Esercizio 1: Un uccello spicca il volo da un albero, partendo da un'altezza pari a 2.50 m, con una velocità costante diretta verso l'alto, il cui modulo è pari a 1.00 m/s e la cui direzione forma una angolo di 0.300 Rad con l'orizzontale. Un bambino, posto a 1.30 m dall'albero, vuole colpire l'uccello lanciando un sasso in verticale da un'altezza pari a 1.10 m. Determinare:

1. il modulo della velocità che deve avere il sasso affinché l'uccello venga colpito (5,0)
   $|v|$ [m/s] = $\boxed{8.13}$ A $\boxed{7.69}$ B $\boxed{4.82}$ C $\boxed{8.13}$ D $\boxed{5.28}$ E $\boxed{11.0}$

Si supponga adesso che l'uccellino, colpito dal sasso, non riesca più a volare e che subito dopo l'urto abbia una velocità sempre diretta verso l'alto, il cui modulo è pari a 2.00 m/s e la cui direzione forma un angolo di 0.540 Rad con l'orizzontale. Dopo 0.0370 s, determinare:

2. il valore assoluto della componente tangente alla traiettoria dell'accelerazione istantanea dell'uccello (5,0)
   $|a_T|$ [m/s^2] = $\boxed{3.58}$ A $\boxed{7.92}$ B $\boxed{1.50}$ C $\boxed{8.44}$ D $\boxed{3.58}$ E $\boxed{0.717}$
3. il valore assoluto della componente verticale del versore normale alla traiettoria (5,0)
   $|\hat{N}_{ver}|$ = $\boxed{0.934}$ A $\boxed{0.934}$ B $\boxed{4.64}$ C $\boxed{17.6}$ D $\boxed{1.89}$ E $\boxed{7.50}$

---

1) $$\begin{cases} x_u(t) = v_0 \cos\alpha \; t \\ y_u(t) = v_0 \sin\alpha \; t + h_u \end{cases} \qquad \begin{cases} x_s(t) = d \\ y_s(t) = v_s t - \frac{1}{2} g t^2 + h_s \end{cases}$$

Da $x_u(t) = x_s(t) \Rightarrow t = \dfrac{d}{v_0 \cos\alpha}$

$$y_u(t) = y_s(t) \Rightarrow h_u + v_0 t \sin\alpha = v_s t - \frac{1}{2} g t^2 + h_s$$

$$\Rightarrow v_s = \frac{h_u - h_s}{t} + v_0 \sin\alpha + \frac{1}{2} g t$$

Con $t = \dfrac{d}{v_0 \cos\alpha} \Rightarrow$

$$v_s = \frac{h_u - h_s}{d} v_0 \cos\alpha + v_0 \sin\alpha + \frac{1}{2} g \frac{d}{v_0 \cos\alpha}$$

2) Subito dopo l'urto

$$\begin{cases} x_u(t) = v_1 \cos\beta \; t \\ y_u(t) = \bar{h} + v_1 \sin\beta \; t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_u(t) = v_1 \cos\beta \\ \dot{y}_u(t) = v_1 \sin\beta - g t \end{cases}$$

altezza a cui è avvenuto l'urto

Per trovare $|a_T|$, ci sono due possibilità:

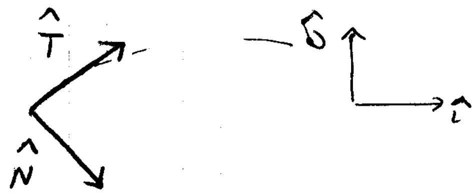
i) $$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|v|} \Rightarrow \frac{(-g)\,(v_1 \sin\beta - gt)}{\sqrt{v_1^2 + g^2t^2 - 2v_1 g t \sin\beta}} = a_T$$

ii) $$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{T} + \frac{v^2}{R}\hat{N} \Rightarrow$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{v_1^2 + g^2t^2 - 2v_1 g t \sin\beta}\right) =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}}\,\frac{\cancel{2}g^2 t - \cancel{2}v_1 g \sin\beta}{\sqrt{v_1^2 + g^2t^2 - 2v_1 g t \sin\beta}} = \frac{g\,(gt - v_1\sin\beta)}{\sqrt{v_1^2 + g^2t^2 - 2v_1 g t \sin\beta}}$$

3) $$\hat{T} = \hat{v} = \frac{v_1\cos\beta}{|v|}\,\hat{i} + \frac{v_1\sin\beta - gt}{|v|}\,\hat{j}$$

