Compito A1 del 08/02/2005

Esercizio 1: Un punto materiale di massa 0.570 kg si muove su una guida percorrendo una traiettoria descritta, in coordinate cartesiane, dall'equazione $y = -1.20\ \mathrm{m}^{-1}x^2 + \beta$, con velocità lungo x costante pari a 1.60 m/s. All'istante iniziale il punto materiale si trova in $x = 0$. È presente il campo gravitazionale diretto lungo $-\hat{y}$. Determinare dopo 0.430 s:

1. il modulo della velocità media del punto (5,0)
   $|v|$ [m/s] = $\boxed{2.07}$ A $\boxed{1.000}$ B $\boxed{2.85}$ C $\boxed{0.604}$ D $\boxed{1.63}$ E $\boxed{2.07}$
2. il valore assoluto della componente ortogonale alla traiettoria della forza esercitata dalla guida sul punto materiale (10,0)
   $|R_\perp|$ [N] = $\boxed{1.14}$ A $\boxed{6.66}$ B $\boxed{0.348}$ C $\boxed{0.779}$ D $\boxed{0.282}$ E $\boxed{1.14}$

$$y = -\alpha x^2 + \beta$$

$$x(t) = \underset{\substack{\| \\ 0}}{x(t=0)} + v_x t = v_x t$$

1)
$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{r}(0) = \beta\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(0) = x(t)\,\hat{\imath} - \alpha x^2(t)\,\hat{\jmath}$$

$$v_m = \frac{|\vec{r}(t) - \vec{r}(0)|}{t} = \frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2 x^4}}{t} = x\,\frac{\sqrt{1+\alpha^2 x^2}}{t} = \frac{v_x \cancel{t}}{\cancel{t}}\sqrt{1+\alpha^2 v_x^2 t^2}$$

2)
$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}$$

$$a_x = 0$$

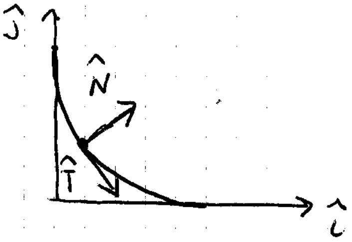
$$a_y = \ddot{y} = \frac{d}{dt}\left(-2\alpha x \dot{x}\right) = -2\alpha \dot{x}^2 - \cancel{2\alpha x \ddot{x}} = -2\alpha v_x^2$$

$$-2\alpha m v_x^2\,\hat{\jmath} = -mg\,\hat{\jmath} + R_x\,\hat{\imath} + R_y\,\hat{\jmath}$$

$$\Rightarrow \quad R_x = 0$$

$$R_y = m(g - 2\alpha v_x^2)$$

Traiettoria



$$\hat{T} = \frac{\dot{x}}{v}\,\hat{\imath} + \frac{\dot{y}}{v}\,\hat{\jmath}$$

$$\dot{x} = v_x$$

$$\dot{y} = -2\alpha x \dot{x} = -2\alpha v_x^2 t$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = v_x\sqrt{1 + 4\alpha^2 v_x^2 t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{T} = \frac{v_x}{v}\,\hat{\imath} - \frac{2\alpha v_x^2 t}{v}\,\hat{\jmath}$$

$$\hat{N} = \frac{2\alpha v_x^2 t}{v}\,\hat{\imath} + \frac{v_x}{v}\,\hat{\jmath}$$

$$\Rightarrow \quad |R_\perp| = |\vec{R}\cdot\hat{N}| = m\,|g - 2\alpha v_x^2|\,\frac{\cancel{v_x}}{\cancel{v_x}\sqrt{1+4\alpha^2 v_x^2 t^2}}$$

