2 + \dot y_{CM}^2\right)$$

$$\dot x_{CM} = -\frac{\dot y_{CM}}{\operatorname{tg}\theta} \Rightarrow$$

$$E(t) = Mg\, y_{CM} + \frac{1}{2} \frac{I_z}{d^2} \dot{y}_{CM}^2 \left(1 + \frac{1}{tg^2\theta}\right)$$

$$= Mg\, y_{CM} + \frac{1}{2} \frac{I_z}{d^2} \frac{\dot{y}_{CM}^2}{\sin^2\theta}$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 = Mg\, \cancel{\dot{y}_{CM}} + \cancel{\frac{1}{2}} \frac{I_z}{d^2} \frac{\cancel{2\dot{y}_{CM}}\, \ddot{y}_{CM}}{\sin^2\theta}$$

$$\ddot{y}_{CM} = - \frac{Mg\, d^2 \sin^2\theta}{I_z}$$

$$a_{CM} = \frac{-\ddot{y}_{CM}}{\sin\theta} = \frac{Mg\, d^2 \sin\theta}{\left(\frac{7}{5}R^2 - \frac{L^2}{4}\right)\cancel{M}} = \frac{v_{CM}^2 \sin\theta}{2h}$$

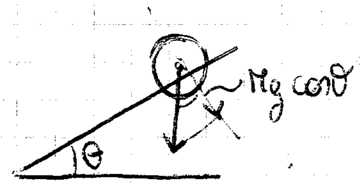
A questo risultato si arriva anche osservando che il CM della sfera fa un moto unif. accelerato $\Rightarrow$

$$v_{media} = \frac{v_{CM}}{2}$$

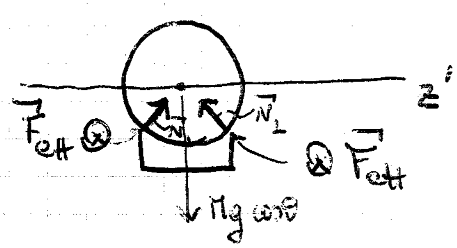
$$t_{caduta} = \frac{l}{v_{media}} = \frac{h}{\sin\theta} \frac{2}{v_{CM}}$$

$$a_{CM} = \frac{v_{CM}}{t_{caduta}} = \frac{v_{CM}^2 \sin\theta}{2h}.$$

3)




$$\dot{\omega}_{CM} \equiv \alpha$$




$$M_{z'} = \frac{dL_{z'}}{dt} \Rightarrow$$

$$I_{CM}\,\alpha = 2d\, F_{att} \Rightarrow F_{att} = \frac{I_{CM}\,\alpha}{2d}$$

Il moto avviene ortogonalmente al piano del foglio $\Rightarrow$

$$Mg\cos\theta = 2N\,\frac{d}{R} \quad \Rightarrow \quad N = Mg\cos\theta\,\frac{R}{2d}$$

$$F_{att} = \frac{I_{CM}\,\alpha}{2d} = \frac{2}{5}\,\frac{\cancel{M}R^2\alpha}{\cancel{2d}} \leq \mu_s\, N = \mu_s\, \cancel{M}g\,\frac{\cos\theta\,\cancel{R}}{\cancel{2d}}$$

$$\mu_s \geq \underbrace{\frac{2}{5}\,\frac{R\,\alpha}{g\cos\theta}}_{\mu_{s\,min}}$$

Compito del 17/01/05 

**Esercizio 2**: Un contenitore cilindrico contiene 0.170 moli di gas perfetto monoatomico in equilibrio con una sorgente esterna. Il contenitore è chiuso superiormente da un pistone di massa 8.60 kg collegato al fondo del cilindro da una molla di costante elastica 200 N/m e lunghezza a riposo 6.30 m. Nello stato iniziale la molla è compressa di un tratto 0.220 m. Si trascuri la pressione atmosferica. Viene aumentata quasi staticamente la temperatura del gas fin quando la molla non raggiunge la lunghezza di riposo. La molla ha capacità nulla e il cilindro e il pistone sono sempre all'equilibrio termico con il gas. Determinare:

1. la quantità di calore scambiata con la sorgente esterna (5,0)
   $Q$ [J] = $\boxed{444}$ A $\boxed{3330}$ B $\boxed{2750}$ C $\boxed{3790}$ D $\boxed{405}$ E $\boxed{444}$
2. la variazione di entropia della sorgente esterna (5,0)
   $\Delta S$ [J/K] = $\boxed{-1.64}$ A $\boxed{-6.33}$ B $\boxed{-1.64}$ C $\boxed{-11.6}$ D $\boxed{-3.57}$ E $\boxed{-9.99}$

Quando la molla è a riposo il gas viene termicamente isolato. Si agisce sul pistone con una forza esterna opportuna riportando il gas nella condizione iniziale di volume in maniera quasi statica. Determinare:

3. il lavoro della forza esterna (5,0)
   $L$ [J] = $\boxed{5.41}$ A $\boxed{133}$ B $\boxed{5.41}$ C $\boxed{34.6}$ D $\boxed{5.91}$ E $\boxed{26.6}$

$$c_V = \frac{3}{2}R \qquad \gamma = \frac{5}{3}$$

1)
$$V_0 = S(l_0 - x_0)$$
$$P_0 = \frac{mg - kx_0}{S} \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{P_0 V_0}{nR} = \frac{(l_0 - x_0)(mg - kx_0)}{nR}$$

$$V_1 = S\, l_0$$
$$P_1 = \frac{mg}{S} \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR} = \frac{mg\, l_0}{nR}$$

$$\Delta U = n c_V (T_1 - T_0) = Q - \mathcal{L}_{gas} = Q + \mathcal{L}_{ext}$$

$$\mathcal{L}_{ext} = \mathcal{L}_{peso} + \mathcal{L}_{molla} = -mg x_0 + \frac{1}{2} k x_0^2$$

$$\Rightarrow Q = n c_V (T_1 - T_0) + mg x_0 - \frac{1}{2} k x_0^2$$

2)
$$\Delta S_{gas} + \Delta S_{sorg} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Delta S_{sorg} = -\Delta S_{gas} = -\left[ n c_V \ln \frac{T_1}{T_0} + nR \ln \frac{V_1}{V_0} \right]$$

$$= n c_V \ln \frac{mg\, l_0}{(mg - kx_0)(l_0 - x_0)} + nR \ln \frac{l_0 - x_0}{l_0}.$$

3) $V_1 = S l_0$ $\qquad$ $V_2 = S(l_0 - x_0)$

$T_1 \quad \xrightarrow[\text{ad. rev}]{}$

$\Downarrow$

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3}$$

$$T_2 = \frac{mg\, l_0}{nR} \left(\frac{l_0}{l_0 - x_0}\right)^{2/3}$$

$$\Delta U = n c_v (T_2 - T_1) = \mathcal{L}_{est} = \mathcal{L}_{peso} + \mathcal{L}_{molla} + \mathcal{L}_{Fe}$$

$$= mg\, x_0 - \frac{1}{2} k x_0^2 + \mathcal{L}_{Fe}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{Fe} = n c_v (T_2 - T_1) - mg\, x_0 + \frac{1}{2} k x_0^2$$