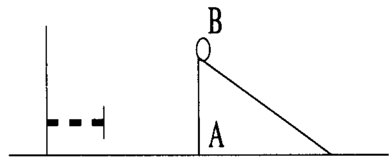


Invertendo le componenti e scambiando segno

$$\hat{N} = \frac{v_1\sin\beta - gt}{|v|}\,\hat{i} - \frac{v_1\cos\beta}{|v|}\,\hat{j}$$

$$\Rightarrow |\hat{N}_{ver}| = \frac{v_1\cos\beta}{\sqrt{v_1^2 + g^2t^2 - 2v_1 g t \sin\beta}}$$

Esercizio 2: Si consideri il sistema in figura: un cuneo A di massa 6.40 kg è appoggiato su di un piano orizzontale liscio. La sezione del cuneo è approssimabile con un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa è lunga 1.30 m e forma un angolo con l'orizzontale pari a 0.420 Rad. Sul cuneo è appoggiato un blocchetto B di massa 3.70 kg. Alla sinistra del cuneo c'è una molla di costante elastica pari a 180 N/m e lunghezza a riposo di 1.90 m, con un'estremo fissato ad una parete. Inizialmente, il blocchetto si trova in cima al cuneo, il quale a sua volta è ad una certa distanza dalla molla, e il tutto ha velocità nulla. Si lascia il sistema libero di muoversi. Si supponga che la parte finale del cuneo A sia sagomata in modo tale che il blocchetto B abbia velocità tutta orizzontale quando abbandona il cuneo. In tale istante, il cuneo e l'estremità libera della molla arrivano in contatto. Determinare:



1. la distanza iniziale tra il cuneo e l'estremità libera della molla (5,0)
   d [m] = $\boxed{0.435}$ A $\boxed{0.0928}$ B $\boxed{0.435}$ C $\boxed{0.0992}$ D $\boxed{0.466}$ E $\boxed{0.212}$
2. la compressione massima della molla (5,0)
   δ_{max} [m] = $\boxed{0.283}$ A $\boxed{5.41}$ B $\boxed{0.234}$ C $\boxed{0.592}$ D $\boxed{2.14}$ E $\boxed{0.283}$

Si supponga adesso che nell'istante iniziale in cui il blocchetto B è in cima al cuneo, il cuneo sia in contatto con l'estremità libera della molla, ma che questa non sia compressa. Si lascia di nuovo il blocco libero di scendere sul cuneo. Quando la lunghezza della molla è pari a 0.560 volte la sua lunghezza a riposo, determinare:

3. il modulo dell'accelerazione del cuneo (5,0)
   $|a|$ [m/s^2] = $\boxed{19.5}$ A $\boxed{34.5}$ B $\boxed{3.33}$ C $\boxed{6.38}$ D $\boxed{19.5}$ E $\boxed{12.3}$

1) Si conserva la q.d.m. lungo l'asse $\hat{x}$ $\Rightarrow$

$$m\,x + M\,X = 0$$

$$x = X + l\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad (m+M)\,X + m\,l\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad X = -\frac{m}{m+M}\,l\cos\alpha$$

di quanto si è spostato il cuneo

$$\Rightarrow \quad d = \frac{m}{m+M}\,l\cos\alpha$$

2) Troviamo la velocità del cuneo, nell'istante in cui il blocchetto arriva a terra. Dalla conservazione dell'energia meccanica:

$$m\,g\,l\sin\alpha = \frac{1}{2}M V^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$v^2 = v_x^2 + \cancel{v_y^2} = v_x^2$$

Dalla conservazione della q.d.m. lungo $\hat{x}$:

$$m v_x + M V = 0 \Rightarrow v_x = \frac{M}{m} V$$

$$\Rightarrow m g\, l \sin\alpha = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \frac{M^2}{m} V^2$$

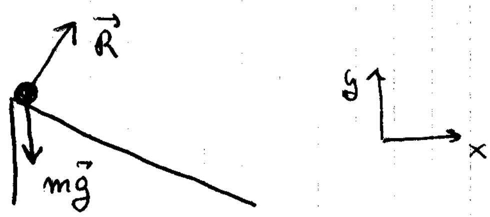
$$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{2 m g l \sin\alpha}{M \left(1 + \frac{M}{m}\right)}}$$

Per trovare la compressione max, basta imporre che

$$\cancel{\frac{1}{2}} M V^2 = \cancel{\frac{1}{2}} K \delta^2_{max} \Rightarrow \delta^{\cancel{2}}_{max} = \sqrt{\frac{M}{K}}\, V^{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow \delta_{max} = \sqrt{\frac{2 m g l \sin\alpha}{K \left(1 + \frac{M}{m}\right)}}$$