$$= m\,\frac{|g - 2\alpha v_x^2|}{\sqrt{1+4\alpha^2 v_x^2 t^2}}$$

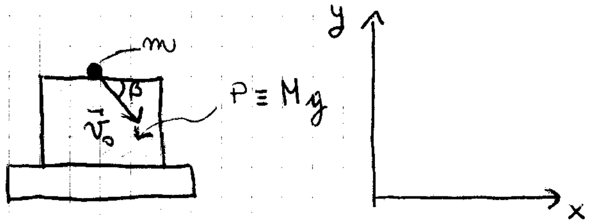
Compito A1 del 08/02/2005

Esercizio 2: Un contenitore pieno di liquido viscoso è appoggiato sopra una bilancia. Con il liquido in quiete il peso, letto sul display della bilancia, è di 21.0 N. Una sfera di massa 0.150 kg e dimensioni trascurabili mantenuta inizialmente all'altezza della superficie libera del liquido è poi lasciata cadere nel liquido. Si supponga che la forza d'attrito tra la sfera e il liquido sia descritta dalla relazione $\mathbf{F}_a = -1.10$ kg/s $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v}$ è il vettore velocità della sfera) e che durante il tempo di caduta il contenitore e il liquido restino in perfetta quiete. Determinare il valore del peso indicato sul display della bilancia (si noti che il display della bilancia indica la componente verticale della forza esercitata dal sistema sulla bilancia) dopo 0.0510 s di caduta nei seguenti due casi:

1. la sfera è lasciata cadere nel liquido con velocità iniziale nulla (5,0)
   P [N] = $\boxed{21.5}$ A $\boxed{70.3}$ B $\boxed{42.3}$ C $\boxed{3.58}$ D $\boxed{13.2}$ E $\boxed{21.5}$
2. la sfera è scagliata nel liquido con una velocità iniziale di modulo pari a 2.60 m/s e direzione tale che l'angolo formato dalla sua retta d'azione con la superficie libera del liquido sia di 0.640 Rad (7,0)
   P [N] = $\boxed{22.6}$ A $\boxed{7.97}$ B $\boxed{47.3}$ C $\boxed{22.6}$ D $\boxed{41.7}$ E $\boxed{38.4}$

In questa seconda ipotesi, determinare:

3. il minimo coefficiente d'attrito tra contenitore e bilancia necessario perché il contenitore rimanga sempre in quiete durate la caduta (3,0)
   μ_{min} = $\boxed{0.0697}$ A $\boxed{0.00484}$ B $\boxed{0.0376}$ C $\boxed{0.0697}$ D $\boxed{0.0209}$ E $\boxed{0.0581}$



$$\vec{F} = -\gamma \vec{v}$$

Nota: 1. è un caso particolare di 2. $\Rightarrow$ risolviamo 2. e poi 1. lo si ottiene con $v_0 = 0$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\gamma \dot{x} \\ m\ddot{y} = -mg + \gamma \dot{y} \end{cases}$$

Definiamo $\tau = \frac{m}{\gamma}$ e $v_{\text{limite}} \equiv v_\ell = \frac{mg}{\gamma} = g\tau$

Soluzioni delle equazioni di sopra sono

$$\begin{cases} x(t) = A_x e^{-t/\tau} + B_x \\ y(t) = A_y e^{-t/\tau} + B_y + v_\ell t \end{cases}$$

Condizioni iniziali: $x(0) = y(0) = 0$

$\dot{x}(0) = v_0 \cos\beta \qquad \dot{y}(0) = -v_0 \sin\beta$

$\Rightarrow A_x + B_x = 0 \qquad B_x = +v_0 \tau \cos\beta \qquad x(t) = v_0 \tau \cos\beta \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

$-\frac{A_x}{\tau} = v_0 \cos\beta \qquad A_x = -v_0 \tau \cos\beta$

$A_y + B_y = 0 \qquad\qquad B_y = -(v_0 \sin\beta + v_e)\,\tau$

$-\frac{A_y}{\tau} + v_e = -v_0 \sin\beta \qquad\qquad A_y = (v_0 \sin\beta + v_e)\,\tau$