3) Forze sul blocchetto

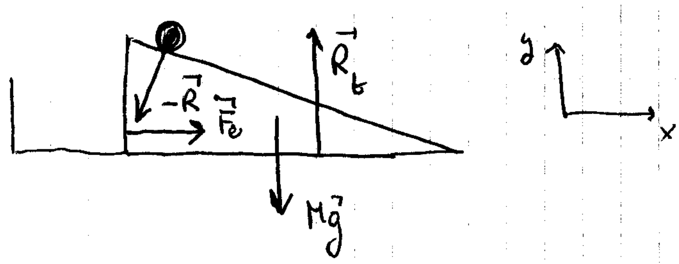


$$\begin{cases} m(\ddot{x}' + \ddot{X}) = R \sin\alpha \\ m \ddot{y} = -mg + R\cos\alpha \end{cases}$$

Inoltre so che $\ddot{y} = \ddot{y}'$ e $\frac{-\ddot{y}'}{\ddot{x}'} = \mathrm{tg}\,\alpha$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \ddot{x}' \,\mathrm{tg}\,\alpha = mg - R\cos\alpha \\ m(\ddot{x}' + \ddot{X}) = R \sin\alpha \end{cases}$$

Forze sul cuneo



$$\begin{cases} M \ddot{X} = -R\sin\alpha + F_e \\ M \ddot{Y} = -R\cos\alpha - Mg + R_t \end{cases}$$

$$F_e = -k(l - l_0) = k\, l_0 (1 - \alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M\ddot{X} = -R\sin\alpha + k\,l_0(1-\alpha) \\ m(\ddot{x}' + \ddot{X}) = R\sin\alpha \\ m\ddot{x}'\,\mathrm{tg}\,\alpha = mg - R\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}' = mg\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - R\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} \\ m\ddot{x}' + m\ddot{X} = R\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \quad mg\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - R\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + m\ddot{X} = R\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad mg\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + m\ddot{X} = R\,\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad R = mg\cos\alpha + m\ddot{X}\sin\alpha$$

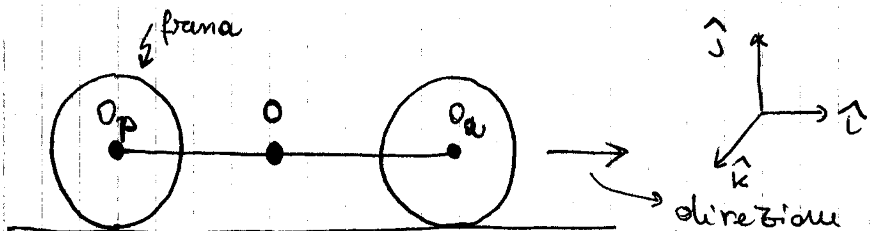
$$M\ddot{X} = -mg\cos\alpha\sin\alpha - m\ddot{X}\sin^2\alpha + k\,l_0(1-\alpha)$$

$$\ddot{X} = \frac{k\,l_0(1-\alpha) - mg\cos\alpha\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}.$$

Esercizio 1: Una bicicletta è così schematizzata: le due ruote di massa 1.70 kg, raggio 0.420 m e momento d'inerzia, rispetto all'asse della ruota, 0.490 kg m^2 sono mantenute ad una distanza di 2.20 m da un'asta, di massa trascurabile, che connette rigidamente gli assi delle ruote stesse. La massa della bicicletta e la massa del ciclista, pari a 58.0 kg, sono concentrate in un unico punto posto sull'asta ed esattamente a metà della sua lunghezza. La bicicletta si muove su una strada rettilinea e in piano. Il ciclista per mezzo del freno posteriore applica sull'asse della ruota un momento costante in modo da imprimere alla bicicletta una decelerazione costante nel tempo e pari a 2.90 m/s^2. Nell'ipotesi che le ruote siano perfettamente rigide e che il loro moto sia di puro rotolamento, determinare:

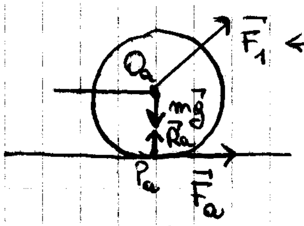
1. la componente parallela alla strada della forza che la strada stessa esercita sulla ruota anteriore. Il verso positivo della componente è quello della velocità d'avanzamento della bicicletta (si supponga per comodità da sinistra verso destra) (5,0)
   $F_{//}$ [N] = $\boxed{8.06}$ A $\boxed{8.06}$ B $\boxed{7.44}$ C $\boxed{7.11}$ D $\boxed{14.8}$ E $\boxed{3.22}$
2. il modulo del momento della forza esercitata dal freno sulla ruota posteriore (5,0)
   $|M|$ [N m^2] = $\boxed{81.6}$ A $\boxed{607}$ B $\boxed{1170}$ C $\boxed{358}$ D $\boxed{81.6}$ E $\boxed{55.7}$
3. la componente verticale della forza che la strada esercita sulla ruota posteriore. Il verso positivo della componente è verso l'alto, ovvero in direzione opposta alla forza di gravità. Poiché non sono noti i dettagli del sistema frenante, si consiglia di considerare l'intero sistema ruota posteriore + asta + ruota anteriore (5,0)
   F [N] = $\boxed{273}$ A $\boxed{273}$ B $\boxed{562}$ C $\boxed{40.0}$ D $\boxed{76.6}$ E $\boxed{143}$

1)



direzione in cui si muove la bicicletta

2ª eq. cardinale x ruota anteriore, rispetto a O_a



forza esercitata dall'asta sulla ruote davanti

$$\vec{v}_{O_a} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}_{P_a} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{O_a} = - \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\Rightarrow a = \dot{\omega} R$$

decelerazione data

$$\underbrace{I \dot{\omega} = F_a R}$$

$$\Downarrow$$

$$F_a = \frac{I a}{R^2}$$

2) 2ª eq. cardinale x ruota posteriore, rispetto a O_p

$$I \dot{\omega} = M_{ext} + F_p R$$

1ª eq. card. all'intero sistema

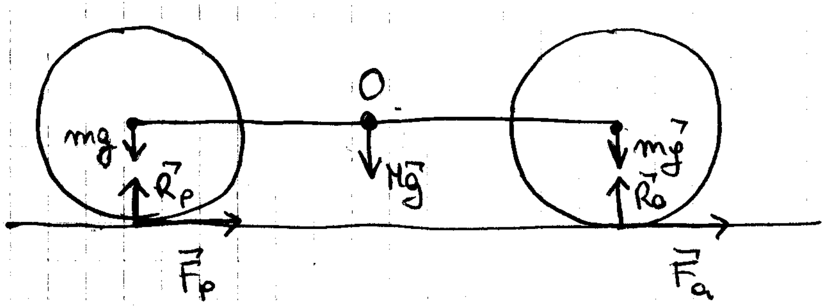
$$F_a + F_p = -(M + 2m) a$$

$$\Rightarrow \quad F_p = -(M+2m)\,a - \frac{I a}{R^2}$$

$$\Rightarrow \quad I\frac{a}{R} = M_{ext} - (M+2m)\,aR - \frac{Ia}{R}$$

$$\Rightarrow \quad M_{ext} = 2I\frac{a}{R} + (M+2m)\,aR$$

3) 2^a eq. cardinale $\times$ l'intero sistema rispetto al CM O



$$F_p R - R_p \frac{d}{2} + R_a \frac{d}{2} + F_a R = 0$$

Dalla 1^a eq. cardinale so che $\begin{cases} R_a + R_p = (M+2m)\,g \\ F_a + F_p = -(M+2m)\,a \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad R_a - R_p = (M+2m)\,2\frac{a}{d}R$$

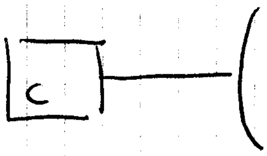
$$\Rightarrow \quad 2R_p = (M+2m)\,g - (M+2m)\,2\frac{a}{d}R$$

$$\Rightarrow \quad R_p = (M+2m)\left(\frac{g}{2} - \frac{a}{d}R\right)$$

Esercizio 2: Un sistema termicamente isolato è costituito da un corpo rigido di capacità termica 220 J/K alla temperatura assoluta di 260 K e da una sorgente alla temperatura di 290 K (capacità termica infinita). A partire da questo stato termodinamico iniziale determinare:

1. la variazione di entropia durante la trasformazione che porta il sistema dallo stato iniziale, sopra descritto, allo stato di equilibrio termico che si raggiunge dopo aver posto il corpo rigido in diretto contatto termico con la sorgente (5,0)
   ΔS [J/K] = $\boxed{1.27}$ A $\boxed{0.998}$ B $\boxed{1.27}$ C $\boxed{0.717}$ D $\boxed{0.306}$ E $\boxed{0.168}$
2. il lavoro meccanico massimo estraibile da questo sistema (5,0)
   L_{max} [J] = $\boxed{367}$ A $\boxed{542}$ B $\boxed{719}$ C $\boxed{367}$ D $\boxed{520}$ E $\boxed{3210}$
3. il tempo impiegato da una macchina termica ideale e reversibile, che lavora tra la sorgente e il corpo rigido nello stato iniziale dato precedentemente, a portare il corpo ad una temperatura di 280 K. Si ipotizzi che la potenza meccanica erogata dalla macchina sia costante nel tempo e pari a 51.0 watt (5,0)
   t [s] = $\boxed{6.43}$ A $\boxed{30.4}$ B $\boxed{2.78}$ C $\boxed{24.7}$ D $\boxed{6.43}$ E $\boxed{4.10}$