$$y(t) = (v_0 \sin\beta + v_e)\,\tau\,(e^{-t/\tau} - 1) + v_e t$$

Derivando due volte oppure utilizzando le eqn. del moto si ricava che

$$\ddot{x}(t) = -\frac{\gamma}{m} v_0 \cos\beta\, e^{-t/\tau}$$

$$\ddot{y}(t) = \left(\frac{v_0 \sin\beta}{\tau} - g\right) e^{-t/\tau}$$

Consideriamo adesso il sistema contenitore + liquido + pallina

$$(M+m)\,\vec{a}_{CM} = m\vec{g} + M\vec{g} + \vec{R}$$

↳ forza della bilancia sul sistema

$$\vec{a}_{CM} = \frac{m\,\vec{a}}{(m+M)}$$

$$\Rightarrow \cancel{m}\left(-\frac{\gamma}{\cancel{m}} v_0 \cos\beta\, e^{-t/\tau}\right)\hat{\imath} + m\left(\frac{v_0 \sin\beta}{\frac{m}{\gamma}\textcircled{\tau}} - g\right) e^{-t/\tau}\,\hat{\jmath}$$

$$= -mg\,\hat{\jmath} - P\,\hat{\jmath} + \vec{R}$$

$$\Rightarrow \vec{R} = -\gamma v_0 \cos\beta\, e^{-t/\tau}\,\hat{\imath}$$

$$+ \left[mg + P + (\gamma v_0 \sin\beta - mg)\, e^{-t/\tau}\right]\hat{\jmath}$$

$$\Rightarrow R_y = mg + P + (\gamma v_0 \sin\beta - mg)\, e^{-t/\tau}$$

Se $v_0 = 0 \qquad R_y = mg + P - mg\, e^{-t/\tau} = P + mg(1 - e^{-t/\tau})$

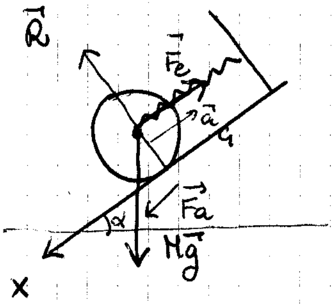
3) $|R_x| = F_{att} \leq \mu R_y \Rightarrow \mu \geq \left|\frac{R_x}{R_y}\right| = \frac{\gamma v_0 \cos\beta\, e^{-t/\tau}}{mg(1-e^{-t/\tau}) + P + \gamma v_0 \sin\beta\, e^{-t/\tau}}$

Compito A2 del 08/02/2005

Esercizio 1: Una ruota dentata, assimilabile a un disco omogeneo di massa 1.50 kg e raggio 0.120 m, può rotolare su di una cremagliera lungo la superficie di un piano inclinato di $\pi/5.30$ Rad rispetto alla direzione orizzontale. Il mozzo della ruota è collegato, tramite una molla di costante elastica 5.60 N/m e lunghezza a riposo 1.30 m, alla cima del piano inclinato.

1. Se la molla è inizialmente a riposo, calcolare il valore assoluto della componente della forza di reazione esercitata dal piano nella direzione tangente al piano stesso e nel momento di massimo allungamento della molla. (7,0)
   $|R_{tg}|$ [N] = $\boxed{2.79}$ A $\boxed{0.230}$ B $\boxed{2.79}$ C $\boxed{0.871}$ D $\boxed{3.16}$ E $\boxed{0.602}$
2. Il sistema è inizialmente nella posizione di equilibrio. Una forza esterna fornisce istantaneamente alla ruota un impulso verso l'alto, parallelo al piano inclinato e ad una distanza di 0.0720 m al di sopra dell'asse. Quanto deve valere l'impulso (in valore assoluto) perché la molla si comprima al massimo di 0.440 della lunghezza di riposo? (8,0)
   $|Imp|$ [kg m/s] = $\boxed{4.59}$ A $\boxed{1.37}$ B $\boxed{2.19}$ C $\boxed{0.448}$ D $\boxed{4.59}$ E $\boxed{1.24}$