1)



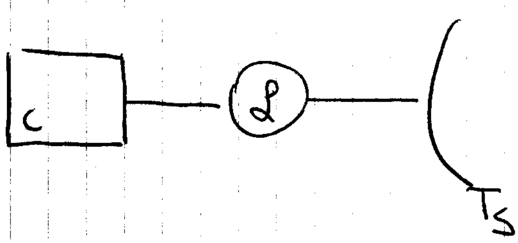
$$\Delta Q_{cs} = C(T_S - T_1) = -\Delta Q_{sc}$$

$$\Rightarrow \Delta S_S = \frac{\Delta Q_{sc}}{T_S} = C\left(\frac{T_1}{T_S} - 1\right)$$

$$\Delta S_c = C\int_{T_1}^{T_S} \frac{dT}{T} = C \ln \frac{T_S}{T_1}$$

$$\Rightarrow \Delta S_{tot} = C\left[\left(\frac{T_1}{T_S} - 1\right) + \ln \frac{T_S}{T_1}\right]$$

2)



$$\Delta U_{macc} = Q_{mc} + Q_{ms} - \mathcal{L} = 0$$

$$\mathcal{L} = Q_{mc} + Q_{ms}$$

$$\Delta S_{tot} = \cancel{\Delta S_{macc}}^{\,0} + \frac{Q_{sm}}{T_S} + \int \frac{dQ_{cm}}{T} \geq 0$$

$$\frac{Q_{sm}}{T_s} + c \ln \frac{T_f}{T_1} \geq 0$$

T_f del corpo è T_s: infatti se c_s è la cap. termica della sorgente (che poi sarà fatta andare a ∞)

$$c_s \ln \frac{T_f}{T_s} + c \ln \frac{T_f}{T_1} \geq 0$$

$$T_f = T_s^{\frac{c_s}{c_s+c}} \, T_1^{\frac{c}{c+c_s}} \xrightarrow[c_s \to \infty]{} T_s$$

$$\Rightarrow \quad Q_{sm} \geq -c\, T_s \ln \frac{T_s}{T_1}$$

$$Q_{ms} = -Q_{sm} \leq c\, T_s \ln \frac{T_s}{T_1}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = Q_{me} + Q_{ms} \leq Q_{me} + c\, T_s \ln \frac{T_s}{T_1}$$

$$= c\,(T_1 - T_s) + c\, T_s \ln \frac{T_s}{T_1}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}_{max} = c\, T_s \left[\left(\frac{T_1}{T_s} - 1 \right) + \ln \frac{T_s}{T_1} \right]$$

$$= T_s \, \Delta S_{tot}$$

$\hookrightarrow$ trovata al punto precedente.

3) $$dQ_{me} + dQ_{ms} - d\mathcal{L} = dU_m = 0$$

$$d\mathcal{L} = dQ_{me} + dQ_{ms} = -dQ_{cm} - dQ_{sm}$$

$$dS \geq 0 \Rightarrow \frac{dQ_{sm}}{T_s} + \frac{dQ_{cm}}{T} \geq 0$$

macchina ideale $\Rightarrow$ vale l'uguale

$$dQ_{sm} = -\frac{T_s}{T}\, dQ_{cm}$$

$$d\mathcal{L} = -dQ_{cm} + \frac{T_s}{T}\, dQ_{cm} = dQ_{cm}\left(\frac{T_s}{T} - 1\right)$$

$$= C\, dT \left(\frac{T_s}{T} - 1\right)$$

$$d\mathcal{L} = \mathcal{P}\, dt \Rightarrow$$

$$\int_0^{t^*} \mathcal{P}\, dt = C \int_{T_1}^{T_f} dT \left(\frac{T_s}{T} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\mathcal{P}\, t^* = C\, T_s \ln \frac{T_f}{T_1} - C\,(T_f - T_1)$$

$$t^* = \frac{C}{\mathcal{P}} \left(T_s \ln \frac{T_f}{T_1} - T_f + T_1\right)$$