1)



punto di max. allungamento

$$-Ma_G = -F_e + F_a + Mg\sin\alpha$$

da calcolare   incognita

- $F_e = K(x_{max} - l_0)$ ⟹ devo trovare x_{max}

$$E(t=0) = -Mg\,l_0\sin\alpha = E(t) = \frac{1}{2}k(x_{max}-l_0)^2 - Mg\,x_{max}\sin\alpha$$

$$K x_{max}^2 - 2Kx_{max}l_0 + Kl_0^2 - 2Mg\,x_{max}\sin\alpha + 2Mg\,l_0\sin\alpha = 0$$

$$K x_{max}^2 - 2(Kl_0 + Mg\sin\alpha)x_{max} + (Kl_0 + 2Mg\sin\alpha)l_0 = 0$$

$$x_{max} = \frac{Kl_0 + Mg\sin\alpha \pm\sqrt{(Kl_0+Mg\sin\alpha)^2 - Kl_0(Kl_0+2Mg\sin\alpha)}}{K}$$

$$= l_0 + \frac{Mg}{K}\sin\alpha \pm \frac{\sqrt{\cancel{K^2l_0^2} + M^2g^2\sin^2\alpha + \cancel{2Kl_0Mg\sin\alpha} \cancel{-K^2l_0^2} \cancel{-2MgKl_0\sin\alpha}}}{K}$$

$$= l_0 + 2\frac{Mg}{K}\sin\alpha$$

$$\Rightarrow F_e = 2K\frac{Mg}{K}\sin\alpha = 2Mg\sin\alpha$$

- $I_G\dot\omega = F_aR$ (2 eqn. card.) $\quad I_G = \frac{1}{2}MR^2$

$$\frac{1}{2}MR^{\cancel{2}}\dot\omega = F_a\cancel{R} \qquad MR\dot\omega = 2F_a \qquad a_G = R\dot\omega \Rightarrow$$

$$Ma_q = 2F_a$$

$$\Rightarrow \quad -2F_a = -2Mg\sin\alpha + F_a + Mg\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad F_a = \frac{1}{3}Mg\sin\alpha\,.$$

2) Determiniamo la x_{eq}:

$$M\vec{a}_q = \vec{R} + \vec{F}_e + \vec{F}_a + M\vec{g}$$

$$Ma_q\,\hat{\imath} = 0 = R\hat{\jmath} + F_e\,\hat{\imath} + F_a\,\hat{\imath} - Mg\cos\alpha\,\hat{\jmath} + Mg\sin\alpha\,\hat{\imath}$$

$$F_e = -k(x - l_0)$$

$$0 = -k(x - l_0) + F_a + Mg\sin\alpha$$

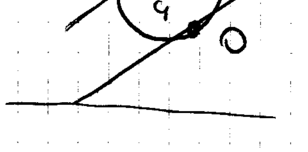
Inoltre all'equilibrio, da $\vec{M}_G = \dot{\vec{L}}_q$, si ottiene

$$I_q\,\dot{\omega} = 0 = F_a R \quad \Rightarrow F_a = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{eq} = l_0 + \frac{Mg}{k}\sin\alpha$$

$$x(t=0) = x_{eq} \qquad x(t_{fin}) = l_0 - r l_0$$

Dal teorema del momento dell'impulso rispetto a O (centro istantaneo di rotazione)



$$I(d+R) = I_0\,\omega_0\,, \qquad I_0 = \frac{3}{2}MR^2$$

$$\Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{2}{3}\frac{I\,(d+R)}{MR^2}$$

Conserv. dell'energia da dopo l'urto

$$\frac{1}{2}I_0\omega_0^2 + \frac{1}{2}k(x_{eq} - l_0)^2 - Mg\,x_{eq}\sin\alpha = \frac{1}{2}k(l_0 - rl_0 - l_0)^2$$
$$- Mg\,(l_0 - rl_0)\sin\alpha$$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\,\cancel{\tfrac{3}{2}}\cancel{MR^2}\,\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{3}{\cancel{9}}}\frac{I^2(d+R)^2}{M^{\cancel{2}}R^{\cancel{4}\,2}} + \cancel{\tfrac{1}{2}}\,k\left(\frac{Mg\sin\alpha}{k}\right)^2 - \underset{1}{\cancel{2}}Mg\left(\frac{Mg\sin\alpha}{k} + l_0\right)\sin\alpha =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} k r^2 l_0^2 - {}_{1}^{2} Mg\, l_0 (1-r) \sin\alpha$$

$$\frac{2}{3} \frac{(d+R)^2}{MR^2} I^2 = k\left(r^2 l_0^2 - \frac{M^2 g^2 \sin^2\alpha}{k^2}\right)$$

$$+ 2 Mg \sin\alpha \left(r l_0 + \frac{Mg \sin\alpha}{k}\right)$$

$$I = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{MR^2}{(d+R)^2} \left[k\left(r^2 l_0^2 - \frac{M^2 g^2 \sin^2\alpha}{k^2}\right) + 2Mg \sin\alpha \left(r l_0 + \frac{Mg \sin\alpha}{k}\right)\right]}$$

Compito A2 del 08/02/2005

Esercizio 2: Un contenitore cilindrico di lunghezza pari a 1.70 m è appoggiato verticalmente e al suo interno scorre senza attrito un pistone adiabatico che lo divide in due parti. Si trascuri l'altezza del pistone rispetto a quella del cilindro. All'interno del cilindro, sopra e sotto il pistone, ci sono rispettivamente 0.240 e 0.260 moli di un gas perfetto. Il contenitore può scambiare calore solo con una sorgente esterna che lo mantiene a temperatura costante pari a 280 K. Determinare:

1. la massa che deve avere il pistone perché il contenitore sia diviso in parti uguali in condizioni di equilibrio (5,0)
   m [kg] = $\boxed{5.47}$ A $\boxed{0.392}$ B $\boxed{3.42}$ C $\boxed{1.60}$ D $\boxed{5.47}$ E $\boxed{1.77}$

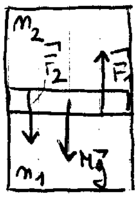
Si supponga adesso che il numero di moli di gas sopra e sotto il cilindro sia il medesimo, pari a 0.200. Il pistone ha adesso massa pari a 1.50 kg ed è inizialmente posto a metà del cilindro. Viene poi lasciato libero finché raggiunge la sua posizione d'equilibrio. La sorgente esterna mantiene il sistema alla medesima temperatura costante data precedentemente. Determinare:

2. il calore scambiato tra il gas e la sorgente esterna (5,0)
   Q [J] = $\boxed{-0.175}$ A $\boxed{-0.117}$ B $\boxed{-0.201}$ C $\boxed{-0.1000}$ D $\boxed{-0.429}$ E $\boxed{-0.175}$

Si supponga infine che il cilindro sia diviso in due parti da un pistone mobile di massa trascurabile. Nuovamente, il numero di moli sopra e sotto il pistone e la temperatura della sorgente esterna hanno i medesimi valori dati al punto precedente. Il pistone è inizialmente nella sua posizione di equilibrio. Si supponga di spostare con una forza esterna opportuna il pistone in modo che il volume finale del gas nella parte inferiore del cilindro sia 0.360 volte il volume totale. Determinare

3. il lavoro minimo che deve compiere la forza esterna nella trasformazione (5,0)
   L_{max} [J] = $\boxed{38.0}$ A $\boxed{205}$ B $\boxed{75.5}$ C $\boxed{374}$ D $\boxed{265}$ E $\boxed{38.0}$

1)



$F_1 = P_1 S$

$F_2 = P_2 S$

$P_1 \frac{L}{2} S = n_1 R T_0$

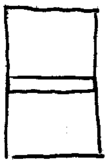
$P_2 \frac{L}{2} S = n_2 R T_0$

$$F_1 - F_2 = Mg$$

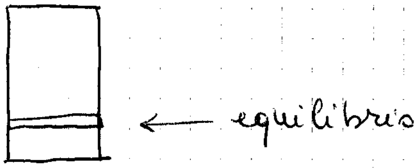
$$\frac{2 n_1 R T_0}{L} - \frac{2 n_2 R T_0}{L} = Mg$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{2 R T_0}{g L} (n_1 - n_2)$$

2) $n_1 = n_2 \equiv n$



in.



fin

(in) $V_1 = V_2 = \frac{V}{2}$

(fin) $Mg = F_1 - F_2$

$V_1 + V_2 = V$

$F_1 = \frac{n R T_0}{V_1} S$

$F_2 = \frac{n R T_0}{V_2} S$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{Mg}{nRT_0S} = \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \\ V_1 + V_2 = V \end{cases} \qquad \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V-V_1} = \boxed{\frac{Mg}{nRT_0S}} \equiv B$$

$$V_2 = V - V_1$$

$$V - V_1 - V_1 = B\,(V-V_1)\,V_1 = B\,V V_1 - B\,V_1^2$$

$$B V_1^2 - (BV+2)\,V_1 + V = 0$$

$$V_1 = \frac{(2+BV) \pm \sqrt{(2+BV)^2 - 4BV}}{2B}$$

soluzione fisica : $V_1 < V/2$

$$= \frac{1}{B} + \frac{V}{2} - \frac{\sqrt{4 + B^2V^2}}{2B}$$

$$= \frac{V}{2} + \frac{nRT_0S}{Mg} - \sqrt{4 + \frac{M^2g^2\cancel{S^2}L^2}{n^2R^2T_0^2\cancel{S^2}}}\;\frac{nRT_0S}{2Mg}$$

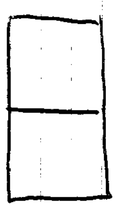
$$\Delta U = 0 = Q - \mathcal{L}_{gas} = Q + \mathcal{L}_{ext}$$

$$\mathcal{L}_{ext} = Mg\left(L_1 - \frac{L}{2}\right) = \frac{Mg}{S}\left(V_1 - \frac{V}{2}\right)$$

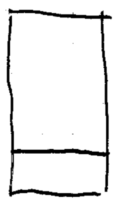
$$Q = -\mathcal{L}_{ext} = -\frac{\cancel{Mg}}{\cancel{S}}\;\frac{nRT_0\cancel{S}}{\cancel{Mg}}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{M^2g^2L^2}{4n^2R^2T_0^2}}\right)$$

$$= nRT_0\left(\sqrt{1 + \frac{M^2g^2L^2}{4n^2R^2T_0^2}} - 1\right)$$

3)



in.



fin.

$V_1 = \alpha V$

$$\Delta U_{gas} = 0 = Q + \mathcal{L}_{ext} \qquad \mathcal{L}_{ext} = -Q$$

$$\Delta S_{gas} + \Delta S_{sorg} \geq 0$$

$$\Delta S_{gas} = nR \ln \frac{V_1}{\frac{V}{2}} + nR \ln \frac{V_2}{\frac{V}{2}} = nR \ln \frac{V_1 (V - V_1)}{\frac{V^2}{4}}$$

$$= nR \ln \left[4 \alpha (1 - \alpha) \right]$$

$$\Delta S_{sorg} = \frac{Q_{sorg}}{T_0} = -\frac{Q}{T_0}$$

$$\Delta S_{sorg} \geq - \Delta S_{gas}$$

$$- \frac{Q}{T_0} \geq - \Delta S_{gas}$$

$$\mathcal{L}_{ext} \geq - T_0 \Delta S_{gas} = - nRT_0 \ln \left[4 \alpha (1-\alpha) \right] .$$

Lo stesso risultato si ottiene notando che il minimo lavoro è fatto da una trasf. reversibile e quindi

$$\mathcal{L}_{ext} = - \mathcal{L}_{gas} = - \mathcal{L}_{isot.\ rev} =$$

$$= - nRT_0 \left(\ln \frac{V_1}{\frac{V}{2}} + \ln \frac{V_2}{\frac{V}{2}} \right)$$

$$= - nRT_0 \ln \left[4 \alpha (1 - \alpha) \right]$$